

Resolución numérica del modelo matemático de transporte de gas en gasoductos inclinados isotérmicos, usando un método iterativo híbrido de Taylor y trapecio.

Numerical resolution of the mathematical model of gas transport in isothermal inclined gas pipelines, using an iterative hybrid method of Taylor and trapezium.

Villarreal, Jesús^{1*}; Rosales, Richard¹; Parra, Rafael²

¹ Facultad de Ingeniería, Departamento de Cálculo. Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela.

² Instituto de Matemática y Estadística. Prof. Ing. Rafael Laguardia. Facultad de Ingeniería Julio Herrera y Reissig 565 CP11300. Montevideo, Uruguay.

*jvillarreal25@gmail.com

Resumen

Las leyes de conservación de Navier-Stokes forma un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal y no homogéneo, el cual será el modelo matemático que simulará la dinámica del gas natural en gasoductos inclinados. En cada paso del tiempo la clasificación del sistema será hiperbólico y se resolverá numéricamente usando un método iterativo híbrido; es decir, se combinará el método de Taylor y trapecio para luego aplicarle el método de Newton-Raphson. Para tratar el problema estacionario, se calculará la solución usando un método de diferencias finitas para luego mejorarla usando el método de Newton-Raphson. Por otro lado, para el problema transitorio del transporte de gas natural usaremos a lo largo del gasoducto, el método de Taylor sobre cinco puntos para calcular una aproximación a la solución, luego a partir del método del trapecio usaremos el método de Newton-Raphson para calcular iterativamente la solución en cada paso del tiempo. Al final del gasoducto se hará la simulación de un cierre total de válvula y tiempo más tarde su apertura, dicha condición severa se usará para probar la eficacia y la estabilidad de los métodos numéricos implementados.

Palabras claves: Transporte de gas, leyes de conservación de Navier-Stokes, métodos numéricos, método de Taylor, método del trapecio, método iterativo de Newton-Raphson.

Abstract

The laws of conservation of Navier-Stokes form a system of equations in partial derivatives nonlinear and nonhomogeneous, which will be the mathematical model that will simulate the dynamics of natural gas in inclined gas pipelines. In each step of time the classification of the system will be hyperbolic and it will be solved numerically using a hybrid iterative method; that is, the Taylor and trapezium method is combined to then apply the Newton-Raphson method. To treat the stationary problem, the solution will be calculated using a finite difference method and then improved using the Newton-Raphson method. On the other hand, for the transitory problem of natural gas transport we will use along the pipeline, the Taylor method over five points to calculate an approximation to the solution, then from the trapeze method we will use the Newton-Raphson method to iteratively calculate the solution in each step of time. At the end of the pipeline, the simulation of a total valve closure will be made and, later on, its opening, this severe condition will be used to test the efficiency and stability of the numerical methods implemented.

Keywords: Transport of gas, conservation laws of Navier-Stokes, numerical methods, Taylor's method, trapezium's method, iterative method of Newton-Raphson.

1 Introducción

El gas natural es una mezcla de hidrocarburos gaseosos con predominio del metano no inferior al 70% en comparación con otros hidrocarburos; esto caracteriza al gas natural como fuente de energía, ya que en su combustión produce una menor proporción de agentes contaminantes, como el monóxido de carbono (CO) y anhídrido carbónico (CO_2). El método más común para transportar gas de un lugar a otro, es impulsarlo a través de un sistema de gasoductos de sección circular constante, los cuales pueden estar horizontales o inclinados respecto al suelo terrestre.

Está bien establecido que el proceso de transporte de gas en gasoductos es costoso en recursos económicos; y para garantizar el éxito de estos proyectos es recomendable realizar pruebas, experimentos y simulaciones de dicho proceso. Por tal motivo el diseño de sistemas de transporte de gas natural bajo condiciones de operatividad eficientes y seguras, se requiere del conocimiento de los cambios presentes en las variables de interés ingenieril, no importa cual pequeño sea el cambio, (Zhou y col., 2000, Villarreal 2009, Benjamin y col., 1978, Martins y col. 2017, Thorley y col., 1987, Jibrin y col., 2018); es decir, conocimientos de la caída de presión, cambios de temperatura (caso no isotérmico) y flujo de masa de gas distribuida en todo el sistema.

Generalmente, se supone considerar flujo isotérmico, aplicado a fricciones constantes, y despreciando expansión o contracción de la pared de la tubería por efectos de la presión. Cabe destacar que, para la simulación del flujo transitorio del gas natural en gasoductos inclinados, se está considerando el término de inercia en la ecuación de cantidad de movimiento. (Villarreal y col., 2018).

Las ecuaciones de conservación de masas, conservación de la cantidad de movimiento y la ecuación de estado del gas natural, (Zhou y col., 2000, Villarreal y col., 2018, Martins y col., 2017, Vázquez 2003, Wylie y col., 1978), constituyen el sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal y no homogéneo, que simulará el transporte de gas en gasoductos inclinados; y que debido a su complejidad es conveniente desarrollar métodos numéricos para su resolución.

