REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

NÚCLEO UNIVERSITARIO “RAFAEL RANGEL”

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

TRUJILLO ESTADO TRUJILLO

# TEOREMA DE PITÁGORAS

**Implementando GeoGebra 3.2 Como Herramienta Tecnológica en su proceso de Enseñanza-Aprendizaje.**



Trujillo, Mayo 2012

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

NÚCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL"

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

TRUJILLO ESTADO TRUJILLO



**TEOREMA DE PITÁGORAS**

**Implementando GeoGebra 3.2 Como Herramienta Tecnológica en su proceso de Enseñanza-Aprendizaje.**

**Autora:**

Piña A Romina M. CI. 18.801.630

**Tutor:** Prof. Romano José.

Trujillo, Mayo 2012

**TEOREMA DE PITAGORAS**

**Implementando GeoGebra 3.2 Como Herramienta Tecnológica en su proceso de Enseñanza-Aprendizaje.**

**Autora:** Piña A Romina M

**Tutor:** Prof. Romano José

RESUMEN

El Propósito primordial de esta investigación es demostrar que el "estudiante promedio" y egresado de la carrera de Educación mención Física y Matemática del Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de los Andes del estado Trujillo (NURR-ULA) puede adquirir en un corto periodo de tiempo los conocimientos básicos que le permitan manejar el software educativo GeoGebra 3.2, el cual puede ser empleado como TIC para la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras. Este estudio se enmarco en el enfoque de investigación cualitativa; con diseños de tipo transversales exploratorios y longitudinales de tendencia. La investigación se realizo con una muestra no probabilística de tipo sujeto voluntario constituida por una estudiante de la carrera de Educación Mención Física y Matemática del NURR-ULA (la creadora de la presente investigación). Las técnicas para la recolección de datos que se utilizaron a lo largo de toda la investigación fueron: La observación y documentos y/o materiales escritos y audiovisuales; y como instrumento para la recolección de información se utilizo: Un estudio Teórico-Práctico detallado del Teorema de Pitágoras, desde sus orígenes hasta la actualidad, así como también la construcción con GeoGebra 3.2 de un conjunto de demostraciones seleccionadas, previamente documentadas y perfeccionadas del Teorema de Pitágoras. Se concluyo que cualquier estudiante de la carrera de Educación Mención Física y Matemática puede adquirir en corto periodo de tiempo los conocimientos básicos que le permitan manejar software educativo para luego ser aplicado como una TIC en el proceso de enseñanza –aprendizaje del Teorema de Pitágoras, quedando demostrado que no hay excusa aceptable para que el proceso enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas, y específicamente en la enseñanza y aprendizaje de teorema de Pitágoras sea tradicional y rutinario. Por tal motivo se hace necesario buscar vías alternativas por parte de las instituciones a nivel superior para que los nuevos egresados estén mejor preparados en lo que a las nuevas tecnologías se refiere, se espera que con los resultados de esta investigación se pueda actualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a fin de optimizar la preparación académica en dicha área y así solventar los problemas que se presentan a la hora aprender y enseñar matemática.

**Palabras Claves:** Construcción, software GeoGebra 3.2, TIC, Teorema de Pitágoras, estudio Teórico-Práctico detallado, construcción de un conjunto de demostraciones.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

## ÍNDICE GENERAL

**Pág.**

Resumen…………………………………………………………………………….iii

Introducción………………………………………………………………………….1

Capítulo I: El Problema……………………………………………………………..5

1.1.- Planteamiento del Problema……………………………………………......5

1.2.- Objetivos de la Investigación…………………………………………....12

1.2.1.- Objetivo General…………………………………………………………..12

1.2.2.- Objetivos Específicos……………………………………………………12

1.3. Justificación………………………………………………………………….13

Capítulo II: Marco Teórico de la Investigación…………………………………17

2.1.- Antecedentes de la Investigación…………………………………………18

2.2.- Tecnología de Información y Comunicación (TIC)……………………..19

2.3.- Las TIC en el Sistema Educativo Bolivariano…………………………23

2.4.-El Centro Educativo Bolivariano de Informática y Telemática (CEBIT)...24

2.4.1.- Objetivos del CEBIT…………………………………...…………….24

2.4.2.- Componentes de un CEBIT……………………………………………..26

2.5.- Enfoques Constructivistas………………………………………………26

2.6.- Teoría del Aprendizaje Significativo....................................................30

2.6.1.- Aprendizaje significativo en la Matemática…..................................35

2.6.2- Las TIC para el logro de un aprendizaje significativo…………………38

2.7.- Las TIC como estrategia en la enseñanza de la matemática……..…..39

2.8.- Los Software Educativos como TIC…………………………………….43

2.9.- La historia en el proceso de formación del Profesor de Matemáticas…47

2.9.1.- La utilización de la historia en la educación matemática……………..50

Capítulo III: Marco Metodológico…………………………………………..........53

3.1.- Tipo de la Investigación………………………………………………….53

3.2.- Diseño de la Investigación……………………………………………….54

3.3.- Universo y Muestra……………………………….................................55

3.4.- Técnicas e Instrumentos Para la Recolección de Datos……………….57

3.4.1.- La Observación…………………………………………………………57

3.4.2.- Documentos y/o materiales escritos y audiovisuales………………...58

Capítulo IV: El Teorema de Pitágoras……………………………………….59

4.1 Recorrido Histórico……………………………………………………..60

4.2 Teorema de Pitágoras y Los Pitagóricos……………………………….67

4.3 Definiciones, Proposiciones y Teoremas Pertinentes…………………71

4.4 Demostraciones Clásicas del Teorema de Pitágoras……………………84

4.4.1.-Demostración Atribuida a Pitágoras (Semejanza)………..………..85

4.4.2.-Demostración 2: (Prueba India debida a un matemático llamado Baskara, 1150 d.C)…………………………………………..……………..89

4.4.3.-Demostración 3: (James Garfield 1875)……………………….………92

4.4.4.-Demostración (Clásica)……………………………………..…………95

4.4.5.-Demostración(Euclides, libro I de los Elementos,proposición 47)......98

4.4.6.-Demostración (Llamada Prueba China)………………….…………...102

4.5 Generalización de la Versión Euclidiana del Teorema de Pitágoras para Polígonos Regulares………………………………………………………104

Capítulo V: Demostraciones Seleccionadas del Teorema de Pitágoras…108

5.1 GeoGebra………………………………………………………………109

5.2 Demostraciones Clásicas del Teorema de Pitágoras Empleando GeoGebra 3.2…………………………………………………………………...111

5.2.1.-Demostración Atribuida a Pitágoras (Semejanza)…………………..111

5.2.2.- Demostración: (James Garfield 1875)……………………….………127

5.2.3.- Demostración (Clásica)………………………..……….…………….134

5.2.4.-Demostración (Euclides, libro I de los Elementos, proposición 47)..143

5.2.5.- Generalización de la Versión Euclidiana del Teorema de Pitágoras para Polígonos Regulares…………………………..……………………….152

Capítulo VI: Conclusiones Y Recomendaciones……………………………157

6.1. Conclusiones……………………………………………………………..157

6.2. Recomendaciones………………………………………………………..160

Referencias Bibliográficas……………………………………………………162

# INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas del siglo XX y durante los primeros años del presente, la educación matemática ha experimentado un desarrollo muy importante, este avance ha tenido lugar, en la mayoría de los casos, debido a las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), que han llegado a ser uno de los pilares básicos de la sociedad y hoy, cuando, es necesario proporcionar al ciudadano una educación que tenga en cuenta esta realidad, la utilización de la tecnología que permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos, constituye una importantísima contribución desde el punto de vista del aprendizaje.

El proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, es una tarea ampliamente compleja y fundamental en todos los sistemas educativos. No existe, probablemente, ninguna sociedad cuya estructura educativa carezca de planes de estudio relacionados con la educación matemática. Las profesoras y profesores de matemáticas y de otras áreas del conocimiento científico se encuentran con frecuencia frente a exigencias didácticas cambiantes e innovadoras, lo cual requiere una mayor atención por parte de las personas que están dedicadas a la investigación en el campo de la didáctica de la matemática y, sobre todo, al desarrollo de unidades de aprendizaje para el tratamiento de la variedad de temas dentro y fuera de la matemática.



La enseñanza de la matemática se realiza de diferentes maneras y con la ayuda de muchos medios, cada uno con sus respectivas funciones; uno de ellos, el más usado e inmediato, es la lengua natural. En la actualidad, la computadora y sus respectivos programas se ha convertido en el medio artificial más difundido para el tratamiento de diferentes temas matemáticos que van desde juegos y actividades para la educación matemática elemental hasta teorías y conceptos matemáticos altamente complejos, sobre todo en el campo de las aplicaciones. Esos medios pueden ayudar a los docentes para obtener un mejor desempeño en el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza.

Ocurren en la actualidad cambios importantes en el tratamiento de las matemáticas, éstos se ponen de manifiesto, particularmente, a través de programas diseñados para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Surge entonces una nueva concepción para el trabajo en esta importante área de las matemáticas. Es en geometría donde, probablemente, se ha avanzado más en cuanto a los programas de computo para las matemáticas. Con su ayuda, no solamente se pueden hacer construcciones geométricas muy precisas y altamente sofisticadas, sino desarrollar con mayor facilidad algunas demostraciones de las proposiciones clásicas de la geometría. Tales programas, por su estructura dinámica, contribuyen efectivamente con el deseado aprendizaje motivador e independiente de los estudiantes. De la misma manera, a través de la aplicación de estos programas se podría alcanzar un objetivo, aún muy lejos de la educación matemática, cual es el denominado aprendizaje por descubrimiento.



Hoy en día conocemos programas con una capacidad enorme para resolver analítica y gráficamente la mayor parte de las tareas trabajadas en las clases de matemática desde los primeros grados hasta la educación superior. Lo importante, en cuanto a la aplicación de estos programas en la enseñanza de las matemáticas, es su adecuada y eficiente utilización para la comprensión de los conceptos matemáticos. La idea es utilizar estos programas con la finalidad de visualizar con mayor precisión y comodidad las construcciones matemáticas, no solamente en geometría, comprender con mayor facilidad y motivación algunas fases de la construcción de estructuras matemáticas y demostraciones, implementar estrategias heurísticas en la resolución de problemas y fomentar la independencia y creatividad de los estudiantes.

Uno de los primeros beneficios que se vislumbran con el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples registros de representación dentro de esquemas interactivos, difíciles de lograr con los medios tradicionales, como el lápiz y el papel, en los que se pueden manipular directamente estos objetos y explorarlos.

A pesar de todos los avances tecnológicos que existen en la actualidad el proceso de enseñanza-aprendizaje, en general, en nuestro país, sigue encerrado en un modelo tradicional que muestra al educador como aquel quien normalmente habla y decide todo dentro del aula; por su parte el estudiante organiza y aprende memorísticamente lo que el educador le imparte, aunque el nuevo currículo exige la implementación de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) la mayoría de los docentes continúan aislados de ellas, tal vez sea por falta de formación docente, aunque estas podrían ser simplemente excusas para evadir el uso de dichas tecnologías.



En este orden de ideas es necesario integrar las TIC en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, para ellos existen diferentes tipos de herramientas, entre ellos tenemos a el software educativo GeoGebra 3.2 el cual le ofrece al profesor de matemáticas la oportunidad de crear ambientes de aprendizajes enriquecidos para que los estudiantes perciban las matemáticas como una ciencia experimental y un proceso exploratorio significativo.

Es por ello que esta investigación se enfoca en aprender dicha herramienta tecnológica la cual será implementada para “construir geometría” específicamente la construcción de un conjunto de demostraciones seleccionadas y perfeccionadas del Teorema de Pitágoras.

De tal manera que este trabajo de investigación está conformado por:

Capítulo I: consta del planteamiento del problema, formulación del mismo, objetivos y justificación de la investigación.

Capítulo II: en este se desarrolla el Marco Teórico donde se expone las bases teóricas.

Capítulo III: contiene la metodología a usar para que se pueda llevar a cabo el logro de los objetivos, además se especifica el tipo, diseño y fases de la investigación, cuál es el universo y muestra y, finalmente, la manera de recoger la información (indicando cuales son los instrumentos a utilizar).



