

Tech Note: Study of the flow of a thin film on an inclined plane in the presence of a tangential stress applied to the free surface and effects of viscous dissipation.

Gruber Caraballo, Enrique Flores*

Departamento de Térmica y Energética. Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

Abstract.- One of the most common hydrodynamic instabilities is the propagation of waves on the free surface of liquid fluid flow, since there are velocity, pressure and temperature gradients that generate convective currents from the sine of the fluid to the external gas. The interest in these phenomena increases when the thickness of the fluid is small compared to its length, that is, in thin films of fluid. The ideal model to study thin films is when they descend an inclined plane in such a way as to consider the effect of gravity on the movement of the flow and precisely in this article is considered such condition, in addition to adding the effect of the viscous dissipation of the Nahme's law type and the application of shear tangential effort on the free surface. In this work it is used the Navier-Stokes equations and energy, we obtain a system of coupled differential equations for the fields of velocities and temperatures as a function of the depth of the thin film, and it is determined the numerical approximate solution using Four order Runge-Kutta's Method for different work conditions. It is observed that the viscous dissipation contribute to increasing the velocity in plane direction, it is observed that according to shear stress application direction in free surface the flow accelerate or desacelerate, and for low values of Brinkman's number, temperature gradient affect to flow desaceleration.

Keywords: thin films of fluids; viscous dissipation; Nahme's law.

Nota técnica: Estudio del flujo de una película delgada sobre un plano inclinado en presencia de un esfuerzo tangencial aplicado a la superficie libre y efectos de disipación viscosa.

Resumen.- Una de las inestabilidades hidrodinámicas más comunes es la propagación de ondas en la superficie libre de un flujo de fluido líquido, ya que existen gradientes de velocidad, presión y temperatura que generan corrientes convectivas desde el seno del fluido hacia el gas exterior. El interés por estos fenómenos se incrementa cuando el espesor del fluido es pequeño en comparación con su longitud, es decir, en películas delgadas de fluido. El modelo ideal para estudiar las películas delgadas es cuando descienden por un plano inclinado de tal manera que sea considerado el efecto de la gravedad en el movimiento del flujo, además de agregar el efecto de la disipación viscosa del tipo ley de Nahme y la aplicación de un esfuerzo tangencial cortante en la superficie libre. En este trabajo se usan las ecuaciones de Navier-Stokes y de la energía, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado para los campos de velocidades y de temperaturas en función de la profundidad de la película delgada, y se determina la solución numérica aproximada del sistema empleando el método de Runge-Kutta de orden 4 para distintas condiciones de trabajo. Se observa que la disipación viscosa contribuye al aumento de la velocidad en la dirección del plano, que según la dirección de aplicación de un esfuerzo tangencial en la superficie libre se acelera o desacelera el flujo, y que para valores bajos del número de Brinkman, el gradiente de temperatura influye en la ralentización del flujo.

Palabras clave: películas delgadas de fluido; disipación viscosa; ley de Nahme.

Recibido: 06 de febrero, 2019.

Aceptado: 03 de julio, 2019.

1. Introducción

El estudio de películas delgadas es de interés tanto en las ciencias básicas como en el campo industrial y tecnológico. Estas pueden estar constituidas por fluidos tan comunes como agua y aceites, o materiales exóticos como

*Autor para correspondencia:
Correo-e: evflores@gmail.com (E. Flores)