Sobre cada paso del tiempo el modelo matemático se comportara hiperbólico, (LeVeque y col., 1990) y se resolverá numéricamente mediante un método híbrido iterativo de Taylor y trapecio.

En la primera sección se presenta el problema modelo, las ecuaciones que se han de resolver con los valores de contorno correspondientes. Aquí se enumeran y describen los métodos numéricos que se emplearán en la resolución del problema, tales como el método de Newton - Raphson que se

usa en la estimación de la condición inicial, diferencias finitas para aproximar las derivadas del modelo y el método del trapecio para aproximar la integral empleada en la solución del problema homogéneo. En la sección tres se explica paso a paso, el procedimiento a seguir para resolver el problema. La experimentación numérica es presentada en la sección cuatro junto con el análisis de los resultados, donde se consideran dos tipos de condiciones de borde. Las conclusiones se presentan en la sección cinco y en la sección seis se muestran los agradecimientos a las instituciones involucradas en la investigación. Finalmente se muestran las referencias del trabajo.

2 Marco Teórico

2.1 Modelo matemático

A continuación se presenta el modelo matemático, en coordenadas cartesianas, en una dimensión y bajo la mecánica clásica, el cual representará el transporte de gas en gasoductos inclinados; considerando condiciones de borde de densidad al comienzo y masa de flujo al final del gasoducto.

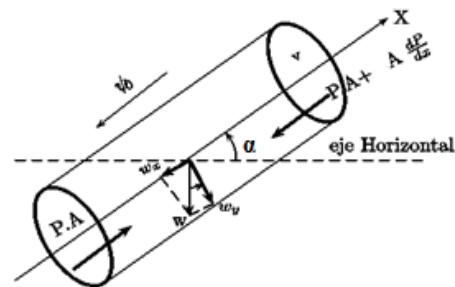


Fig. 1. Volumen fijo de control de gas dinámico

Si a la figura 1 le aplicamos estos conceptos físicos, se tiene el sistema de ecuaciones de Navier - Stokes, (Vázquez J. L., 2003) y (Wylie E. y Streeter, 1978):

$$\begin{cases} -\frac{\partial M}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial(\rho A \Delta x)}{\partial t}; & (1.a) \\ -\frac{\partial P}{\partial x} A \Delta x - \tau \pi D \Delta x - \rho g A \sin \alpha \Delta x = \rho A \Delta x a_x. & (1.b) \end{cases}$$

Donde M es el caudal másico, ρ la densidad del gas, A el área transversal del gasoducto, τ el esfuerzo cortante, D el diámetro del gasoducto, g la aceleración de gravedad, α es la inclinación del gasoducto, a_x la aceleración del fluido y Δx el intervalo espacial. La ecuación (1. a), representa la ley de conservación de masas, y la ecuación (1. b), es la aplicación de la sumatoria de fuerzas en el volumen de control representado por la figura 1, (Villarreal J., 2009). De la ecuación (1. a), se puede obtener:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.a)$$

Por otra parte, si se considera la ecuación de Darcy-

Weisbach, (Villarreal 2009, (White 2011), y se multiplica por el inverso del área y del intervalo de espacio, de la ecuación (1. b), se puede deducir:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{f_g \rho u^2 \pi D}{8A} - \rho g \sin \alpha = \rho \frac{du}{dt}. \quad (2. b)$$

Reescribiendo la derivada total de la velocidad en función del tiempo y acomodando convenientemente los factores se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}(P + \rho u^2) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{f_g \rho u^2}{2D} - \rho g \sin \alpha. \quad (3)$$

Considerando que las variables a estudiar serán $m = \rho u$ y ρ , y por la ley de gas semi-ideal, se puede reescribir el sistema de ecuaciones (1), de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right) = -\frac{f_g m |m|}{2D\rho} - \rho g \sin \alpha. \end{cases} \quad (4. a)$$

$$\rho(x_0, t) = \rho_0; \quad m(x_n, t) = m_n; \quad P = \rho c^2; \quad c = (zRT)^{1/2}. \quad (4. b)$$

Donde ρ es la densidad del gas, m es el flujo de masa, P es la presión, z es la compresibilidad del gas, R es la constante del gas transportado, T es la temperatura del gas, x es la distancia a lo largo del gasoducto, t es el tiempo, f_g es el factor de fricción del gasoducto, D es el diámetro interno del gasoducto, g es la aceleración de la gravedad, c es la velocidad del sonido en el fluido y α es el ángulo de inclinación del gasoducto. Observemos que en la ecuación (4. b), el valor absoluto fue agregado para considerar el sentido de la velocidad del fluido, (Villarreal 2009, Martinsy col., 2017, Wylie y col., 1978, Wanga y col., 2018). El problema debe resolverse para el caso transitorio, utilizando los métodos numéricos expuestos anteriormente.