Capítulo IV: presenta un breve recorrido histórico del Teorema de Pitágoras. También se mostraran definiciones, lemas y proposiciones requeridos para algunas demostraciones de dicho teorema. Finalmente se presenta un conjunto de demostraciones clásicas seleccionadas del Teorema de Pitágoras, descritas pasó a paso.

Capitulo V: está dedicado a la explicación exhaustiva y minuciosa de cada uno de los procedimientos usados para la construcción con GeoGebra 3.2 del conjunto de demostraciones seleccionadas del Teorema de Pitágoras designadas por el profesor tutor de esta investigación.

Capítulo VI: se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas en la investigación y finalmente se especifican las fuentes bibliográficas consultadas.

## CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA

### 1.1.- Planteamiento del Problema

La sociedad del tercer milenio en la cual vivimos, es una sociedad de cambios acelerados en el campo de la Ciencia y la tecnología es así como los conocimientos, las herramientas y las maneras de hacer y comunicar la matemática evolucionan constantemente; por esta razón, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la Matemática deben estar enfocados en el desarrollo de las destrezas necesarias para que el estudiantado sea capaz de resolver problemas cotidianos, a la vez que se fortalece el pensamiento lógico y creativo.

El saber Matemático, además de ser satisfactorio, es extremadamente necesario para poder interactuar con fluidez y eficacia en un mundo donde la mayoría de las actividades cotidianas requieren de decisiones basadas en esta ciencia, como por ejemplo, escoger la mejor opción de compra de un producto, entender los gráficos de los periódicos, establecer conexiones lógicas de razonamiento o decidir sobre las mejores opciones de inversión, al igual que interpretar el entorno, los objetos cotidianos, obras de arte. La necesidad del conocimiento matemático crece día a día al igual que su aplicación en las más variadas profesiones y las destrezas más demandadas en los lugares de trabajo son el pensamiento Matemático, crítico y la habilidad en la resolución de problemas pues con ello, las personas que entienden y que pueden “hacer” Matemática, tienen mayores oportunidades y opciones para decidir sobre su futuro. El tener afianzadas las destrezas con criterio de desempeño matemático, facilita el acceso a una gran variedad de carreras profesionales y a varias ocupaciones que pueden resultar muy especializadas. No todos los estudiantes, al culminar su educación básica y de bachillerato, adquieren las mismas destrezas y gusto por la matemática, sin embargo, todos deben tener las mismas oportunidades y facilidades para aprender conceptos matemáticos significativos bien entendidos y con la profundidad necesaria para que puedan interactuar equitativamente en su entorno.

El aprender cabalmente matemática y el saber transferir estos conocimientos a los diferentes ámbitos de la vida del estudiantado, además de aportar resultados positivos en el plano personal, genera cambios importantes en la sociedad. Siendo la educación el motor del desarrollo de un país, dentro de ésta, el aprendizaje de la Matemática es uno de los pilares más importantes ya que además de enfocarse en lo cognitivo, desarrolla destrezas importantes que se aplican día a día en todos los entornos, tales como el razonamiento, el pensamiento lógico, el pensamiento crítico, la argumentación fundamentada y la resolución de problemas.

En este sentido se busca la manera de actualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a fin de optimizar la preparación académica en dicha área y así solventar los problemas que se presentan a la hora de aprender y enseñar matemática. Por esta razón, para lograr menguar estas dificultades se deben buscar estrategias que hagan más fácil el mencionado aprendizaje aprovechando las distintas corrientes pedagógicas, principalmente la constructivista, la humanista y la cognitivista, e incorporando el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), como aliados fundamentales para lograr tal propósito. Las TIC, se han convertido en armas muy poderosas, sobretodo en el campo educativo, específicamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, como herramientas de estrategias didácticas.

Con un uso apropiado de la tecnología, los estudiantes pueden aprender más matemáticas y con mayor profundidad (Dunham y Dick, 1994; Sheets, 1993; Rojano, 1996; Groves, 1994); la tecnología no debería utilizarse como sustituto de los conocimientos e intuiciones básicos, sino que puede y debería usarse para potenciarlos. En los programas de enseñanza de las matemáticas, la tecnología debería utilizarse, amplia y responsablemente, con el objetivo de enriquecer el aprendizaje. Por tal motivo los países en desarrollo desde finales del siglo XX, han venido integrando a sus sistemas educativos el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) con la intención de crear en los estudiantes una manera más práctica, estimulante y eficaz de obtener conocimiento.

Actualmente la inclusión de las nuevas tecnologías en los ambientes educativos nos encuentra con una disparidad en la formación de recursos humanos capacitados para su uso, y más aún para repensar los modelos didácticos de su implementación como medio de aprendizaje en las aulas de todos los niveles. Las nuevas competencias que se requieren pasan por un buen manejo de los recursos, el conocimiento del software desarrollado para el efecto, la adecuación a los contenidos curriculares, la relación entre el usuario, el medio (software) y el estudiante, entre otros desafíos.



En Venezuela, el Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE) propicia la formación integral y permanente de los estudiantes a través de espacios educativos dotados de recursos basados en las TIC; uno de estos espacios lo conforman los Centros Bolivarianos de Informática y Telemática (CBIT); de tal manera se pretende que la calidad de la educación en el área de matemáticas en Venezuela evolucione a pasos agigantados, sin embargo para nadie es un secreto que la realidad que vivimos es otra muy diferente; si se compara el aula de clases de matemáticas actual con la de finales del siglo pasado, se ven claras similitudes: los estudiantes sentados en sillas, con papel y lápiz en mano, el profesor en el tablero escribiendo datos importantes; esos mismos estudiantes copiando con afán en sus cuadernos lo que el docente dice, esperando memorizarlo para poder repetirlo en un examen. En pocas palabras aun se imparten las clases de manera conductista.

El año 2000 fue declarado por la Unesco como año mundial de la matemática, con el objetivo de promover entre los especialistas de su enseñanza una profunda reflexión sobre su didáctica, las metodologías utilizadas, los materiales y medios didácticos empleados y la adecuación de los contenidos a la sociedad tecnológica de la información, de la comunicación y del conocimiento.

La Unesco publicó un documento titulado: “Formación docente y las tecnologías de información y comunicación. Estudios de casos en Bolivia, Chile, Colombia, Ecuador, México, Panamá, Paraguay y Perú” (agosto de 2005). En su presentación remarca algunas ideas para reflexionar:



- “Un docente que no maneje las tecnologías de información y comunicación está en clara desventaja con relación a los alumnos. La tecnología avanza en la vida cotidiana más rápido que en las escuelas, inclusive en zonas alejadas y pobres con servicios básicos deficitarios. Desafortunadamente, la sociedad moderna no ha sido capaz de imprimir el mismo ritmo a los cambios que ocurren en la educación”
- “Si bien todavía un importante número de escuelas no posee computadoras, proyector de imágenes o acceso a internet, esto no necesariamente quiere decir que los estudiantes no estén siendo usuarios de juegos de video, aparatos de audio, internet, telefonía celular, etc. En el campo de las tecnologías los estudiantes, de todas maneras, las aprenden y utilizan en otros contextos”

En este orden de ideas, gran parte del mundo ha cambiado debido a los avances científicos y tecnológicos, aunque la educación en el área de matemáticas y sobre todo la forma en que los estudiantes aprenden y los profesores enseñan en nuestro país se sigue llevando de manera tradicional; destacando la ideas pedagógicas de uno de los mayores y más significativos pedagogos del siglo XX como es Paulo Freire, el cual señala que: “en la concepción bancaria, el sujeto de la educación es el educador el cual conduce al educando en la memorización mecánica de los contenidos. Los educandos son así una especie de «recipientes» en los que se «deposita» el saber. El único margen de acción posible para los estudiantes es el de archivar los conocimientos, convertidos en objetos del proceso, padeciendo pasivamente la acción del educador” por lo tanto en nuestro país seguimos una educación bancaria a la hora de aprender y enseñar matemáticas en pocas palabras el docente mantiene practicas arcaicas logrando con ello que los alumnos se transformen en meros receptores, y por ende incapaces de crear sus propios aprendizajes. Todo esto se debe en parte a que la mayoría de los docentes no están familiarizados con el gran numero de herramientas tecnológicas que se tiene a disposición y evidentemente estos recursos tecnológicos no funcionan por si solos, lo que hace que los docentes de hoy en día mantengan una postura tradicional a la hora de impartir sus clases y el nuevo proyecto educativo enmarcado en las TIC simplemente se encuentre aun paralizado; por todo lo mencionado se necesita con carácter de urgencia que los educadores manejen las partes básicas de tales herramientas de una manera natural, es decir sea cual sea el nivel de integración de las TIC en los centros educativos, el profesor principalmente amerita también de una “alfabetización digital” y una actualización didáctica que le ayude a conocer, dominar e integrar los instrumentos tecnológicos y los nuevos elementos culturales en su práctica docente, para que así se pueda lograr una formación académica moderna e innovadora, que permitan motivar al alumno frente a las matemáticas.

La Universidad de los Andes, específicamente el Núcleo Universitario “Rafael Rangel” (NURR), no se ve identificado con el uso de las nuevas tecnologías, pues tampoco escapa a la realidad que se ha venido mencionando; enfocándonos en los estudiantes de Educación mención

Física y Matemáticas, por ejemplo, a lo largo de la carrera no han tenido un contacto profundo con dichas herramientas, lo más cercano es la materia “Introducción a la informática” cuyo programa apenas se refiere a aspectos básicos del uso de la computadora como máximo, y algunos programas elementales para el procesamiento de texto e imágenes. Por lo tanto no ha tenido una preparación docente para darle un buen uso a las mismas en su futuro desempeño profesional; de tal manera que si no se le menciona el tema a lo largo de la carrera, ¿cómo puede un egresado usar los CEBIT o cualquier otra herramienta tecnológica para impartir sus clases?

En consecuencia, a pesar que distintos planteles en Venezuela gocen de espacios educativos orientados a promover la utilización de las TIC en el área de la matemática, como son los CEBIT se está aún lejos de alcanzar los resultados esperados debido a que no se cuenta con una adecuada formación docente con respecto a la aplicación de las TIC.



No obstante, existen algunas maneras de enfrentar esta problemática, una de ellas consistiría en implementar herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En particular, GeoGebra 3.2. , el cual no es más que un software matemático interactivo para usarse en la educación en colegios y universidades, que es libre y de fácil manipulación. No se necesitan muchos conocimientos previos de informática para utilizarlo, de hecho se puede aprender a manipularlo en un corto periodo de tiempo.

En consecuencia, sí podemos usar las TIC para mejorar y actualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, por que no comenzar utilizando GeoGebra 3.2 como herramienta tecnológica para aprender y enseñar Geometría, y de esta manera lograr que el estudiante adquiera la capacidad de hacer análisis geométricos en diferentes áreas del conocimiento. Para ello podemos por ejemplo enfocarnos en el estudio a través de GeoGebra 3.2 del teorema más importante de la geometría, el teorema de Pitágoras.

Ahora bien ya que hemos elegido el Teorema de Pitágoras para mostrar la eficiencia y eficacia de GeoGebra 3.2 como herramienta TIC para actualizar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, es importante resaltar que dicho teorema es la relación matemática que ocupa el primer lugar en el recuerdo de los tiempos escolares. Es, sin duda alguna, la relación más importante, conocida, útil y popular en casi todas las civilizaciones; la que más nombres, atención, curiosidad y pruebas ha recibido a lo largo de los siglos. También, es uno de los datos históricos más importantes de la geometría, por tal razón su estudio debe comenzar principalmente con un cierto conocimiento de su historia ya que la historia debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada.



Por lo anteriormente expuesto es conveniente puntualizar las siguientes interrogantes: ¿por qué sería importante el estudio de GeoGebra 3.2 para ser aplicado como TIC en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática en especial de la geometría?, ¿qué beneficios aportaría la implementación de GeoGebra 3.2 en el proceso enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras? ¿En qué forma se podría incluir dentro del plan de estudios de la carrera de educación mención física y matemáticas, la formación en cuanto al uso de las TIC? En general, ¿Qué posibilidad habría de que cualquier “estudiante promedio” y egresado de la carrera de Educación mención Física y Matemática de la ULA-NURR pueda adquirir en corto periodo de tiempo los conocimientos básicos del software educativo GeoGebra 3.2 para ser aplicado como una TIC en la enseñanza del Teorema de Pitágoras?.