polímeros según Macosko [1]. En presencia de la acción de agentes externos mecánicos o térmicos, las películas delgadas pueden desarrollar patrones complejos tales como la propagación de ondas, frentes de ondas con discontinuidades y hasta comportamientos caóticos. En ingeniería, el estudio de las películas delgadas es útil en procesos de transferencia de calor y masa, porque ellas limitan los flujos y protegen superficies, también se encuentran en aplicaciones de pinturas, adhesivos y membranas. La dinámica en películas delgadas tiene características particulares dado que la interfase entre el líquido y el gas que le superpone representa un contorno deformable donde las perturbaciones pueden viajar y en condiciones de alto número de Reynolds evolucionar hasta formar saltos de amplitud relativamente grande en comparación con el espesor de la película delgada, o realizar transiciones a estructuras cuasi-periódicas o erráticas, altamente no lineales, que podrían incluso romper la película y exponer al sustrato, al contacto con el gas. Un mecanismo común que produce cambios en el campo de flujo de una película delgada es la acción de la gravedad combinada con la transferencia de calor que provoca cambios en la viscosidad del fluido como lo demostró Myers et al. [2]. El fuerte acoplamiento entre las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de la energía a través de la velocidad de deformación, la viscosidad y la temperatura según Richard et al. [3] también influye en el comportamiento no lineal del desarrollo del flujo y Tshehla [4] introdujo el efecto disipativo de la viscosidad del fluido en función del cambio exponencial de la temperatura y su influencia en la transferencia de calor por convección, entre la base y la superficie libre de una película delgada que desliza por un plano inclinado. En el presente trabajo se estudia la influencia que tiene un esfuerzo cortante aplicado en la superficie libre con la finalidad de ralentizar el movimiento del fluido plano abajo provocado por los gradientes convectivos y la disipación térmica debido al flujo de calor entre el plano inclinado y la superficie con una notable variación de la viscosidad del fluido como función de la temperatura.

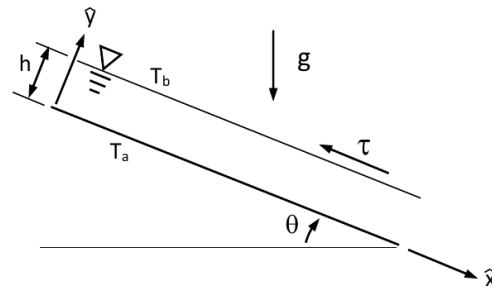


Figura 1: Flujo laminar de una película delgada de fluido newtoniano que desliza por un plano inclinado

2. Formulación del problema

La Figura 1 representa el flujo laminar en dos dimensiones de una película delgada de un fluido newtoniano que desliza por un plano inclinado, que se encuentra a una temperatura T_a , en presencia del campo gravitacional y en cuya superficie libre, que está a una temperatura T_b , se le aplica un esfuerzo tangencial τ constante. El espesor de la película es h y la viscosidad del fluido varía exponencialmente con la temperatura. El desarrollo del modelo matemático del campo de flujo toma en cuenta las siguientes consideraciones:

1. El flujo es incompresible con viscosidad $\mu(T)$ dependiente de la temperatura.
2. El régimen de flujo se considera laminar.
3. Flujo estacionario bidimensional.

Bajo estas consideraciones las ecuaciones que describen el flujo son: ecuación (1), conservación de la masa.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Ecuaciones de Navier Stokes, según (2) y (3).

$$\hat{x} : \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \sin(\theta) = 0, \quad (2)$$

$$\hat{y} : \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \cos(\theta). \quad (3)$$

Ecuación (4), conservación de la energía.

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (4)$$

Las condiciones de contorno son:

$$u_{(y=0)} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(y=h)} = \tau,$$

$$T_{(y=0)} = T_a,$$

$$T_{(y=h)} = T_b.$$

El modelo utilizado por Costa y Macedonio [5] para la dependencia de la viscosidad dinámica con la temperatura está basada en la ley de Nahme donde existe una variación exponencial, de acuerdo con la ecuación (5)

$$\mu = \mu_0 e^{-\alpha T}. \quad (5)$$

Integrando la ecuación (2) y usando la condición de contorno para el esfuerzo cortante se obtiene la ecuación (6)

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{\rho g (h - y) \text{sen}(\theta) + \tau}{\mu_0} \right) e^{\alpha T}. \quad (6)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en (4), se obtiene la ecuación (7):

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{2}{\mu_0 k} (\rho g (h - y) \text{sen}(\theta) + \tau)^2 e^{\alpha T} = 0. \quad (7)$$

De esta manera el modelo matemático queda representado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas no lineales formado por las ecuaciones (6) y (7) cuyas condiciones de contorno están representadas por:

$$u_{(y=0)} = 0, T_{(y=0)} = T_a, T_{(y=h)} = T_b$$

Indicándose la condición de no deslizamiento y los valores de la temperatura en el plano y en la superficie libre respectivamente.