2.2 Método de Newton-Raphson

A continuación se introduce el método de Newton-Raphson, (Burden y col., 2011), el cual comienza con una aproximación inicial p_0 y genera la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (5)$$

Generalmente, si p_0 es una buena aproximación de p , el método de Newton-Raphson convergerá rápidamente a la raíz. Para obtener la solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólico no lineal y no homogéneo, se necesita la distribución de las variables conservativas de in-

terés a lo largo de todo el gasoducto, en caso estable o estacionario, las cuales serán las condiciones iniciales. Consideremos el sistema estacionario a partir del modelo matemático completo:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial x} = 0; \Rightarrow m = \text{cte}; \text{ para todo } x \in [0, L]. \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right) = - \left(\frac{f_g m |m|}{2D\rho} + \rho g \sin \alpha \right). \end{cases} \quad (6)$$

Este sistema será resuelto numéricamente usando el método de diferencias finitas progresivo y así tener una buena aproximación a los valores de ρ a lo largo del gasoducto; para luego resolver analíticamente el sistema estacionario obteniendo una solución implícita, y así aplicarle el método de Newton-Raphson.

2.3 Método de diferencias finitas

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal y no homogéneo (4) se puede escribir en forma vectorial de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = R(U); \quad (7)$$

donde $U = (\rho, m)$ es el vector de variables conservativas de interés en este trabajo, la función flujo presente en el modelo matemático es $F(U) = \left(m, \frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right)$ y la función residual es $R(U) = \left(0, -\frac{f_g m |m|}{2D\rho} - \rho g \sin \alpha \right)$. Para el procedimiento de discretizar la derivada temporal usaremos el método de diferencias finitas progresivo; es decir,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t}. \quad (8)$$

Para la discretización de la derivada espacial, la aproximación de la serie de Taylor solo necesita la primera derivada, para mayor precisión en este trabajo se recomienda usar la fórmula de aproximación sobre cinco puntos (ver figura 2) de cuarto orden de exactitud (White 2011), para el nodo i tenemos que:

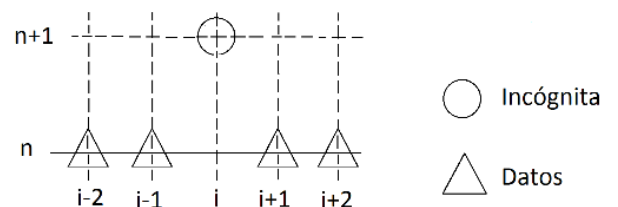


Fig. 2. Esquema de nodos centrados

$$\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{F(U_{i-2}^t) - 8F(U_{i-1}^t) + 8F(U_{i+1}^t) - F(U_{i+2}^t)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4);$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 2. \tag{9}$$

Otra fórmula sobre cinco puntos para aproximaciones de la derivada espacial, en el primer y segundo punto (ver figura 3), está dada por:

$$\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{-25F(U_i^t) + 48F(U_{i+1}^t) - 36F(U_{i+2}^t) + 16F(U_{i+3}^t) - 3F(U_{i+4}^t)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4); \quad i = 0, 1. \tag{10}$$

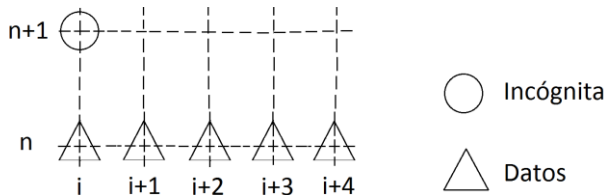


Fig. 3. Esquema de nodos iniciales

Por otro lado, mediante manipulación algebraica, se obtiene la fórmula para la aproximación de la derivada espacial sobre cinco puntos, de cuarto orden sobre el penúltimo y último punto; como sigue,

$$\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{25F(U_i^t) - 48F(U_{i-1}^t) + 36F(U_{i-2}^t) - 16F(U_{i-3}^t) + 3F(U_{i-4}^t)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4); \quad i = n - 1, n. \tag{11}$$

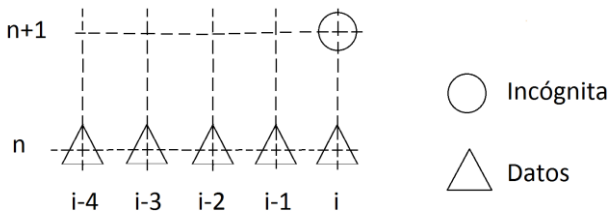


Fig. 4. Esquema de nodos finales

Cabe destacar que las ecuaciones (8), (9), (10) y (11); como se verá más adelante, formarán ecuaciones explícitas que permitirán calcular $U = (\rho, m)$ a lo largo del gasoducto inclinado.