## 1.2 Objetivos de la Investigación

### 1.2.1.- Objetivo General

Demostrar que el “estudiante promedio” y/o egresado de la carrera de Educación mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de los Andes del Estado Trujillo (NURR-ULA), pueden obtener la habilidad necesaria para dominar en un corto periodo de tiempo y por si solos el software educativo GeoGebra 3.2, el cual puede ser empleado como TIC para la enseñanza del Teorema de Pitágoras.

### 1.2.2.- Objetivos Específicos:

- Realizar un estudio Teórico-Práctico detallado del Teorema de Pitágoras, desde sus orígenes hasta la actualidad.
- Seleccionar un conjunto de demostraciones del Teorema de Pitágoras.
- Perfeccionar dicho conjunto de demostraciones seleccionadas del teorema de Pitágoras.
- Conocer algunos comandos del software educativo GeoGebra 3.2 necesarios para construir geometría.
- Aplicar GeoGebra 3.2 en la construcción de las demostraciones seleccionadas del Teorema de Pitágoras.

## 1.3 Justificación

El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática ha sufrido notables transformaciones en las últimas décadas, lo que por un lado ha permitido evolucionar desde modelos educativos centrados en la enseñanza de la matemática, hacia modelos dirigidos al aprendizaje de la matemática, mientras que por el otro ha llevado al cambio en los perfiles de maestros y alumnos; en este sentido, los nuevos modelos educativos demandan que los docentes transformen su rol de expositores del conocimiento al de facilitadores del aprendizaje, y los estudiantes, de espectadores del proceso de enseñanza, al de integrantes participativos y críticos en la construcción de su propio conocimiento matemáticos, es allí donde las TIC permiten romper los escenarios formativos clásicos proporcionando una mayor libertad de estudio y desarrollo de actividades de aprendizaje.

En Venezuela, las matemáticas, enfocándonos en el área de la geometría, específicamente el Teorema de Pitágoras, se sigue enseñando con métodos tradicionales; aun cuando en la mayoría de los liceos del país se cuenta con CBIT, estos, en general no son usados por los profesores para impartir su clases de matemáticas, debido a que no cuentan con una formación adecuada en cuanto al uso de la aplicación TIC en el área de la matemática. El éxito de cualquier innovación en el ámbito educativo depende en gran medida de la actuación docente. Por ello la integración y la utilización de las nuevas tecnologías en la educación, requieren fundamentalmente una óptima formación docente.



Es importante acotar que de nada sirve introducir medios informáticos en las escuelas sin docentes capacitados para utilizarlos en el marco de un proyecto definido. De poco sirven las computadoras en el aula si son usadas solamente como pizarrones, cuadernos y manuales electrónicos. Por esta razón en UNESCO (2004) se señala que:

“Instalar buenos computadores y conexiones a internet en las aulas no es suficiente. También se deben utilizar la forma apropiada. Esto significa que las Instituciones Educativas deberán contar con docentes capacitados para el uso de las TIC. Las tecnologías de información y comunicación solo tendrán una utilidad marginal si se les usa simplemente para producir versiones electrónicas de libros que ya existen o para poner lecciones escolares “en línea” (p.7).”

En este sentido, para lograr que los docentes logren cumplir con el rol antes expuesto, el sector universitario debe considerar las TIC dentro de sus currículos de enseñanza para así lograr cumplir con las exigencias del contexto actual. Por tal motivo se debe promover la formación de los docentes en este campo, a fin de que cuenten con elementos teóricos-prácticos que le permitan evaluar la utilidad de la tecnología en determinados entornos educativos para el desarrollo de las competencias (es decir, conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes) de los estudiantes.

Con la presente investigación se pretende demostrar que en un corto periodo de tiempo se pueden adquirir conocimientos básicos del software educativo GeoGebra 3.2, con el fin de ser aplicado como una TIC en las Instituciones Educativas que cuenten con los CEBIT, como una estrategia de enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente del teorema de Pitágoras, y así lograr que los estudiantes y egresados de la carrera, se orienten acerca de las nuevas formas de enseñanza y las herramientas que se encuentran a su disposición en la actualidad.



Es necesario que tanto profesores como estudiantes dispongan de herramientas alternativas que ayuden en la enseñanza de la matemática y en nuestro caso, en la enseñanza de la geometría, específicamente la enseñanza del teorema de Pitágoras. Como ya se ha dicho, los métodos y formas de trabajo habituales y las herramientas que actualmente usa el docente, no son suficientes para lograr que los alumnos se apropien del conocimiento de una manera significativa, se requiere de la utilización de nuevas formas de enseñanza. Es por esta razón que se presenta el software GeoGebra 3.2 como una herramienta didáctica, ya que puede ser utilizado por los docentes y estudiantes de las instituciones de educación secundaria, diversificada y superior. Este software favorece el desarrollo de capacidades para la gestión de la información y el conocimiento, permite que los alumnos pueda visualizar, explicar y formalizar el comportamiento grafico y analítico de temas relacionados con la geometría aunque también puede ser utilizado en otras ramas de la matemática.

Nos hemos enfocado en el estudio del teorema más famoso de la geometría, el teorema de Pitágoras debido a que el software educativo GeoGebra 3.2 nos brinda múltiples herramientas geométricas con las cuales se logran realizar construcciones tales como: puntos, vectores, segmentos, rectas, polígonos, secciones cónicas, funciones, que a posteriori se pueden modificar dinámicamente. Así como también permite disfrutar de las aplicaciones con animaciones y la posibilidad de manipulación de los objetos geométricos a través de cualquier navegador de internet mediante applets interactivos (es un componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo un navegador web). También se pueden trasladar y rotar objetos, insertar texto tanto dinámico como estático y se puede visualizar paralelamente el comportamiento algebraico de tales construcciones, esta ultima característica le da su nombre **GeoGebra** (**Geo**metría + Al**gebra**), por lo tanto GeoGebra 3.2 en todo su esplendor permite elaborar representaciones dinámica de las distintas demostraciones del Teorema de Pitágoras lo cual conllevara a que el estudiante comprenda de una manera significativa cada uno de los conceptos matemáticos que encierra tan importante teorema. De esta manera se podría comenzara a optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Ausubel (1987) se refiere a la clasificación de los tipos de aprendizaje, por repetición, por recepción, por descubrimiento guiado y por descubrimiento autónomo, los que no son excluyentes ni dicotómicos. Y cualquiera de ellos puede llegar a ser significativo.

Por medio de esta investigación estamos promoviendo el aprendizaje por descubrimiento autónomo por parte de los estudiantes y egresados de la carrera Educación Mención Física y Matemática, todo ello conllevará a que los estudiantes de bachillerato experimenten un aprendizaje por descubrimiento guiado. Y de esta manera obtengan un aprendizaje significativo en el área de la matemática.

Por tal motivo, se necesita con carácter de urgencia promover y difundir en los diferentes niveles del sistema educativo la inserción de las TIC en educación para el logro de aprendizajes significativos, fomentando la necesidad de un cambio en las metodologías tradicionales de enseñanza de la matemática, lo cual permite divulgar la enseñanza personalizada en el proceso de aprendizaje e impulsar la creación de programas que faciliten la presentación del contenido de las más diversa formas.

# CAPÍTULO II

# MARCO TEORICO DE LA INVESTIGACION

Una vez planteado el problema de estudio, el siguiente paso es sustentar teóricamente el estudio, etapa que algunos autores llaman elaborar el marco teórico. Ello implica analizar y exponer las teorías, los enfoques teóricos, las investigaciones y los antecedentes en general, que se consideren validos para el correcto encuadre del estudio (Rojas, 2001).

## 2.1.- Antecedentes de la Investigación:

Hernández. A y Mamo J. (2010) en su trabajo especial de grado titulado: **El Lenguaje de Programación Logo, una Alternativa Tecnológica para construir Geometría. Universidad de Los Andes, Núcleo Universitario Rafael Rangel. Venezuela.** Señalan que "las instituciones de formación superior donde se prepara al docente de los diferentes niveles del sistema educativo, deben revisar sus referentes actuales y promover experiencias innovadoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje apoyados en las TIC" ; ahora bien, el campo de la matemática es aquel que presenta mayor dificultad en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para enfrentar las diferentes problemáticas las autoras antes mencionadas sugieren "implementar el uso de programas de computación que sirvan como herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática específicamente el lenguaje de programación LOGO".

Hernández F y Sánchez J. (2010) en su trabajo de grado titulado: **GEOGEBRA, Una propuesta para su Autoaprendizaje y Utilización como Herramienta Tecnológica, por parte de Estudiantes de Educación Mención: Física y Matemáticas del Núcleo Universitario "Rafael Rangel". ULA-NURR Venezuela.** Acotan: "el uso de las nuevas tecnologías se ha incorporado a la sociedad, presentándose como un desafío para nuestro sistema educativo, el cual tiene que enfrentar esta realidad. No se trata de incorporar la tecnología para apoyar la enseñanza tradicional, más bien se trata de implementar nuevas estrategias metodológicas que permita compartir el protagonismo entre el docente, alumno y contenido". Así como también sugieren que: "es necesario que tanto estudiantes como profesores dispongan de herramientas alternativas que ayuden en la enseñanza de las matemáticas, y en nuestro caso en la enseñanza de la geometría, los métodos y formas de trabajo habituales y las herramientas que actualmente usa el docente, no son lo suficientemente consistentes para lograr que los alumnos se apropien del conocimiento de manera significativa".



Bencomo M, (2011) en su trabajo de grado titulado: **Construcción de Teselados *Escherianos* implementando GeoGebra 3.2. Universidad de Los Andes, Núcleo Universitario Rafael Rangel. Venezuela.** Promueve el uso de las cualidades innovadoras que nos brinda GeoGebra 3.2 para ser usado como TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática específicamente de la geometría, enfocándose en la construcción de los hermosos teselados *Escherianos.*

## 2.2.- Tecnología de Información y Comunicación (TIC)

Las TIC se refieren al conjunto de avances tecnológicos que nos proporciona la informática, las telecomunicaciones y las tecnologías audiovisuales, que comprenden los desarrollos relacionados con los ordenadores, Internet, la telefonía, las aplicaciones multimedia y la realidad virtual. Estas tecnologías básicamente nos proporcionan información, herramientas para su proceso y canales de comunicación.

Este concepto tienes sus orígenes en las llamadas Tecnologías de la información (Información Technologie o IT), concepto que aparece a finales de los años 70, el cual alcanza su apogeo en la década de los 80 y adelanta el proceso de convergencia tecnológica de los tres ámbitos, la electrónica, la informática, y las telecomunicaciones en las TIC, hecho que se produce en la década de los 90. La asociación de estas tres tecnologías da lugar a una concepción del proceso de la información, en el que las comunicaciones abren nuevos horizontes y paradigmas.



Los soportes tecnológicos han evolucionado en el trascurso del tiempo lo que permite que en esta nueva era podamos hablar de computadoras y del internet. Es por ello que el uso de las TIC representa una variación notable en la sociedad y a la larga suscitará un cambio en la educación, por tal razón los sistemas educativos en todo el mundo se enfrentan al desafío de utilizar las tecnologías de la información y la comunicación para proveer a sus alumnos con las herramientas y conocimientos necesarios que se requieren. En 1998, el Informe Mundial sobre la Educación de la UNESCO, *Los docentes y la enseñanza en un mundo en mutación,* describió el impacto de las TIC en los métodos convencionales de enseñanza y de aprendizaje, augurando también la transformación del proceso de enseñanza-aprendizaje y la forma en que docentes y alumnos acceden al conocimiento y la información.

Al respecto, en UNESCO (2004) se señala que en el área educativa, los objetivos estratégicos apuntan a mejorar la calidad de la educación por medio de la diversificación de contenidos y métodos, promover la experimentación, la innovación, la difusión y el uso compartido de información y de buenas prácticas, la formación de comunidades de aprendizaje y estimular un diálogo fluido sobre las políticas a seguir. Con la llegada de las tecnologías, el énfasis de la profesión docente está cambiando desde un enfoque centrado en el profesor que se apoya en prácticas alrededor del pizarrón y el discurso, fundamentado en clases magistrales, hacia una formación centrada principalmente en el alumno dentro de un entorno interactivo de aprendizaje.