3. Formulación adimensional

El flujo se desarrolla en dos dimensiones, \hat{x} paralela al plano y \hat{y} que representa la dirección normal al mismo. El espesor de la película está definido en esta última dirección y se denota por h , luego se puede usar un parámetro ε que define la relación geométrica o de aspecto del flujo como:

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1$$

El sistema de ecuaciones (6) y (7) se puede descomponer en tres ecuaciones diferenciales ordinarias haciendo $W = dT/dy$, resultando las ecuaciones (8), (9),(10):

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{\rho g (h - y) \text{sen}(\theta) + \tau}{\mu_0} \right) e^{\alpha T}, \quad (8)$$

$$\frac{dT}{dy} = W, \quad (9)$$

$$\frac{dW}{dy} + \frac{2}{\mu_0 k} (\rho g (h - y) \text{sen}(\theta) + \tau)^2 e^{\alpha T} = 0. \quad (10)$$

Estas ecuaciones de gobierno se pueden transformar en ecuaciones adimensionales utilizando las escalas definidas por las ecuaciones (11), (12) y (13):

$$u = U_0 U, \quad (11)$$

$$y = h Y, \quad (12)$$

$$\Theta = \frac{T - T_a}{T_b - T_a}, \quad (13)$$

donde las cantidades en mayúsculas U , Y y Θ son adimensionales, resultando el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden no lineales formado por las ecuaciones (14), (15) y (16):

$$\frac{dU}{dY} = (1 - Y + \gamma) e^{\beta \Theta}, \quad (14)$$

$$\frac{d\Theta}{dY} = W, \quad (15)$$

$$\frac{dW}{dY} = -\lambda e^{\beta \Theta}, \quad (16)$$

donde γ y λ se expresan en las ecuaciones (17) y (18).

$$\gamma = \tau / (\rho g \text{sen}(\theta)), \quad (17)$$

$$\lambda = (\rho g h^2 \text{sen}(\theta))^2 / (\mu_0 k (T_a - T_b)). \quad (18)$$

Se puede destacar que $U_0 = \rho g h^2 \text{sen}(\theta) / \mu_0$ es la velocidad máxima en la dirección del plano, por ello se tiene que $\lambda = Br = \mu_0 U_0^2 / k(T_a - T_b)$ es el número adimensional de Brinkman.

El sistema debe satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$U_{(y=0)} = 0, \Theta_{(y=0)} = 0, \Theta_{(y=h)} = 1$$

4. Análisis y discusión resultados

La solución numérica del sistema adimensional de ecuaciones formado por (14), (15) y (16) está basado en un problema de valor inicial donde se usó el método de Runge-Kutta de cuarto orden, variando los parámetros γ relacionado con el efecto producido por el esfuerzo tangencial que actúa sobre la superficie libre, λ que mide el efecto de la conducción de calor entre el plano y el fluido (número de Brinkman) y β que caracteriza la influencia del gradiente de temperaturas en la disipación viscosa por la ley de Nahme. El orden del error en esta aproximación es $O(h^4)$ siendo h el tamaño de paso empleado en el cálculo; que en todos los casos reportados en este trabajo es: $h = 1 \times 10^{-3}$. En la Figura 2, se muestra el comportamiento y evolución numérica de la solución para $\gamma = 0$, es decir sin esfuerzo tangencial aplicado.

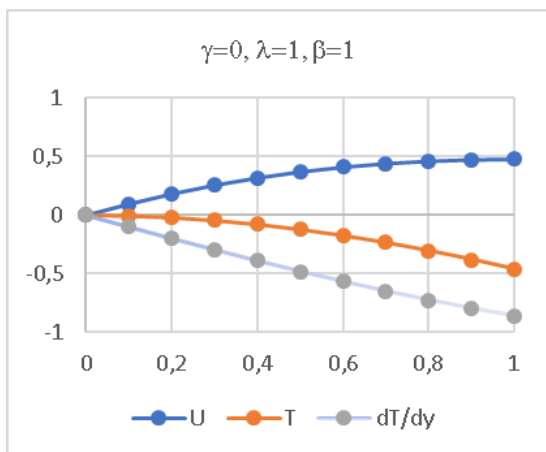


Figura 2: Solución numérica para $\gamma = 0, \beta = 1$ y $\lambda = 1$

En las Figuras 3 y 4 se usó $\gamma=2$ y $\gamma=5$ respectivamente para demostrar el efecto del

esfuerzo tangencial sobre el flujo de la película delgada plano abajo.