2.4 Método del trapecio

En muchos problemas prácticos, se usa el método del trapecio para aproximar integrales definidas sobre intervalos muy pequeños. Observemos que el sistema de ecuaciones en forma vectorial (7), se puede ver como el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\partial F(U)}{\partial x} + R(U). \tag{12}$$

Luego integrando con respecto a t , tenemos:

$$\int_{U^j}^{U^{j+1}} \frac{dU}{dt} dt = \int_{U^j}^{U^{j+1}} \left(-\frac{\partial F(U)}{\partial x} + R(U) \right) dt. \tag{13}$$

Operando convenientemente la ecuación anterior y del método del trapecio, obtenemos:

$$U^{j+1} = U^j + \frac{\Delta t}{2} \left(\left(-\frac{\partial F(U^{j+1})}{\partial x} + R(U^{j+1}) \right) + \left(-\frac{\partial F(U^j)}{\partial x} + R(U^j) \right) \right). \tag{14}$$

Consideremos la función H para aplicarle el método iterativo de Newton-Raphson

$$H(U) = U - U_i^j + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F(U_{i+1})}{\partial x} - R(U_{i+1}) + \frac{\partial F(U_i^j)}{\partial x} - R(U_i^j) \right). \tag{15}$$

Derivando la ecuación (15) respecto al vector de variables conservativas U , obtenemos:

$$\frac{dH(U)}{dU} = 1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 F(U_{i+1})}{\partial x \partial U} - \frac{\partial R(U_{i+1})}{\partial U} \right). \tag{16}$$

Luego del método de Newton-Raphson, se tiene que:

$$U_i^{(k+1)} = U_i^{(k)} - \frac{H(U)}{\frac{dH(U)}{dU}}; \quad i = 0, 1, \dots, n; \tag{17}$$

donde $U_i^{(k)}$ es la primera aproximación del vector de variables conservativas de interés, las cuales fueron calculadas usando la fórmula explícita del método de diferencias finitas y Taylor; y $U_i^{(k+1)}$ es el vector mejorado de variables conservativas, cabe destacar que este método iterativo se aplicara hasta que se cumpla cierta tolerancia; es decir

$$|U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)}| < \epsilon. \tag{18}$$

3 Resolución del modelo

Los valores iniciales para cada punto del gasoducto serán obtenidos del caso estacionario, entonces del sistema de ecuaciones (6), tenemos:

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 0; \Rightarrow m = Ctte, \text{ para todo } x \in [0, L]. \text{ Y además } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right) = - \left(\frac{f_g m |m|}{2D\rho} + \rho g \sin \alpha \right). \tag{19}$$

Integrando sobre $(0, \Delta x)$ a la ecuación diferencial de variables separables (19) se obtiene la solución general implícita (Villarreal y col., 2018) dada por:

$$F(\rho_{\Delta x}) = \ln \left| \frac{(k + \rho(\Delta x)^2)^{\frac{c^2}{2} + \frac{m^2}{2k}} \rho(0)^{m^2/k}}{(k + \rho(0)^2)^{\frac{c^2}{2} + \frac{m^2}{2k}} \rho(\Delta x)^{m^2/k}} \right| + g \Delta x \sin \alpha, \quad (20)$$

donde $k = \frac{f_g m |m|}{2 D g \sin \alpha}$; derivando la función (20) respecto a la variable $\rho(\Delta x)$ se obtiene la ecuación:

$$F'(\rho_{\Delta x}) = \frac{c^2 \rho(\Delta x)^2 - m^2}{(k + \rho(\Delta x)^2) \rho(\Delta x)}. \quad (21)$$

Se obtendrá el valor de $\rho_{\Delta x}$ a través del método de Newton-Raphson sustituyendo las ecuaciones (20) y (21) en la siguiente ecuación:

$$\rho_{x_{n+1}} = \rho_{x_n} - \frac{F(\rho_{x_n})}{F'(\rho_{x_n})}. \quad (22)$$

A través de la ecuación (22), se pueden obtener los valores iniciales de la densidad a lo largo del gasoducto. Por otro lado, para resolver el problema transitorio del transporte de gas en gasoductos inclinados, se hará en dos partes:

Primero: Resolvamos numéricamente el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (4) mediante fórmulas explícitas a partir de las ecuaciones (8), (9), (10) y (11); sabiendo que $F(U) = \left(m, \frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho\right)$ y $R(U) = (R_1(U), R_2(U)) = \left(0, -\frac{f_g m |m|}{2 D \rho} - \rho g \sin \alpha\right)$; por lo tanto $U_i^{j+1} = (\rho_i^{j+1}, m_i^{j+1})$ son calculados sobre los puntos intermedios mediante las ecuaciones explícitas, dadas por:

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j - \frac{\Delta t}{12 \Delta x} (m_{i-2}^j - 8m_{i-1}^j + 8m_{i+1}^j - m_{i+2}^j); \quad (23)$$

$$m_i^{j+1} = m_i^j - \frac{\Delta t}{12 \Delta x} \left[2 \frac{m_i^j}{\rho_i^j} (m_{i-2}^j - 8m_{i-1}^j + 8m_{i+1}^j - m_{i+2}^j) + \left(c^2 - \left(\frac{m_i^j}{\rho_i^j} \right)^2 \right) (\rho_{i-2}^j - 8\rho_{i-1}^j + 8\rho_{i+1}^j - \rho_{i+2}^j) \right] + \Delta t R_2(U_i^j); \quad i = 2, 3, \dots, n-2. \quad (24)$$

Por otro lado, obtenemos las fórmulas explícitas para calcular $U_i^{j+1} = (\rho_i^{j+1}, m_i^{j+1})$ en los puntos extremos