De igual manera opinan por ejemplo, Palomo, Ruiz y Sánchez (2006) quienes indican que las TIC ofrecen la posibilidad de interacción que pasa de una actitud pasiva por parte del alumnado a una actividad constante, a una búsqueda y replanteamiento continúo de contenidos y procedimientos. Aumentan la implicación del alumnado en sus tareas y desarrollan su iniciativa, ya que se ven obligados constantemente a tomar "pequeñas" decisiones, a filtrar información, a escoger y seleccionar.



El diseño e implementación de programas de capacitación docente que utilicen las TIC efectivamente son un elemento clave para lograr reformas educativas profundas y de amplio alcance. Las instituciones de formación docente deberán optar entre asumir un papel de liderazgo en la transformación de la educación, o bien quedar atrás en el continuo cambio tecnológico. Para que en la educación se puedan explotar los beneficios de las TIC en el proceso de aprendizaje, es esencial que tanto los futuros docentes como los docentes en actividad sepan utilizar estas herramientas.

Por tal motivo, en el sistema educativo se ha tratado de introducir exhaustivamente los avances tecnológicos, y aun así estos no han modificado en su totalidad dichos sistemas, Cabrero(2001), lo reseña diciendo “En nuestro medio las TIC no se han difundido masivamente dentro de los docentes, por lo tanto no las usan y mantienen una actitud ecléctica”, sin embargo se están dando pasos importantes para dirigirse hacia allá, tal como lo menciona García(2001) “…las universidades, las escuelas, los docentes, investigadores y asesores pedagógicos están preocupados por comprender cuál es el papel, las implicaciones y las responsabilidades que se debe asumir ante el reto de incorporar las nuevas tecnologías en ambientes educativos”. Pero es alarmante y preocupante que estos cambios, todavía no se ven en nuestras universidades, o por lo menos no en el NURR, ya que no hay siquiera una cátedra dedicada a tratar el tema de las TIC en la educación y los profesores en las aulas de clase no hacen, en general, mención alguna del tema, salvo una que otra excepción y, donde peor aún, algunos profesores usan estas tecnologías de manera deficiente refutando así el enfoque de tales tecnologías y haciendo que sus clases puedan catalogarse como deprimentes y aburridas. Estos profesores son una muestra de la falta de conocimiento que hay sobre las TIC.



Luego, para poder lograr un serio avance se debe capacitar y actualizar al personal docente, además de equipar los espacios educativos con aparatos y auxiliares tecnológicos, como son televisores, cámaras de video, computadoras y conexión a la Red. La adecuación de profesores, alumnos, padres de familia y de la sociedad en general a este fenómeno, implica un esfuerzo y un rompimiento de estructuras para adaptarse a una nueva forma de vida; así, la escuela se podría dedicar fundamentalmente a formar de manera integral a los individuos, mediante prácticas escolares acordes al desarrollo humano.

En este orden de ideas, Palomo y otros (2006) sostienen que las TIC se están convirtiendo poco a poco en un instrumento cada vez más indispensable en los centros educativos. Asimismo estos autores señalan que estos recursos abren nuevas posibilidades para la docencia como por ejemplo el acceso inmediato a nuevas fuentes de información y recursos (en el caso de Internet se puede utilizar buscadores), de igual manera el acceso a nuevos canales de comunicación (correo electrónico, Chat, foros...) que permiten intercambiar trabajos, ideas, información diversa.

De igual manera tienen una serie de ventajas evidentes para el alumnado tales como: la posibilidad de interacción que ofrecen, por lo que se pasa de una actitud pasiva por parte del alumnado a una actividad constante, a una búsqueda y replanteamiento continuo de contenidos y procedimientos, también aumentan la implicación del alumnado en sus tareas y desarrollan su iniciativa, ya que se ven obligados constantemente a tomar "pequeñas" decisiones, a filtrar información, a escoge, seleccionar.



Es importante destacar que el uso de las TIC favorecen el trabajo colaborativo con los iguales, el trabajo en grupo, no solamente por el hecho de tener que compartir ordenador con un compañero(a), sino por la necesidad de contar con los demás en la consecución exitosa de las tareas encomendadas por el profesorado. La experiencia demuestra día a día que los medios informáticos de que se dispone en las aulas favorecen actitudes como ayudar a los compañeros, intercambiar información relevante encontrada en Internet, resolver problemas a los que los tienen. Estimula a los componentes de los grupos a intercambiar ideas, a discutir y decidir en común, a razonar el por qué de tal opinión.

Aunque el usar las TIC no es garantía absoluta de que se tenga un proceso de enseñanza-aprendizaje de calidad, si se puede afirmar que el buen uso de las mismas podría ayudar a encontrar un mejor nivel educativo.

Las TIC no fueron creadas con la idea de reemplazar a los profesores como muchos piensan, su objetivo dentro de la educación, no es el que un computador “imparta” las clases, que conecte a los estudiantes al internet, o que provea de acceso a las herramientas de la informática; según Huidobro, J. (2009): el objetivo de las TIC es potenciar a los actores del proceso educativo y hacerlos más creativos, comunicativos, mejor preparados y capaces como individuos. Esto incluye tanto a estudiantes y profesores como al resto de los actores involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desde el punto de vista exclusivo de la educación, los objetivos de la aplicación de la tecnología deben concentrarse alrededor de los siguientes puntos:

- Educar mejor, una especie de reforma tecnológica donde los alumnos usen las TIC para adquirir un aprendizaje significativo y que además puedan usar las nuevas tecnologías en cualquier ambiente o circunstancia que se les presente en su cotidianidad.
- Preparar a estudiantes, profesores e instituciones a nuevas tecnologías competitivas.
- Administrar eficientemente las instituciones educativas y el proceso educativo.



**2.3.- Las TIC en el Sistema Educativo Bolivariano**

La Educación Bolivariana en Venezuela promueve el carácter social de las TIC, por lo cual, la propuesta para el Currículo de Formación Ciudadana de la Republica Bolivariana de Venezuela, establece que su papel en la práctica pedagógica se concibe como un eje integrador de los aprendizajes, lo que implica que el uso de estos recursos deben estar presentes en todos los subsistemas y en todas las áreas de aprendizaje, como elemento de organización e integración de saberes y orientación de las experiencias de aprendizajes, las cuales deben estar considerados en todos los procesos educativos para fomentar los valores , actitudes y virtudes.

Por ello, la incorporación de las TIC en los ambientes educativos, deberá contribuir al desarrollo de potencialidades a razón de aprender a crear, aprender a convivir y participar, aprender a reflexionar y aprender a valorar, elementos definidos como intencionalidades de la Educación Bolivariana, es decir, la interacción de los y las estudiantes con recursos tecnológicos deberá estar determinado por la disertación y reflexión sobre los contenidos tratados, la creación de situaciones novedosas, y la búsqueda del bienestar de su entorno socio cultural.

## 2.4.- El Centro Educativo Bolivariano de Informática y Telemática (CEBIT)



Uno de los proyectos que ha desarrollado la Fundación Bolivariana de Informática y Telemática (FUNDABIT) es el de los CEBIT que según el Ministerio del Poder Popular para la Educación (2005), "son espacios educativos de servicio gratuito, dotados con recursos tecnológicos orientados a promover la utilización de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), por parte de los estudiantes, docente y comunidad en general".

### 2.4.1.- Objetivos del CEBIT

- Formar y motivar al docente en el uso didáctico de las TIC, como apoyo al desarrollo de proyectos educativos.
- Concienciar al docente de su rol de mediador y orientador en el uso de las TIC, en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

- Apoyar al docente en la incorporación de los medios tecnológicos en el Currículo Nacional, considerando los contextos educativos local, regional, nacional y latinoamericano.
- Seguir, controlar y evaluar el uso educativo de las TIC en los ambientes educativos.
- Propiciar en los estudiantes una formación integral y holística, a través de las TIC, atendiendo las capacidades intelectuales, motrices y afectivas necesarias para la construcción del perfil de ciudadano que el país requiere para su desarrollo político, económico y social.
- Apoyar a las escuelas en la incorporación de las TIC en sus procesos de gestión educativa.
- Orientar el trabajo coordinado entre la escuela, la comunidad y los centros informáticos, a fin de lograr un ambiente didáctico y propicio para el uso de las TIC como instrumento generadores de cambio.
- Apoyar la conformación de la Red Nacional de Actualización Docente mediante el uso Educativo de la Informática y la Telemática (RENADIT), con el fin de desarrollar planes de formación permanente y continua a docentes, con la participación de instituciones de educación superior, autoridades regionales y locales, y comunidades organizadas.
- Orientar a los educadores en la selección y uso de contenidos que, a través de las TIC, posean valor informativo, comunicativo, motivador y humanístico.
- Organizar y apoyar eventos educativos locales, regionales, nacionales e internacionales mediante el uso de las TIC.
- Velar por la incorporación equitativa y justa de las TIC en las Localidades.

### 2.4.2.- Componentes de un CEBIT:

- **Aula de Computación**

Es un espacio dotado de equipos de computación, interconectados y con acceso a internet, donde el usuario interactúa con la tecnología a través de actividades pedagógicas que desarrollan habilidades de búsqueda, selección y sistematización de la información, construcción del conocimiento y socialización.

- **Aula Interactiva**

Es una sala donde el usuario participa en discusiones de temas de interés y reconoce su papel protagónico en la sociedad, a través de actividades pedagógicas con énfasis en el desarrollo del lenguaje, el pensamiento, los valores, el trabajo y el respeto al ambiente.



En resumen se puede decir que las TIC, como un eje integrador, representan un nuevo reto en la práctica docente dentro del Sistema Educativo Bolivariano.

## 2.5.- Enfoques Constructivistas

El constructivismo "es una postura psicológica filosófica que argumenta que los individuos forman o construyen gran parte de lo que aprenden, además destaca las relaciones entre los individuos y las situaciones en la adquisición y el perfeccionamiento de las habilidades y los conocimientos" Zubiria (2004).

El constructivismo no es una concepción educativa original sino la agrupación de diversas corrientes psicológicas asociadas genéricamente a la psicología cognitiva: el enfoque psicogenético piagetiano, la teoría de los esquemas cognitivos, la psicología sociocultural Vigotskiana, así como algunas teorías instruccionales entre otras. En el constructivismo el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano.

En el ámbito educativo, el enfoque constructivista se sustenta en la idea de que la finalidad de la educación es promover los procesos de crecimiento personal del alumno en el marco de la cultura del grupo al que pertenece; además rechaza la concepción del alumno como un mero receptor o productor de los saberes culturales así como también de que el desarrollo es la simple acumulación del aprendizaje especifico.

**Según Coll (citado por Díaz y Hernández 2003) el enfoque constructivista se organiza en torno a tres ideas fundamentales:**

a. El alumno es el responsable último de propio proceso de aprendizaje: él es quien construye los saberes de su grupo cultural, y puede ser un sujeto activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, incluso cuando lee o escucha la exposición de los otros.
b. La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un grado considerable de elaboración: esto quiere decir que el alumno no tiene en todo momento que descubrir o inventar en un sentido literal todo el conocimiento escolar. Debido a que el conocimiento que se enseña en las instituciones escolares es en realidad el resultado de un proceso de construcción a nivel social, los alumnos y profesores lo encontraran ya elaborado y definido en buena parte de los contenidos curriculares, por lo tanto construyen o reconstruyen objetos de conocimiento que ya han sido elaborados. Por ejemplo los alumnos construyen las operaciones aritméticas básicas, pero estas ya están definidas.

c. La función del docente es introducir los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado: esto implica que la función del profesor no se limita a crear condiciones optimas para que el alumno despliegue una actitud mental constructiva sino que debe orientar y guiar explicita y deliberadamente dicha actividad.

Dentro de este orden de ideas, Castro (2004) define el enfoque constructivista para la enseñanza de la matemática como un proceso mediante el cual el docente organiza, prepara y promueve actividades de aprendizaje por medio de situaciones problemáticas relacionadas con el contexto social del alumno y el ambiente que lo rodea, que involucran conocimientos previos al nuevo contenido matemático a enseñar, que estén ya adquiridos por ellos.