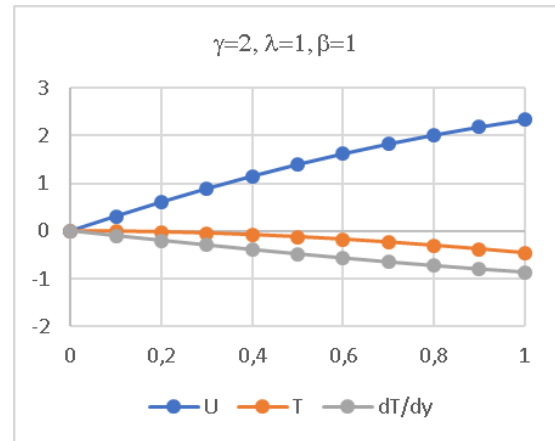


Figura 3: Solución numérica para $\gamma = 2, \beta = 1$ y $\lambda = 1$

Mientras que en las Figuras 5 y 6 se muestra el efecto que tiene la disipación viscosa en el campo de flujo, inicialmente con $\gamma = 0$ y $\lambda = 4$ 5 y luego con $\gamma = 2$ y $\lambda = 10$. En todos los casos se observa como el efecto del esfuerzo tangencial acelera el movimiento, incrementando la velocidad de descenso, sin embargo, la disipación viscosa produce un efecto similar demostrándose el fuerte acoplamiento que existe entre las ecuaciones de momento y energía en el campo de flujo.

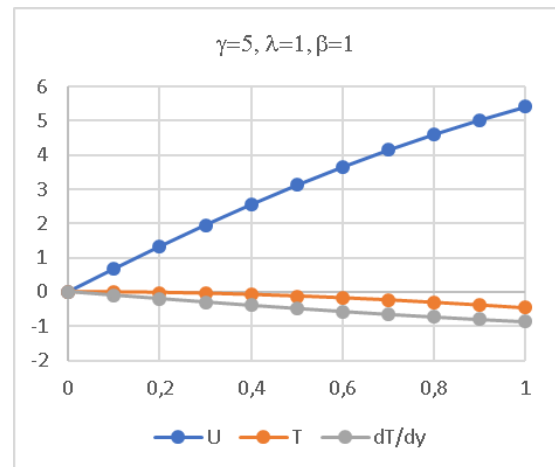


Figura 4: Solución numérica para $\gamma = 5, \beta = 1$ y $\lambda = 1$

Caso contrario ocurre cuando $\gamma < 0$, pues en ese caso el esfuerzo tangencial actuaría en dirección