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j - \frac{\Delta t}{12 \Delta x} (-25m_i^j + 48m_{i+1}^j - 36m_{i+2}^j + 16m_{i+3}^j - 3m_{i+4}^j); \quad i = 0, 1 \quad (25)$$

$$m_i^{j+1} = m_i^j - \frac{\Delta t}{12 \Delta x} \left[2 \frac{m_i^j}{\rho_i^j} (-25m_i^j + 48m_{i+1}^j - 36m_{i+2}^j + 16m_{i+3}^j - 3m_{i+4}^j) + \left(c^2 - \left(\frac{m_i^j}{\rho_i^j} \right)^2 \right) (-25\rho_i^j + 48\rho_{i+1}^j - 36\rho_{i+2}^j + 16\rho_{i+3}^j - 3\rho_{i+4}^j) \right] + \Delta t R_2(U_i^j); \quad i = 0, 1 \quad (26)$$

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j - \frac{\Delta t}{12 \Delta x} (25m_i^j - 48m_{i-1}^j + 36m_{i-2}^j - 16m_{i-3}^j + 3m_{i-4}^j); \quad i = n-1, n \quad (27)$$

$$m_i^{j+1} = m_i^j - \frac{\Delta t}{12 \Delta x} \left[2 \frac{m_i^j}{\rho_i^j} (25m_i^j - 48m_{i-1}^j + 36m_{i-2}^j - 16m_{i-3}^j + 3m_{i-4}^j) + \left(c^2 - \left(\frac{m_i^j}{\rho_i^j} \right)^2 \right) (25\rho_i^j - 48\rho_{i-1}^j + 36\rho_{i-2}^j - 16\rho_{i-3}^j + 3\rho_{i-4}^j) \right] + \Delta t R_2(U_i^j); \quad i = n-1, n \quad (28)$$

Por lo tanto, hemos obtenido los valores de $U_i^{j+1} = (\rho_i^{j+1}, m_i^{j+1})$ sobre todos los nodos $i = 0, 1, \dots, n$ del intervalo $[0, L]$, donde L es la longitud del gasoducto inclinado. Cabe destacar que estas soluciones se usarán como primera aproximación, para ser mejorada numéricamente mediante el método iterativo híbrido de trapecio con Newton-Raphson.

Segundo: En esta parte se procede a mejorar iterando la solución obtenida en la primera parte, a partir de una combinación del método del trapecio y Newton-Raphson. Ya en la primera parte se calculó numéricamente $U_i^{j+1} = (\rho_i^{j+1}, m_i^{j+1})$; $i = 0, 1, \dots, n$, el cual se usará como primera aproximación en el método iterativo (17), es decir, $U_i^{(k)} = U_i^{j+1}$. A continuación se presenta la ecuación general para el método de Newton; en efecto,

$$U_i^{(k+1)} = U_i^{(k)} - \frac{U - U_i^{(k)} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F(U_{i+1})}{\partial x} - R(U_{i+1}) + \frac{\partial F(U_i)}{\partial x} - R(U_i) \right)}{1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 F(U_{i+1})}{\partial x \partial U} - \frac{\partial R(U_{i+1})}{\partial U} \right)}; \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (29)$$

Luego, obtenemos los jacobianos asociados a la ecuación iterativa (29), como sigue:

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial \rho} & \frac{\partial m}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right) & \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & 2 \frac{m}{\rho} \end{pmatrix}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R(U)}{\partial U} \\ &= \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{f_g m |m|}{2D\rho} - \rho g \sin \alpha \right) \end{array} \right) \frac{\partial \theta}{\partial m} \left(-\frac{f_g m |m|}{2D\rho} - \rho g \sin \alpha \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{f_g m |m|}{2D\rho^2} - g \sin \alpha & -\frac{f_g |m|}{D\rho} \end{array} \right). \quad (31) \end{aligned}$$

Con los jacobianos de la función flujo $F(U)$ y el residuo $R(U)$, se pueden obtener formulas iterativas para cada variable conservativa de interés en este trabajo; es decir, ρ y m , como se muestra a continuación:

$$\rho_i^{(k+1)} = \rho_i^{(k)} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial m_{i+1}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial m_i^{(k)}}{\partial x} \right); \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (32)$$

Para el cálculo de $\rho_n^{(k+1)}$, usaremos la ecuación característica C^+ para ρ , (Villarreal y col. 2018) dada por:

$$\begin{aligned} \left(c - \frac{m}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t} + \left(\frac{m}{\rho} + c \right) \left(\left(c - \frac{m}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial x} \right) \\ = -\frac{f_g m |m|}{2D\rho} - \rho g \sin \alpha. \quad (33) \end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos el flujo de masa mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & m_i^{(k+1)} \\ &= m_i^{(k)} - \frac{m_i^{(k)} - m_i^j + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right)_i^{(k)} + \left(\frac{f_g m |m|}{2D\rho} + \rho g \sin \alpha \right)_i^{(k)} \right]}{1 + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{m}{\rho} \right)_i^{(k)} + \left(\frac{f_g |m|}{D\rho} \right)_i^{(k)} \right]} \\ &+ \frac{\frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \right)_i^j + \left(\frac{f_g m |m|}{2D\rho} + \rho g \sin \alpha \right)_i^j \right]}{1 + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{m}{\rho} \right)_i^{(k)} + \left(\frac{f_g |m|}{D\rho} \right)_i^{(k)} \right]}; \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (34) \end{aligned}$$