En consecuencia este enfoque implica un cambio en los roles de alumnos y docentes, donde el rol del profesor dejara de ser únicamente el de trasmisor de conocimiento para convertirse en una facilitador y orientador de conocimiento y en un participante del proceso de aprendizaje junto con el estudiante. Este nuevo rol no disminuye la importancia del docente, pero requiere de nuevos conocimientos y habilidades. Los alumnos serán más responsables de su propio aprendizaje en la medida en que busquen, encuentren, sinteticen y compartan su conocimiento con otros compañeros. Las TIC constituyen una herramienta poderosa para apoyar este cambio y para facilitar el surgimiento de nuevos roles de docentes y alumnos.

También es importante resaltar las ideas Constructivista de Jean Piaget; donde afirma que las personas construyen el conocimiento, es decir, construyen un sólido sistema de creencias, a partir de su interacción con el mundo. Por esta razón, llamo a su teoría Constructivismo. El objetivo de Piaget fue entender como los niños construyen el conocimiento. El diseñó muchas tareas y preguntas ingeniosas que pudiesen revelar el tipo de estructura de pensamiento que los niños construyen en diferentes edades.

El paso de un conocimiento inferior a otro superior se produce gracias a la acción. Por ello la influencia es la elaboración de estructuras cognoscitivas, lo adquirido se conserva pero al mismo tiempo se modifica lo suficiente para ser integrado en un nivel mas superior y complejo que abre nuevas posibilidades.

**Por otra parte, Piaget apunta que los tres mecanismos que utilizamos los seres humanos para aprender son:**

- Asimilación, que consiste en adecuar una nueva experiencia en una estructura mental ya existente.
- Acomodamiento, que tiene lugar cuando se revisa un esquema preexistente a causa de una nueva experiencia.
- Equilibrio, que busca la estabilidad cognitiva entre la asimilación y el acomodamiento.



En opinión de Piaget, el rol más importante del formador es crear un ambiente en el cual los que aprenden puedan experimentar la teoría que fundamenta cualquier práctica. Además, es conveniente que tengan la libertad para aprender y para construir conceptos, proceso y principios a su propio ritmo.

El aprendizaje es un proceso activo en el cual se cometerán errores y se buscaran soluciones. Los errores juegan un papel importante en la asimilación y acomodación así como el equilibrio posterior. Este proceso se debe desarrollar indefinidamente.

La evolución intelectual es un proceso constante en el que se busca el equilibrio entre asimilación y la acomodación, mientras que el aprendizaje es el futuro de un proceso constructivo que posibilita al individuo a actuar empleando lo aprendido en situaciones diferentes.

**2.6.- Teoría del Aprendizaje Significativo**

Es una teoría psicológica del aprendizaje en el aula. Ausubel (1973, 1976, 2002) ha construido un marco teórico que pretende dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la adquisición y la retención de los grandes cuerpos de significado que se manejan en la escuela.

Es una teoría psicológica porque se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden, en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación (Ausubel, 1976).



Es una teoría de aprendizaje porque ésa es su finalidad. La Teoría del Aprendizaje Significativo aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo.

Pozo (1989) considera la Teoría del Aprendizaje Significativo como una teoría cognitiva de reestructuración; para él, se trata de una teoría psicológica que se construye desde un enfoque organicista del individuo y que se centra en el aprendizaje generado en un contexto escolar. Se trata de una teoría constructivista, ya que es el propio individuo-organismo el que genera y construye su aprendizaje

El origen de la Teoría del Aprendizaje Significativo está en el interés que tiene Ausubel por conocer y explicar las condiciones y propiedades del aprendizaje, que se puede relacionar con formas efectivas y eficaces de provocar de manera deliberada cambios cognitivos estables, susceptibles de dotar de significado individual y social (Ausubel, 1976). Dado que lo que quiere conseguir es que los aprendizajes que se producen en la escuela sean significativos, Ausubel entiende que una teoría del aprendizaje escolar que sea realista y científicamente viable debe ocuparse del carácter complejo y significativo que tiene el aprendizaje verbal y simbólico. Así mismo, y con objeto de lograr esa significatividad, debe prestar atención a todos y cada uno de los elementos y factores que le afectan, que pueden ser manipulados para tal fin.



Desde este enfoque, la investigación es, pues, compleja. Se trata de una indagación que se corresponde con la psicología educativa como ciencia aplicada. El objeto de la misma es destacar “los principios que gobiernan la naturaleza y las condiciones del aprendizaje escolar”, lo que requiere procedimientos de investigación y protocolos que atiendan tanto a los tipos de aprendizaje que se producen en el aula, como a las características y rasgos psicológicos que el estudiante pone en juego cuando aprende. De igual modo, es relevante para la investigación el estudio mismo de la materia objeto de enseñanza, así como la organización de su contenido, ya que resulta una variable del proceso de aprendizaje.

En pocas palabras, el aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje (Ausubel, 1976, 2002; Moreira, 1997). La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo (Moreira, 2000). Pero no se trata de una simple unión, sino que en este proceso los nuevos contenidos adquieren significado para el sujeto produciéndose una transformación de los subsumidores de su estructura cognitiva, que resultan así progresivamente más diferenciados, elaborados y estables.

En este orden de ideas Ausubel (1983) destaca a la motivación como absolutamente necesaria para un aprendizaje sostenido y aquella motivación intrínseca es vital para el aprendizaje significativo, el cual proporciona automáticamente su propia recompensa.



Es así como Coll (1988) profundiza en este concepto de aprendizaje significativo y valora que la polisemia del concepto, la diversidad de significaciones que fue acumulando, explica en gran parte su atractivo y su utilización generalizada, lo que obliga, al mismo tiempo, a mantener una prudente reserva sobre él. No obstante, considera que el concepto de aprendizaje significativo posee un gran valor heurístico y encierra una enorme potencialidad como instrumento de análisis, de ponderación y de intervención psicopedagógica.

Por otro lado Bruner (1960, 1966) enfatiza en el valor del aprendizaje por descubrimiento adentro de su modelo cognoscitivo-computacional, para producir el fin último de la instrucción: la transferencia del conocimiento.

Los contenidos de la enseñanza tienen que ser recibidos por los alumnos como un conjunto de necesidades, problemas, de relaciones, la existencia de lagunas, que le muestren lo importante del aprendizaje que deben realizar.

Como el objetivo final del aprendizaje es el descubrimiento, la única vía para lograrlo es través de la ejercitación en la solución de tareas y el esfuerzo por descubrir (carácter activo), cuanto más se practica, más se generaliza. La información debe ser organizada en determinados conceptos y categorías, para evitar un aprendizaje pasivo y de memoria, por eso es necesario aprender a aprender.

Este enfoque expone la existencia de estilos cognoscitivos, las diferencias cognoscitivas individuales, asociadas con varias dimensiones no cognoscitivas de la personalidad (M. Carreteiro y J. Palácios, 1982), o sea, estructuras estables del yo, que sirven para coordinar las intenciones y deseos del sujeto a las demandas de la situación, por eso poseen una doble dimensión cognoscitiva y personológica.



Al valorar críticamente el enfoque cognitivista en general se puede destacar que:

- Incorpora elementos y conceptos valiosos de otras teorías anteriores que fueron aportadas por científicos indiscutibles.
- Posee una sólida base investigadora que propicia la realización de múltiples trabajos científicos de corte experimental, con la creación y desarrollo del análisis de tareas, las cuales colocan a las personas en situaciones análogas a las cotidianas en la resolución de diferentes problemas, con sus consiguientes resultados en función de enriquecer la teoría con carácter interdisciplinario, como por ejemplo, las contribuciones a la metacognición en el aprendizaje.

- El análisis cognoscitivo de tareas tiene muchas potencialidades de aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a través de las llamadas tareas docentes o tareas pedagógicas en el campo didáctico porque constituyen su basamento psicológico.
- Como todo enfoque científico no posee un carácter homogéneo, pues proliferan teorías de diferentes autores, los que sin dejar de atribuirse a la posición cognitivista, destacan determinados aspectos del aprendizaje que no se llegan a contraponer entre sí.
- El grupo y el carácter interactivo en el aprendizaje no es destacado.
- Al enfatizar tanto en lo cognitivo, lo afectivo queda relegado a un segundo lugar, con lo cual el autor tampoco concuerdan pues un aprendizaje significativo debe partir del aspecto motivacional, así como las relaciones que se establecen entre los miembros del grupo, y de estos con el docente, la experiencia que posee el alumno, y definir sus potencialidades para el aprendizaje.
- Aporta al desarrollo de la creatividad en los estudiantes, al estimular que ellos descubran por sí mismos nuevas relaciones entre los conceptos, de acuerdo con las tareas y actividades que le proponga el docente.

### 2.6.1.- Aprendizaje significativo en la Matemática

La enseñanza de la Matemática juega un papel importante en la formación de individuos que sean capaces de asumir las exigencias científicas y técnicas que demanda el actual desarrollo social. En este sentido, es necesario que los alumnos aprendan a aprender.

Mientras, la falta de motivación por el estudio de la Matemática y el pobre desarrollo de las habilidades en esta disciplina son obstáculos al logro esos propósitos y constituyen dificultades a las cuales se deben enfrentar sistemáticamente los educadores de Matemáticas durante el desempeño de su profesión.

Son pocas las experiencias referidas en la literatura pedagógica respecto de la utilización del aprendizaje significativo en la enseñanza de la matemática; tampoco abundan en los libros de texto los ejemplos y actividades docentes que muestren como trabajar en esa dirección. Con relación a esto se cita: "....cuando una persona se interesa en aplicar los principios psicológicos para perfeccionar su práctica docente, se encuentra con la carencia de sugerencias concretas para hacerla más efectiva. Lo anterior ocurre porque comúnmente los textos disponibles son muy generales, con amplías revisiones teóricas, pero que extraña vez resaltan las prescripciones teóricas para solucionar los problemas adentro de la clase." (Guzmán y Hernández, 1993).

Como definición de aprendizaje significativo en el campo de la matemática, Ana Glorifica López y Paul Achicharre Fernández sostienen que: Es aquél que los alumnos realizan cuando el maestro de esta disciplina, después de partir de considerar los conocimientos previos relacionados con el contenido matemático que va a ser elaborado, presentan una situación que no puede ser resuelta con dichos conocimientos, provocando en ellos la necesidad de nuevos conocimientos para solucionar la situación presentada. Formula el objetivo correspondiente y presenta las actividades encaminadas a lograr la solución del problema presentado, el cual es resuelto con una amplia participación de los estudiantes.

Los estudiantes pueden finalmente asimilar el nuevo contenido matemático, integrándolo a los conocimientos previos que ya poseían, y aplicarlos en la resolución de ejercicios. La situación de partida presentada puede ser tal que manifieste la relación con las aplicaciones prácticas de la Matemática, o con cuestiones históricas de su desarrollo como ciencia, o con otras disciplinas."

Esta definición tiene en cuenta que el conocimiento se debe elaborar para que el alumno comprenda el significado de lo que está aprendiendo. Si intentamos, por ejemplo, enseñar las proyecciones o la construcción de sólidos apartados de la realidad que rodea al alumno, sin buscar analogías con el mundo real, sin evaluar los conceptos de punto, recta, que el alumno ha concebido de manera intuitiva, solamente lograremos que el estudiante aprenda por repetición y será incapaz de dar respuesta a los problemas que solamente al final se le muestran y tiene que enfrentar.



Consecuentemente con la definición asumida, se identificaron las siguientes ventajas del Aprendizaje Significativo en la enseñanza de la Matemática:

- Se logra que los alumnos no sientan temor por el estudio del nuevo contenido.
- Se logra una mayor motivación para el estudio.
- Los docentes pueden desarrollar el trabajo individualizado, dirigido a las capacidades de aprendizaje de cada alumno
- Permite el desarrollo óptimo de las habilidades matemáticas.

**Los investigadores antes mencionados recomiendan aplicar el aprendizaje significativo teniendo en cuenta los siguientes aspectos:**

- Considerar si el contenido de la enseñanza es propicio para ser vinculado con situaciones de la vida práctica o con otras disciplinas, con la carrera que cursa el estudiante o con cuestiones históricas relacionadas con la Matemática.
- Cuando el docente no posee el nivel suficiente de desarrollo de las habilidades profesionales necesarias para emprender un trabajo con formas superiores de enseñanza (como la Enseñanza Problémica o la Instrucción Heurística), en cuyo caso es apropiado este enfoque, por ser didácticamente menos exigente.