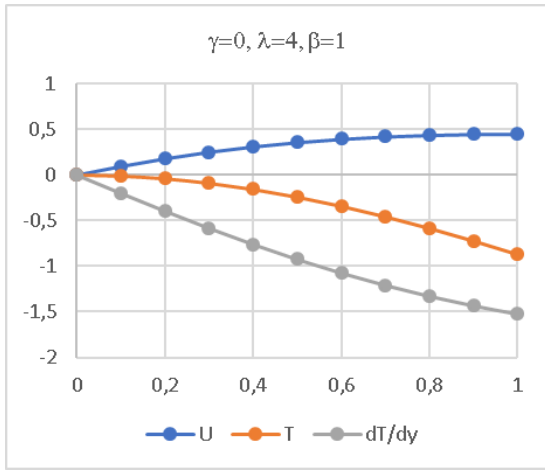


Figura 5: Solución numérica para $\gamma = 0, \beta = 1$ y $\lambda = 4$

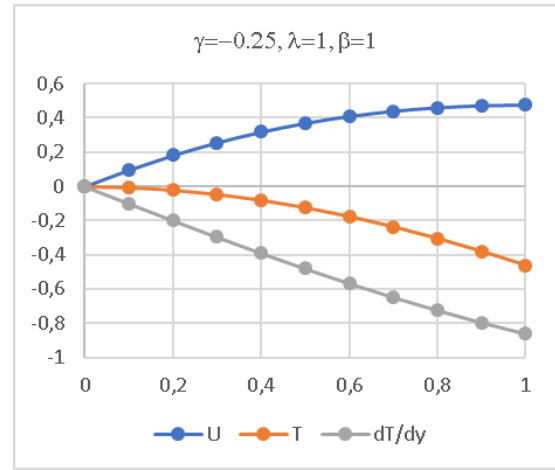


Figura 7: Solución numérica para $\gamma = -0,25, \beta = 1$ y $\lambda = 10$

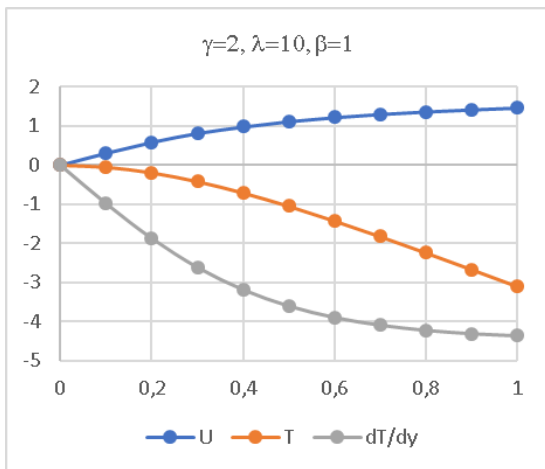


Figura 6: Solución numérica para $\gamma = 2, \beta = 1$ y $\lambda = 10$

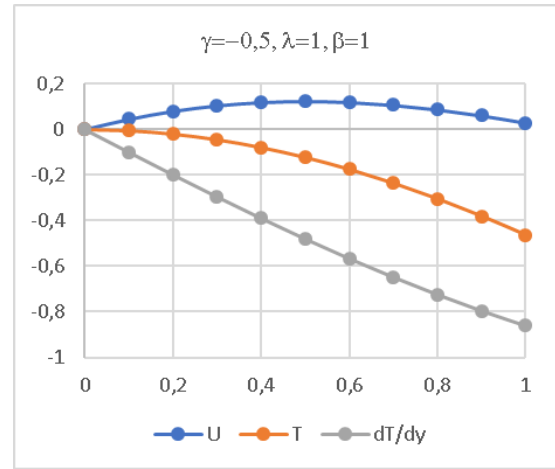


Figura 8: Solución numérica para $\gamma = -0,5, \beta = 1$ y $\lambda = 10$

opuesta al efecto de la gravedad sobre la película delgada desacelerando el flujo. En las Figuras 7 y 8 se observa este efecto con $\gamma = -0,25$ y $\gamma = -0,5$ respectivamente.

5. Conclusiones

En los experimentos numéricos realizados en el presente trabajo se muestra un fuerte acoplamiento que brinda la ley de Nahme entre las ecuaciones de momento y la ecuación de la energía, lo que conlleva a la evolución de campos de velocidad dependientes de la temperatura. En el caso de una película delgada bajo los efectos de la gravedad descendiendo por un plano inclinado, la disipación

viscosa contribuye al aumento de la velocidad en la dirección del plano, pero la aplicación de un esfuerzo tangencial en la superficie libre, acelera o desacelera el flujo según sea la dirección del mismo, lo que indica que representa un mecanismo de control sobre la velocidad del flujo. El potencial de la solución adimensional revela la dependencia con el número de Brinkman, encontrándose que para valores bajos de dicho número el gradiente de temperatura juega un papel importante en la ralentización del flujo.

6. Referencias

[1] C.W. Macosko. *Rheology, Principles, Measurements, and applications*. Wiley-VCH, Poughkeepsie, New York,

United States of America, 1994.

- [2] T.G. Myers, J.P.F. Charpin, and M.S. Tshehla. The flow of avariable viscosity fluid between parallel plates with shear heating. *Applied Mathematical Modelling*, 30(9):799–815, 2013.
- [3] G.L. Richard, C. Ruyer-Quil, and J.P. Vila. A three equation model for thin films down an inclined plane. *Journal Fluid Mech*, 804:162–200, 2016.
- [4] M.S. Tshehla. The Flow of variable viscosity fluid down an inclined plane with a free Surface. *Mathematical problems in Engineering*, 2013, 2013.
- [5] A. Costa and G. Macedonio. Viscous heating in fluids with temperature-dependent viscosity. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 10(6):545–555, 2012.