Observemos que el vector mejorado de variables conservativas $U^{(k+1)} = (\rho_i^{(k+1)}, m_i^{(k+1)})$ se han obtenido sobre todos los nodos del dominio $[0, L]$; es decir, sobre los puntos $i = 0, 1, \dots, n$; a partir de las ecuaciones iterativas (32), (33) y (34); además $m_n^{(k+1)} = m_n$ esta dada por condición de borde. Cabe destacar que, las derivadas parciales espaciales que aparecen en dichas ecuaciones, serán discretizadas usando el esquema de Taylor sobre cinco puntos, como en las fórmulas (9), (10) y (11); además, este método iterativo se aplicará hasta que se cumpla cierta tolerancia; esto es,

$$\left| \rho_i^{(k+1)} - \rho_i^{(k)} \right| < \varepsilon_1; \quad \left| m_i^{(k+1)} - m_i^{(k)} \right| < \varepsilon_2$$

4 Experimentación numérica

Como parte de la experimentación numérica, se usarán los métodos explícitos de Taylor de cuarto orden de exactitud y un esquema híbrido de trapecio y Newton-Raphson, para simular el problema del transporte de gas natural en gasoduc-

tos inclinados y posteriormente el cierre de una válvula al final del gasoducto. Cabe destacar que esta condición severa se usa para probar la estabilidad y consistencia de dichos métodos numéricos, para calcular los valores de interés a lo largo del gasoducto.

4.1 Problema transitorio con condiciones de borde constantes

A continuación se presentan los datos de entrada del problema, parámetros presentes en el proceso de transporte de gas en gasoductos inclinados, así como las condiciones de borde en el modelo. Esto es, para el gasoducto, longitud $L = 1000 \text{ m}$, diámetro interno, $D = 0,5 \text{ m}$, fricción interna $f_g = 0,031$, velocidad del sonido en el fluido $c = 300 \text{ m/s}$, longitud entre nodos espaciales consecutivos $\Delta x = 10 \text{ m}$, pasos temporales $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ y el ángulo de inclinación $\alpha = \sin^{-1}(20/L)$. Densidad del gas al comienzo del gasoducto $\rho(0, t) = 50 \text{ kg/m}^3$ y flujo de masa del gas al final del gasoducto $m(n, t) = 100 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$.

Primero presentamos los resultados gráficos obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólico, no lineal y no homogéneo en caso estacionario; cabe destacar que estos resultados serán usados como condiciones iniciales del problema transitorio, de transporte de gas en gasoductos inclinados.

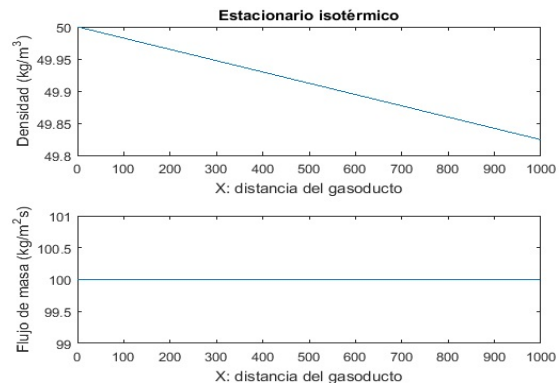


Fig. 5. Soluciones del caso estacionario

En la figura 5 se puede observar el estado estacionario del problema de transporte de gas. Aquí se puede apreciar la distribución de la densidad y el flujo de masa a lo largo del gasoducto inclinado. La distribución de densidad obtenida es la esperada para este problema, cuyo comportamiento va en decrecimiento aguas arriba producto de la caída de presión y más aún, debido a la inclinación del gasoducto. Por otro lado, el flujo de masa se mantiene constante en virtud de la conservación de masa presente en nuestro problema. Tomando estos resultados como condición inicial, el problema transitorio estudiado arrojó los resultados que se pueden observar en la figura 6. Aquí se presenta la distribución de densidad y flujo de masa a los 1,57325 segundos observando que su compor-

tamiento es idéntico al caso estacionario ya que no hay fuerzas externas presentes en el proceso de transporte de gas.