**Surge ahora de forma natural la pregunta de cómo aplicar el aprendizaje significativo, a esto los autores ya citados, sugieren:**



a. Determinar los conocimientos previos de los alumnos que se encuentran relacionados con los que van a si asimilar.
b. Comprobar si los alumnos dominan esos conocimientos, y en el caso que tengan dificultades en los mismos elaborar actividades para su reactivación.
c. Planear actividades diferenciadas orientadas a los alumnos que presentan las dificultades.
d. Elaborar una situación de partida, teniendo en cuenta que la misma debe estar vinculada con la práctica, o con otras disciplinas, o con el desarrollo histórico de la propia matemática, de manera que no puedan resolverla con los conocimientos que ellos poseen.

e. Hacer visible la insuficiencia de conocimientos, al no poder resolver la situación presentada con los conocimientos que ellos ya poseen, y a continuación orientarlos para el objetivo.
f. El conocimiento se debe elaborar mediante la articulación del conocimiento anterior con el nuevo conocimiento.
g. Resumir los aspectos más importantes de la clase, así como enfatizar la relación entre el nuevo contenido con los conocimientos previos.

En lo que sigue vamos a mostrar que el empleo de herramientas informáticas puede facilitar el Aprendizaje Significativo, pues esto desde el inicio, eleva la motivación de los alumnos, facilitando la enseñanza diferenciada.

**2.6.2- Las TIC para el logro de un aprendizaje significativo**

En este nuevo siglo resulta de particular trascendencia que se analicen las múltiples facetas del trinomio estudiante-profesor-TIC en el proceso enseñanza aprendizaje, y los cambios que esta incursión traerá.



La inclusión de las TIC para lograr un aprendizaje significativo, sugiere que la educación establezca una búsqueda constante de procesos que le permitan adecuarse al ritmo acelerado con qué marcha el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad; así como también se debe asumir la educación como el porvenir para sobrevivir, con el objetivo de la realización personal del hombre y al aumento de su productividad. Como exponen Toffler y Toffler (1994), “El bien más estimado no es la infraestructura, las máquinas, los individuos, sino las capacidades de los individuos para adquirir, crear, distribuir y aplicar críticamente y con sabiduría los conocimientos”.

La vinculación entre Educación y las TIC constituyen hoy una práctica de formación integral del estudiante, a través de una educación que se haga reflexiva y enriquecedora.

Se necesita promover y difundir en los diferentes niveles del sistema educativo la inserción de las TIC en educación para el logro de aprendizajes significativos, fomentando la necesidad de un cambio en las metodologías tradicionales de enseñanza, lo cual permite divulgar la enseñanza personalizada en el proceso de aprendizaje e impulsar la creación de programas que faciliten la presentación del contenido de las más diversa formas.

**2.7.- Las TIC como estrategia en la enseñanza de la matemática.**

La labor docente en el último tiempo en nuestro país, es cuestionada marcadamente debido a que las estrategias que se utilizan a la hora de entregar los contenidos a los estudiantes no son los adecuados. Este planteamiento aduce claramente que la forma tradicional, conocida como Conductismo, no es lo que el alumno de hoy requiere ya que rodeado de tecnología principalmente, su entorno ha cambiado sustancialmente. Esta problemática nos demuestra la urgencia de replantear la acción del profesor frente a sus alumnos, para ello existen muchas estrategias que podríamos mencionar para hacer de la educación una instancia motivadora, es aquí donde entran las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación). La posibilidad de acceder al mundo de la tecnología, la informática y la comunicación son cada vez mayores, aún en lugares geográficamente inaccesibles.

Una de las características y ventajas de las TIC, es que pueden en principio ser usadas en cualquier lugar y situación, demostrando con ello que, además de usar los elementos tecnológicos, es preciso que éstos se hagan acompañar y ejecutar por ideas y acciones de profesores que tengan como finalidad ofrecer a los alumnos las facilidades para un aprendizaje efectivo.

Algunos de los elementos que garantizan el éxito de un aprendizaje significativo mediante el uso de las TIC y, en particular, la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, son los siguientes:

- Actúa como elemento motivacional. El estudiante se siente atraído por la computadora.
- Hace que gane confianza como "Ser intelectual" y aprecie su actividad como algo importante y no como el cumplimiento de un deber.
- Permite el desarrollo de un aprendizaje personalizado, al posibilitar al estudiante avanzar según su propio ritmo de aprendizaje.
- Posibilita la representación visual, gráfica de figuras, imágenes, animaciones, simulaciones que proporcionan cierto grado de realidad psicológica y que propicia a la mente alcanzar los objetivos de una forma más adecuada, amena y atractiva.
- Deja que el estudiante aprenda de sus errores, minimizando la sensación de fracaso que siente al no lograr el éxito esperado.
- Faculta al estudiante a aprender descubriendo, al estimular la independencia y el auto-aprendizaje.
- Estimula el trabajo en equipo.

Para el logro de lo anterior, es necesario que el educador en Matemática en nuestros tiempos logre conocimientos sólidos en las siguientes direcciones:

- En la propia Matemática.
- En la Didáctica de la Matemática.
- En las Tecnologías de la Informática y las Comunicaciones.
- En las didácticas específicas para el uso efectivo de las TIC (esta dirección en naciente desarrollo).
- En una cultura integral-general.

A pesar de que el empleo de las TIC y de las computadoras en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática puede jugar un papel importante, al permitir con su implementación un aprendizaje significativo, persisten insuficiencias para conseguirlas introducir en este proceso.

- Desconocimiento, por parte del profesorado, de las herramientas que las TIC pone a su disposición para desarrollar un aprendizaje significativo.
- Insuficiente preparación del personal docente sobre las vías y métodos a utilizar para enfrentar esta tarea.
- Poco desarrollo de trabajos de investigación que aporten resultados, tanto desde el punto de vista teórico como el práctico, sobre una base bien fundamentada para nuestra realidad educacional.
- Insuficiente desarrollo teórico de la Didáctica de la Matemática para el uso de las TIC en el proceso enseñanza-aprendizaje.



En cuanto a la integración de las TIC en los procesos de aprendizaje de las Matemáticas, nos hemos basado en el planteamiento de Andee Rubin (2000) quien agrupa en cinco categorías los diferentes tipos de herramientas para crear ambientes enriquecidos por la tecnología:

- Conexiones Dinámicas Manipulables: Las Matemáticas están cargadas de conceptos abstractos (invisibles) y de símbolos. En este sentido, la imagen cobra un valor muy importante en esta asignatura ya que permite que el estudiante se acerque a los conceptos, sacándolos de lo abstracto mediante su visualización y transformándolos realizando cambios en las variables implícitas. En los grados de primaria se usan objetos físicos manipulables como apoyo visual y experimental; en secundaria, se utilizan manipulables virtuales cuando no es posible tener objetos físicos. El Software para

Geometría Dinámica posibilita ver qué sucede al cambiar una variable mediante el movimiento de un control deslizador (al tiempo que se mueve el deslizador, se pueden apreciar las distintas fases o etapas de los cambios en la ecuación y en su representación gráfica). Las simulaciones son otra herramienta valiosa para integrar las TIC en el currículo, especialmente en Matemáticas y física. Estas proveen representaciones interactivas de la realidad que permiten descubrir mediante la manipulación cómo funciona un fenómeno, qué lo afecta y cómo este influye en otros fenómenos.

- Herramientas Avanzadas: Las hojas de cálculo, presentes en todos los paquetes de programas de computador para oficina, pueden ser utilizadas por los estudiantes en la clase de Matemáticas como herramienta numérica (cálculos, formatos de números); algebraica (formulas, variables); visual (formatos, patrones); gráfica (representación de datos); y de organización (tabular datos, plantear problemas). Por otro lado, a pesar de la controversia que genera el uso de calculadoras por parte de los estudiantes, hay mucha evidencia que soporta el que su uso apropiado pretende a mejores logros en Matemáticas. Las calculadoras gráficas enfatizan la manipulación de símbolos algebraicos, permitiendo graficar funciones, ampliarlas, reducirlas y comparar las graficas de varios tipos de funciones. Adicionalmente, las herramientas para graficar y analizar datos posibilitan que el estudiante descubra patrones en datos complejos, ampliando de esta forma su razonamiento estadístico. El nivel de tecnología utilizada en las empresas es cada día mayor. Muchos puestos de trabajo incluyen herramientas informáticas (hoja de cálculo, calculadora, calculadora gráfica, software para analizar y graficar datos) y se espera del sistema educativo que prepare a los estudiantes para desenvolverse con propiedad con estas tecnologías.

- Comunidades Ricas en Recursos Matemáticos: Los maestros pueden encontrar en Internet miles de recursos para enriquecer la clase de Matemáticas, tales como: simulaciones, proyectos de clase, calculadoras; software para resolver ecuaciones, graficar funciones, encontrar derivadas, elaborar exámenes y ejercicios, convertir unidades de medida, ejercitar operaciones básicas, construir y visualizar figuras geométricas, etc.

- Herramientas de Diseño y Construcción: Otra aplicación de la tecnología, en el área de Matemáticas, consiste en el diseño y construcción de artefactos robóticos. Mediante la construcción y manipulación de objetos, con el fin de explorar las relaciones existentes en el interior de estos objetos y entre ellos.

- Herramientas para Explorar Complejidad: Un desarrollo importante de la tecnología en el campo de las Matemáticas consiste en el creciente número de herramientas para el manejo de fenómenos complejos.



Las herramientas tecnológicas, agrupadas en estas cinco categorías, ofrecen al maestro de Matemáticas la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos para que los estudiantes perciban las Matemáticas como una ciencia experimental y un proceso exploratorio significativo dentro de su formación.

**2.8.- Los Software Educativos como TIC**

Los software, considerados como uno de los componentes base de las TIC pueden ser utilizados como un medio para la enseñanza-aprendizaje de temas específicos en las diferentes áreas de educación. Estos dan la oportunidad a que el alumno pueda usar la interacción que le ofrece las nuevas tecnologías adquiriendo habilidades y destrezas en un tema determinado y le permite crear, dirigiendo así su propio aprendizaje.

En la enseñanza-aprendizaje de disciplinas tales como la Matemática, la presencia de las TIC en el aula se convierte en una herramienta de apoyo para el cálculo y representación grafica, en especial en los contenidos referidos a geometría. Por ser este un tema teórico-práctico, es significativo que los estudiantes lleven los conceptos geométricos y su metodología (una vez comprendidos durante la clase) a la práctica a través de programas de computadoras especialmente diseñados.

El uso de software puede desarrollar en el usuario habilidades de: procesamiento de datos, así como también permiten organizar, editar, almacenar, representar y analizar tanto informaciones proporcionadas por los profesores, como aquellas que son concebidos por el mismo estudiante como producto de sus investigaciones. Simplifica además los cálculos engorrosos, lo que permite que el estudiante dedique más tiempo a razonar la interpretación de cada uno de esos valores y a pensar, realmente, cual es el significado de cada uno de los resultados obtenidos. En función de ello, la computadora y los software pueden y deben incluirse dentro de los programas educativos.



Desde finales del siglo XX hasta nuestros días, se ha creado una gran variedad de software que facilita la enseñanza-aprendizaje en diversas áreas como la matemática, por ejemplo, siendo de gran utilidad tanto para investigadores como para estudiantes de la materia.

A medida de información adicional destacaremos diversos software tanto de algebra como de geometría:

Entre los software más destacados de Algebra tenemos: **Mathematica** es un programa utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemáticas y áreas computacionales. Originalmente fue concebido por Stephen Wolfram, Mathematica es también un poderoso lenguaje de programación de propósito general, La primera versión de Mathematica se puso a la venta en 1988 la versión 8, fue lanzada el 15 de noviembre del 2010, se encuentra disponible para una gran variedad de sistemas operativos, Algunas de las características de Mathematica incluyen: Bibliotecas de funciones elementales y especiales para matemáticas, herramientas de visualización de datos en 2D y 3D, Matrices, manipulación de datos, Capacidad de solucionar sistemas de ecuaciones, ya sea ordinarias, parciales o diferenciales, así como relaciones de recurrencia y algebraicas en general, herramientas numéricas y simbólicas para cálculo de variable continua o discreta, por otro lado tenemos a **Maple**, es un programa matemático de propósito general capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional. Fue desarrollado originalmente en 1981 por el Grupo de Cálculo Simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá; es importante destacar que Maple es también un lenguaje de programación; dicho programa es relativamente sencillo de manejar, con una interfaz muy intuitiva: en ella tenemos a la vista el panel central donde realizas las operaciones y se muestran los resultados, más una serie de menús , éstos facilitan el acceso a los comandos relativos a las operaciones más complicadas, así como a un buen número de símbolos y signos matemáticos; continuamos con **Mathcad**, es un programa algebraico de computadora, a diferencia de otros softwares, Mathcad es más intuitivo de usar, su filosofía es que es un programa más de documentación que de cálculo, aunque también es potente en este ámbito, es muy visual y permite el uso de plantillas de funciones en las que solo es necesario escribir los valores deseados, incluso para graficar funciones, en general, Mathcad es un entorno de documentación técnica con prestaciones de cálculo numérico y simbólico, que permite explorar problemas, formular ideas, analizar datos, modelar y chequear escenarios, determinar la mejor solución, así como también documentar, presentar y comunicar los resultados; Finalmente se presenta **MATLAB** (abreviatura de *MATrix LABoratory*, "laboratorio de matrices") es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows y Apple Mac OS X. Entre sus prestaciones básicas se hallan: la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware, es un software muy usado en universidades y centros de investigación y desarrollo.

Ahora bien, enfocándonos en el área de la Geometría, actualmente se disponen de las herramientas necesarias para que la formación de alumnos sea "más completa". Los software dedicados a la geometría han demostrado en las dos últimas décadas su capacidad de ayuda al usuario para adquirir destrezas en uno de los campos más creativos de las matemáticas.

Los ejemplos más importantes para la ayuda de la enseñanza de la geometría mediante medios informáticos son los llamados programas de Geometría Dinámica; los cuales permiten construcciones de geometría elemental, donde los elementos que se construyen se definen por propiedades cualitativas no mediante ecuaciones y geometría analítica, aunque ésta esté detrás, en el funcionamiento interno del programa.



Existen varios programas de Geometría Dinámica que son similares aunque cada uno tiene características especiales que le hacen mejor en algunos aspectos, referenciamos a continuación los principales:

Comenzamos con el primer programa que permitía manipulación directa de objetos gráficos, el **Sketchpad**, se trata de un sistema grafico, creado mucho antes que el termino interfaz grafico fuera concebido, este programa permite a sus usuarios dibujar puntos, segmentos de líneas y arcos circulares directamente sobre la pantalla mediante lápiz de luz; también tenemos a **Cabri-Geometre** que es un paquete de cómputo de geometría dinámica interactiva en tiempo real. Permite hacer la geometría de una manera muy particular: el usuario puede animar una figura desplazándola o deformándola y el resultado se presentará inmediatamente en la pantalla de la computadora. Esta libertad de movimiento permite rebasar los límites impuestos por el papel y el lápiz de la geometría tradicional. Es un medio de trabajo donde el estudiante tiene la posibilidad de experimentar con una materialización de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, de tal forma que los estudiantes puedan vivir un tipo de experimentación matemática que no es posible tener de otra forma.

Finalmente tenemos a nuestro software de estudio **GeoGebra 3.2**, Es un programa similar al **Cabri-Geometre** en cuanto a instrumentos y posibilidades pero incorporando elementos algebraicos y de cálculo. La ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en la pantalla: un expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica, GeoGebra es un software libre y de plataformas múltiples que se abre a la educación en colegios y universidades por interactuar dinámicamente con la matemática, en el ámbito en que se reúnen la Geometría, el Algebra y el Cálculo.



**2.9.-La historia en el proceso de formación del Profesor de Matemáticas.**

La historia de la matemática debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de matemáticas de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino porque primariamente la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado.

La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico.

La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas.

Desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática la historia nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, lo que redunda en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico, como para el que enseña. Si cada porción de conocimiento matemático de nuestros libros de texto llevara escrito el número de un siglo al que se le pudiera asignar con alguna aproximación, veríamos saltar locamente los números, a veces dentro de la misma página o del mismo párrafo. Conjuntos, números naturales, sistemas de numeración, números racionales, reales, complejos,... decenas de siglos de distancia hacia atrás, hacia adelante, otra vez hacia atrás, vertiginosamente.

No se trata de que tengamos que hacer conscientes a nuestros alumnos de tal circunstancia. El orden lógico no es necesariamente el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico coincide con ninguno de los dos. Pero el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas, para:

- Comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos.
- Entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática.
- Utilizar este saber como una sana guía para su propia pedagogía.

El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la matemática. Se puede barruntar la motivación de las ideas y desarrollos en el inicio. Ahí es donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con su sentido de aventura, que muchas veces se hace desaparecer en los textos de todos los niveles.



Tal visión dinámica nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo educativo:

- Posibilidad de extrapolación hacia el futuro
- Inmersión creativa en las dificultades del pasado
- Comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad, oscuridad, confusiones iniciales, a media luz, esculpiendo torsos inconclusos.

Por otra parte el conocimiento de la historia de la matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, sus prejuicios,... así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. Aspecto este último del que los mismos matemáticos enfrascados en su quehacer técnico no suelen ser muy conscientes, por la forma misma en que la matemática suele ser presentada, como si fuera inmune a los avatares de la historia.

Desgraciadamente, tanto para el estudiante que desea sumergirse en la investigación matemática como para el que quiere dedicarse a sus aplicaciones o a la enseñanza, la historia de la matemática suele estar totalmente ausente de la formación universitaria en nuestro país. Por lo tanto, sería extraordinariamente conveniente que las diversas materias que se enseñen se beneficiaran de la visión histórica, y que a todos los estudiantes se les proporcionara siquiera un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar buena parte de su vida.

**2.9.1.-La utilización de la historia en la educación matemática.**



El valor del conocimiento histórico no consiste solo en tener una batería de historietas y anécdotas curiosas para entretener a nuestros alumnos a fin de hacer un alto en el camino.

La historia se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado. Quien no tenga la más mínima idea de las vueltas y revueltas que el pensamiento matemático ha recorrido hasta dar, pongamos por caso, con la noción rigurosamente formalizada del número complejo, se sentirá tal vez justificado para introducir en su enseñanza los números complejos como "el conjunto de los pares de números reales entre los cuales se establecen las siguientes operaciones". Quien sepa que ni Euler ni Gauss, con ser quienes eran, llegaron a dar ese rigor a los números complejos y que a pesar de ello pudieron hacer cosas maravillosas relacionadas con ellos, se preguntará muy seriamente acerca de la conveniencia de tratar de introducir los complejos en la estructura cristalizada antinatural y difícil de tragar, que sólo después de varios siglos de trabajo llegaron a tener.

**La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:**

- Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas.
- Enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes.
- Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente.
- Apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.



Ahora bien, ¿por qué hablar de la importancia de la historia en una investigación que tiene como objetivo principal implementar GeoGebra 3.2 como TIC para la enseñanza del Teorema de Pitágoras?; La historia de dicho teorema, no sólo es un elemento más de cultura matemática, sino que como recurso didáctico se presenta como un elemento motivador muy atractivo. Este aspecto, permite además hacer que el alumno sea partícipe en la clase con carácter activo, pudiendo proponer él mismo distintas preguntas sobre el porqué de ciertos aspectos que rodean tan importante teorema, o sobre la necesidad del uso en los distintos ámbitos de la vida. Por supuesto, dentro de la historia del Teorema de Pitágoras, podemos encontrarnos multitud de anécdotas que llaman mucho la atención del alumno y en general de cualquier persona; conocer la vida de distintos matemáticos importantes tales como Pitágoras y Euclides entre otros, siempre es atractivo e interesante para el alumnado, ya que lo ven como un punto y aparte de lo que es el material formalmente matemático, pero para el docente de matemáticas es algo que le permite formar al alumno y le da la facilidad de implicarle en el aprendizaje de determinados conceptos matemáticos. Por lo anteriormente expuesto se hace una invitación formal al lector a realizar un revisión histórica del Teorema de Pitágoras ya que esto le va permitir de mejor manera comprender cada uno de los aspectos que lo conforman, para así poder emplear con fluidez cada una de las herramientas geométricas que contiene GeoGebra 3.2, ya que tanto este como en general cualquier software educativo de matemáticas amerita que se tenga un conocimiento previo a la hora de aplicarlo en diversos temas, y nuestro tema de estudio (el Teorema de Pitágoras) no escapa de ello, permitiendo así lograr de esta manera un aprendizaje significativo.

# CAPÍTULO III

## MARCO METODOLOGICO

Este capítulo tiene como finalidad definir la metodología de investigación en la que se apoyará el presente estudio. Es decir se dará respuesta a aspectos cruciales de la investigación, como son: determinar el enfoque y tipo de investigación, diseño, forma de elección de la vía más confiable de recolectar los datos y las características del universo y muestra; además de describir los instrumentos utilizados para la recolección de la información así como también el procedimiento.

### 3.1.- Tipo de la Investigación.

El objetivo principal de la investigación que se desarrolla es demostrar que el "estudiante promedio" y egresado de la carrera de Educación mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de los Andes del Estado Trujillo (NURR-ULA), pueden obtener la habilidad necesaria para dominar en un corto periodo de tiempo y por si solos el software educativo GeoGebra 3.2, el cual puede ser empleado como TIC para la enseñanza del Teorema de Pitágoras, por su naturaleza este estudio se enmarca en el enfoque de investigación  exploratoria y descriptiva, de las cuales Hernández, y otros (2003) comentan:

> "Los estudios exploratorios se efectúan, normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes.
>
> Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis".

### 3.2.- Diseño de la Investigación.

El “Diseño” es definido por Hernández y otros (2003) como: “un plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación”. En el marco de la investigación planteada, Hernández y otros (2003) afirman que se puede o no preconcebir un diseño de investigación, pero en este caso se decidió implementarlo y el que más se ajusta al estudio en cuestión es el de investigación no experimental. Hernández y otros (2003) definen la investigación no experimental como “estudios que se realizan sin manipulación deliberada de variables y en los que solo se observan los fenómenos en su ambiente natural para después analizarlos”.

Existen dos tipos de diseños no experimentales; el transversal y el longitudinal. Según Hernández y otros (2003) “la elección de un tipo de diseño u otro, depende más bien del propósito de la investigación; asimismo pueden combinarse ambos diseños”. Por lo anteriormente señalado, el presente estudio es de diseño no experimental de tipo transversal y longitudinal.



En este sentido se pretende comenzar a conocer el software educativo GeoGebra 3.2 y demostrar con ello que el “estudiante promedio” y egresados de la carrera Educación Mención Física y Matemática del NURR-ULA pueden obtener la pericia necesaria para dominar en un corto periodo de tiempo el software educativo GeoGebra 3.2, el cual puede ser empleado como TIC para la enseñanza de la geometría, en especifico para la enseñanza del Teorema de Pitágoras. Es decir, que se trata de una exploración inicial en un momento específico, por ello esta investigación encaja dentro de los diseños transversales exploratorios. Además se analizaran los cambios que con el transcurrir del tiempo surgen a medida que se conoce dicho software, por esto es que también la investigación entra dentro de los diseños longitudinales de tendencia.

**3.3.- Universo y Muestra.**

El universo es el conjunto de casos que conforman la totalidad del fenómeno a estudiar, Tamayo (2001) lo define como “la Totalidad del fenómeno a estudiar, grupos de entidades, personas o elementos cuya situación se está investigando”. En este caso el universo está conformado por todos los estudiantes y egresados de la carrera de Educación Mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario “Rafael Rangel” de la Universidad de Los Andes.