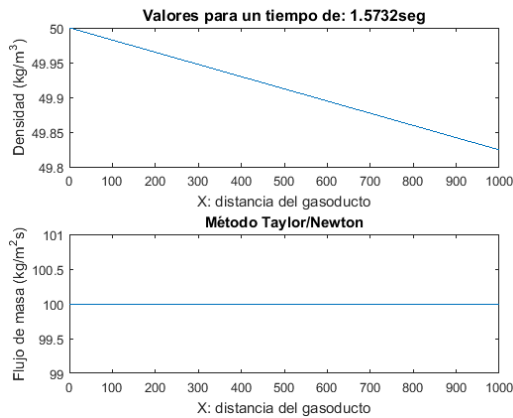


Fig. 6. Soluciones transitorias para $t=1,57325$ segundos

Luego de 8,21835 segundos de simulación, se puede ver en la figura 7, que la distribución de las variables conservativas analizadas mantiene su comportamiento estable, en otras palabras, se puede afirmar que la solución obtenida converge al estado estacionario, siempre y cuando no existan fuerzas externas en el proceso, como sería en el caso de apertura o cierre de válvulas, aumento o disminuciones de presión al comienzo del gasoducto por efectos de compresión, fugas de gas, etc. Denotando las soluciones transitorias y estacionarias de la densidad del gas y el flujo de masa, por $\rho(x, t)$, $\rho_e(x)$, $m(x, t)$ y $m_e(x)$, respectivamente; para $t > 0$ los errores en cada nodo del dominio los calculamos mediante las fórmulas, $E_\rho(x) = |\rho(x, t) - \rho_e(x)|$ y $E_m(x) = |m(x, t) - m_e(x)|$ y además $E_\rho = \max_{x \in [0, L]} E_\rho(x)$ y $E_m = \max_{x \in [0, L]} E_m(x)$. Con estas medidas los errores fueron nulos, es decir, se puede asegurar la convergencia a la solución del estado estacionario.

4.2 Problema transitorio con condiciones de contorno variables

A continuación se presentan los resultados del problema, cuando se realiza una simulación de cierre de válvula al final del gasoducto. Tomando los mismos parámetros del caso anterior, ahora a los 0.0002 segundos se procedió a cerrar repentinamente la válvula al final del gasoducto, lo que se traduce en definir la variable m , de la siguiente manera:

$$m(n, t) = \begin{cases} 100 & \text{si } 0 < t < 0.0002 \\ 0 & \text{si } t \geq 0.0002 \end{cases}$$

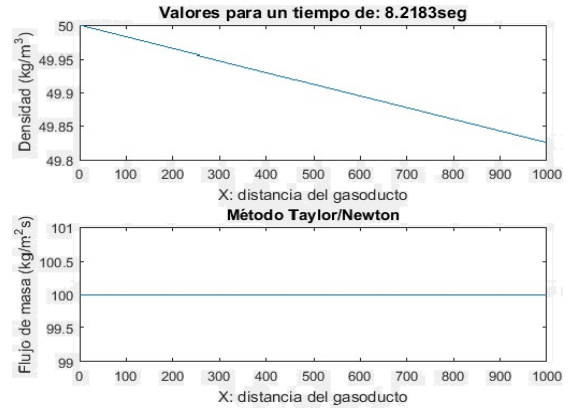


Fig. 7. Soluciones transitorias para $t=8,21837$ segundos

Este problema se resolvió numéricamente obteniéndose los resultados que se indican a continuación. En la figura 8 se presenta la gráfica de la densidad del gas, donde en el eje x representa la variable espacial y en el eje t , el número de iteraciones en el tiempo, mientras que en el eje z están los valores de la densidad. Aquí se puede observar que en la solución encontrada empiezan a aparecer oscilaciones al final del gasoducto, después de 0.02 segundos del cierre, las cuales van a ir en aumento a medida que transcurre el tiempo. En la figura 9 se presentan los resultados numéricos correspondientes al flujo de masa después del cierre de válvula al final del gasoducto inclinado. Aquí se puede observar que también aparecen oscilaciones, justo al final del gasoducto. Esto significa que el método numérico implementado en este trabajo no es capaz de captar con precisión el comportamiento de las variables conservativas cuando se aplican cambios drásticos en las condiciones de borde, como es el caso del cierre de válvulas.

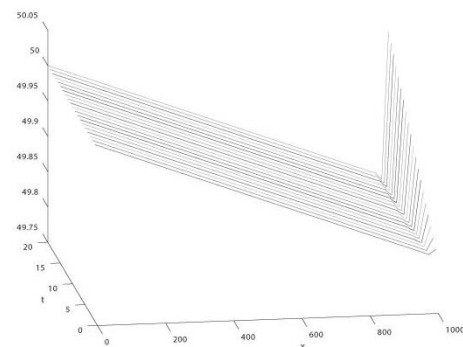


Fig. 8. Densidad del gas desde el cierre de válvula

En otras palabras, el método numérico implementado pierde estabilidad cuando las condiciones de borde dependen y varían severamente con respecto al tiempo. Sin embargo, el método numérico aplicado al modelo matemático (4), capta bien durante un periodo corto de tiempo los efectos que implican un cierre repentino de válvula, como podría ser el aumento de densidad, debido a la confinación o acumulación de gas al final o en otras palabras, por el aumento de presión; además de la caída repentina a cero en la masa de flujo de gas

al final del gasoducto.

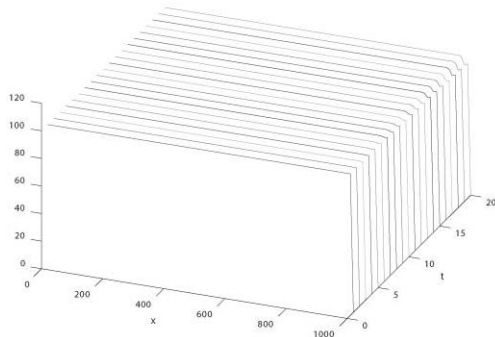


Fig. 9. Flujo de masa desde el cierre de válvula

5. Conclusiones:

Durante la experimentación numérica del problema transitorio del transporte de gas en gasoductos inclinados, con condiciones de borde constantes se obtiene la solución esperada; es decir, alcanza de forma inmediata la solución estacionaria, ya que nuestro modelo en principio representa el flujo de gas natural, que no está sometido a ninguna fuerza externa.

Después de 8 segundos de simulación del transporte de gas, se observó que las gráficas de las soluciones obtenidas de la densidad del gas y el flujo de masa, tienen un comportamiento estable, es decir, se observó que las gráficas no presentaron oscilaciones espurias. Cabe destacar que, previamente en este trabajo se logra obtener analíticamente la solución del problema estacionario del transporte de gas natural, con la cual se hace un análisis del error de las soluciones, definido en el apartado anterior y con estas medidas los errores fueron nulos, es decir, se puede asegurar la convergencia a la solución del estado estacionario. Sin embargo, al introducir severas condiciones de borde, variables en el tiempo, como es el caso de cierre repentino de la válvula al final del gasoducto, el esquema numérico pierde estabilidad a medida que transcurre el tiempo.

Por otro lado, es importante resaltar que el método numérico presentado en este trabajo, es de fácil implementación en comparación con otros métodos numéricos, lo cual lo hace atractivo para resolver el problema de transporte de gas natural en gasoductos inclinados con condiciones de borde constantes.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido posible gracias al apoyo brindado por el Departamento de Cálculo, de la Escuela Básica de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad de Los Andes. Mérida – Venezuela, a través del Grupo de Matemática Multidisciplinaria.

Referencias

- Zhou, Adewumi MA, 2000, Simulation of transients in natural gas pipelines using hybrid TVD schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- Villarreal J, Rosales R, Parra R, Alviarez C, 2018, Resolución del modelo de transporte de gas, considerando un sistema isotérmico. *Revista Ciencia e Ingeniería*. Vol 39. No 3 pp. 297 – 306.
- Nuno MC, Martins I, Brunone B, Meniconi S, Ramos HM, Covas IC, 2017, Efficient CFD model for transient laminar flow modeling: pressure wave propagation and velocity profile changes. *Journal of Fluids Engineering*.
- Villarreal J, 2009, Modelado y experimentación numérica de los regímenes inestables no isotérmicos del transporte de gas en tramos lineales de gasoductos. Tesis de Maestría. Universidad de Los Andes. Venezuela.
- Sergey A, Dyachenk, Zlotnik A, Korotkevich AO, Chertcov M, 2016. Operator splitting method for simulation of dynamic flows in natural gas pipeline networks, arXiv:1611.10008v1 [physics.comp-ph] pp 1-25.
- Burden R, Faires TD, 2011, Análisis numérico. Brooks/Cole.
- White FM, 2011, Fluid Mechanics. McGraw Hill.
- Harten A, 1997, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, pp. 260 – 278.
- Vásquez JL, 2003, Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos. Universidad Autónoma de Madrid. España.
- Wylie E, Benjamin, Streeter VL, 1978, Fluid Transients. McGraw-Hill, International Book Company.
- Thorley ARD, Tiley CH, 1987, Unsteady and transient flow of compressible fluids in pipelines – A Review of Theoretical and Some Experimental Studies. *Heat Fluid Flow*, pp. 3 – 15.
- Huan-Feng Duan, Tong-Chuan Che, Lee PJ, Ghidaoui MS, 2018, Influence of nonlinear turbulent friction on the system frequency response in transient pipe flow modelling and analysis. *Journal of Hydraulic Research*, DOI: 10.1080/00221686.2017.1399936.
- Godunov SK, 1959, Difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of equations of hydrodynamics. *Mater. Sbornik, N.S.*, pp. 271 - 306.
- LeVeque RJ, Yee HC, 1990, A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms, *J. Comput. PHYS*, pp. 187 – 210.
- Mbaya Jibrin H, Amin Norsarahaida, 2018, Advanced Science Letters, Volume 24, Number 5, Numerical Modeling and Simulation of Transient Flow and Heat Transfer of Gas in a Producing Gas Well. pp. 3616-3621.
- Wanga P, Yua B, Dongxu H, Dongliang S, Xiangb Y, 2018, Fast method for the hydraulic simulation of natural gas pipeline networks based on the divide-and-conquer approach. *Journal of Natural Gas Science and Engineering* pp. 55 – 63.

Recibido: 13 de marzo de 2019

Aceptado: 10 de septiembre de 2019

Villarreal, Jesús: MSc. en Matemáticas. Departamento de Cálculo. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes.

Rosales, Richard: MSc. en Matemáticas. Departamento de Cálculo. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. Correo electrónico: rrra@ula.ve

Parra, Rafael: Dr. en Matemáticas. Instituto de Matemática y Estadística. Prof. Ing. Rafael Laguardia. Facultad de Ingeniería Julio Herrera y Reissig 565 CP11300. Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: rparra@fing.edu.uy