Una vez determinado el universo de estudio, el proceso de recolección de información no se hará individualmente sobre todos los sujetos que lo componen ya que su número es elevado, y resultaría engorroso y probablemente imposible, además que no está dentro de los objetivos de la investigación examinar a los sujetos que componen dicho universo. Entonces para obtener la información que se requiere en este estudio se precede a extraer una parte representativa de la población a la cual se le denomina muestra. Según Hernández y otros (2003), “La muestra (en el enfoque cualitativo) es, la unidad de análisis o conjunto de personas, contextos, eventos o sucesos sobre el (la) cual recolectan los datos sin que necesariamente sea representativo del universo”.

En este trabajo de investigación la muestra es del tipo no probabilística, tal como lo exponen Hernández y otros (2003), en esta se hace suposición de un procedimiento de selección informal y arbitrario; sin embargo este tipo de muestra es muy utilizado con la finalidad de lograr hacer inferencias sobre la población. Es prudente acotar otro principio, el que en este tipo de muestra todos los sujetos no tienen la misma oportunidad de ser seleccionados, sino que es el investigador quien decide cuáles serán sus objetos de estudio.

Dentro de las muestras no probabilísticas se encuentran la de sujetos voluntarios, la cual se emplea en la presente investigación, que según Hernández y otros (1999) son muestras muy usadas en las Ciencias Sociales y Ciencias de la Conducta. El manejo de este tipo de muestra es muy frecuente en laboratorios donde se busca que los sujetos tengan características homogéneas en variables tales como: edad, sexo, inteligencia, entre otras, de tal manera que los resultados que se obtengan no estén sujetos a diferencias individuales, sino a circunstancias a que fueron sometidos. Del mismo modo, se aplica la muestra sujeto-tipo, que según Hernández y otros (2003), el objetivo de este se basa en el carácter cualitativo, donde la riqueza sea la calidad de la información y no su carácter cuantitativo.

También se emplea la muestra cualitativa de tipo homogénea que según Miles y Huberman (citado por Hernández y otros: 2003), la cual tienen como propósito enfocarse en el tema a investigar, enfatizar situaciones, procesos o episodios en un grupo social.



Por lo señalado anteriormente se tomó la decisión de emplear este tipo de muestreo, ya que se conocerá el software educativo GeoGebra 3.2 el cual puede ser usado como TIC para la enseñanza de la geometría, específicamente para la enseñanza del Teorema de Pitágoras; es por esto que la muestra tomada para esta investigación es de un estudiante (la creadora de la presenten investigación) cursante del decimo semestre de Educación Mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario “Rafael Rangel” de la Universidad de Los Andes en Trujillo.

## 3.4.- Técnicas e Instrumentos Para la Recolección de Datos.

Según Arias (2006), “La técnica es la forma de obtener la información y el instrumento es el medio material para registrarla o almacenarla”. Para el enfoque cualitativo, la recolección de datos resulta fundamental y según Hernández y otros (2003) “su propósito es, obtener información de sujetos, comunidades, contextos, variables o situaciones en profundidad, en las propias palabra, definiciones o términos de los sujetos en su contexto”.

Las técnicas pueden ser recopilación y análisis bibliográficos, así como también la observación, encuesta, cuestionario o lista de cotejo entre otros. A continuación se describen y explican las herramientas para la recolección de datos que se utilizaran en las diferentes fases de la investigación.

### 3.4.1.- La Observación

La observación es una técnica muy valiosa, que tiene como propósito explorar, describir ambientes así como también comprender procesos e identificar problemas. Asimismo se afirma que la observación cualitativa no es mera contemplación “implica adentrarse en profundidad a situaciones sociales y mantener un rol activo así como una reflexión permanente y estar pendiente de detalles, eventos e interacciones” Hernández (2003). En este sentido, la presente investigación, utiliza de manera continua la observación para conocer el software educativo GeoGebra 3.2 y así registrar sistemáticamente y de manera confiable el comportamiento de la muestra ante él.

La observación se puede clasificar en observación participante y observación no participante. En primer caso el observador interactúa con los sujetos observados y en el segundo no ocurre la mencionada interacción. De estos dos tipos de observación se aplica en este trabajo investigativo solamente la primera, ya que se tiene un contacto constante con el software en estudio para poder comprenderlo.

### 3.4.2.- Documentos y/o materiales escritos y audiovisuales:

Según Hernández y otros (2003), esta es una técnica para la recolección de datos en una investigación de tipo cualitativa. En esta investigación se realizo una minuciosa revisión y consulta de documentos escritos publicados referentes al software educativo GeoGebra 3.2 y las TIC en general.

El instrumento básico para la recolección en particular de la información en el presente trabajo fue la construcción mediante GeoGebra 3.2 de un conjunto de demostraciones seleccionadas, previamente documentadas y perfeccionadas del Teorema de Pitágoras, propuestas por el Prof. José Romano, profesor adscrito al Dpto. de Matemáticas del Núcleo Universitario “Rafael Rangel” de la Universidad de los Andes en Trujillo y tutor del presente trabajo.

# CAPÍTULO IV

## El Teorema de Pitágoras

El siguiente capítulo comprende de un pequeño paseo por algunas civilizaciones que conocieron algunas formas geométricas del Teorema de Pitágoras aunque no en su total generalidad y que lo usaban aun sin tener una demostración. Este recorrido va permitir que el lector establezca una relación histórica con el teorema más famoso de la geometría y así establezca comparaciones entre las distintas demostraciones que se presentan.

También se mostraran las definiciones pertinentes, la cuales dan una visión más clara de cada una de las demostraciones, así como también las proposiciones y teoremas requeridos para cada demostración. Finalmente se presentaran las demostraciones clásicas seleccionadas del Teorema de Pitágoras.

### 4.1 Recorrido Histórico.

Comencemos hablando sobre Grecia. Grecia fue la civilización pionera en intentar explicar los hechos ocurridos en la naturaleza, con teorías científicas y sin recurrir a la magia, supersticiones y sobre todo a los dioses de la vieja mitología griega.  Esta fue una gran idea, posiblemente existan fuerzas naturales rigiendo los fenómenos naturales y la comprensión de esas fuerzas o fenómenos podrían hacer el mundo más comprensible; era la hora de quebrar el hielo que siempre unió la naturaleza y las creencias, quebrar ese hielo significaba crear una nueva Ciencia libre de creyentes y de conceptos arcaicos que infelizmente hasta hoy muchas veces aun son usados. Los métodos científicos y filósofos que comenzaron a nacer muchas veces estaban errados, pero aquello no detuvo esa sed de saber y la búsqueda de conocimiento. Grecia fue la primera nación en buscar la verdad en todas las cosas y la naturaleza para ellos debía ser explicada racionalmente y no a través de dioses.



La matemática tal vez haya sido tomada como ciencia por primera vez, gracias a las ideas de filósofos griegos. Desafortunadamente  las fuentes de información sobre las ideas científicas de los griegos son muy escasas y los trabajos más importantes solo llegan hasta nosotros a través de traducciones árabes. La Matemática no nació con los griego, ella ya existía en Mesopotamia, Egipto e inclusive china, pero una cosa es cierta, fueron los griegos quienes dieron inicio  a demostraciones y deducciones en Matemática. Pensadores como Tales, Pitágoras, Arquímedes, Euclides, Aristarco, Apolonio, entre otros, hicieron la matemática como la conocemos hoy en día.

Enfocándonos en uno de los grandes pensadores como lo fue Pitágoras, con respecto a su vida se sabe con relativa seguridad  que nació entre los años 582 a.C y 569 a.C, en la isla de Samos. Fue hijo de Mensesarco, tal vez un rico comerciante de Samos. Pitágoras aprendió rápidamente, y en poco tiempo supero a sus maestros matemáticos y filósofos. Viajo mucho, estuvo en Egipto y en Babilonia, se dice que fue inclusive a la India, en cada región tuvo contacto con conocimientos matemáticos e ideas religiosas. Cuando regreso a Grecia fundo una escuela, en verdad, una sociedad secreta dedicada principalmente a la matemática y filosofía. Esta escuela además de ser secreta era comunitaria, es decir, todo el conocimiento y todo lo que descubrían pertenecían a todos y, además, era común en aquella época darle todo el crédito al maestro de todos los descubrimientos hechos, por eso no sabemos si fue el propio Pitágoras quien descubrió el famoso teorema que lleva hoy su nombre.

Con el pasar del tiempo los investigadores han comprobado que otras civilizaciones existentes antes de los Pitagóricos ya tenían idea sobre el Teorema. De hecho, existen pruebas concretas de que los babilónicos antiguos conocían el teorema de Pitágoras, es decir, la relación que existe entre la hipotenusa y los catetos de un triangulo rectángulo. Una pista de que los babilónicos conocían alguna forma de encontrar los lados de un triangulo rectángulo está en una tablilla cuneiforme, encontrada en la ciudad de Harmal, que data de 1900 a 1600 a.C, la cual se encuentra guardada hoy en el Museo Británico. En esta tablilla está escrito lo siguiente:

4 es la base y 5 es la diagonal

¿Cuál es la altura?

4 veces es 16 y 5 veces 5 es 25

Restando 16 de 25 queda 9

3 veces 3 es 9, por lo tanto la altura es 3

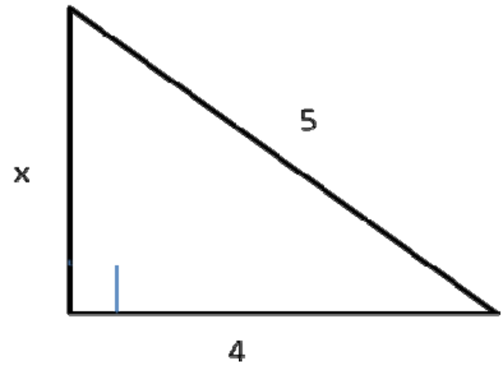



***Figura 1 .***Triangulo Rectángulo

Es claro que esto no es una demostración, pero las demostraciones estaban lejos de ser una preocupación para los matemáticos de la época. Ellos conocían recetas que se daban bien y con ellas resolvían muchos problemas.

Hay dos tratados clásicos chinos de contenido matemático donde se relacionan aspectos geométricos vinculados al Teorema de Pitágoras evidenciándose así que en China también se conocían la relación entre los lados de un triangulo rectángulo, son el Chou Pei Suan Ching(300 a.C.) y el Chui Chang Suang Shu (250 a.C.).Su contenido fue sustancialmente ampliado y desarrollado por dos comentaristas del siglo III d.C., Zho Shuang y Liu Hui. Los tratados originales tratan los aspectos primitivos del Teorema, es decir, los resultados numéricos concretos, así como las leyes generales de formación de las ternas pitagóricas, mientras que los aspectos más evolucionados de la demostración son elaborados por Zhao y Liu.

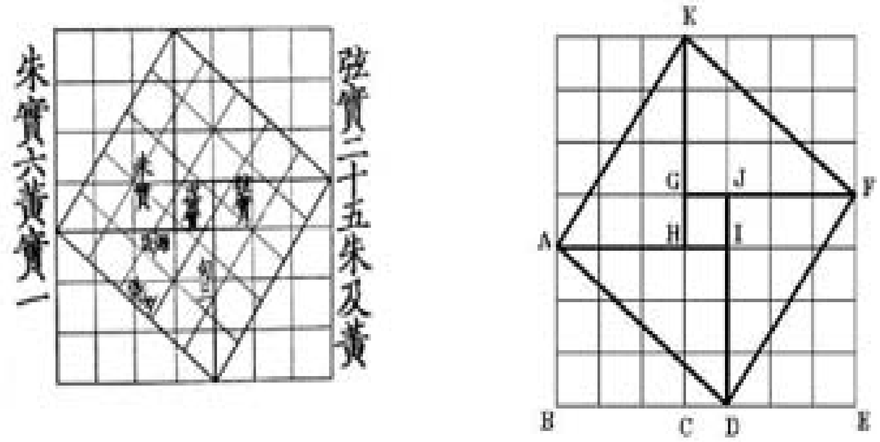



***Figura 2.*** El Diagrama de la hipotenusa del tratado Chino Chou-Pei Suan-Ching (300 a.C.)

En el Chou-Pei aparece una figura llamada "Diagrama de la hipotenusa". La porción inferior de este diagrama, el hexágono AHGFEB, se compone de dos cuadrados AHCB y CEFG que tienen por lados, los catetos del triángulo rectángulo. Esta área es equivalente al cuadrado ADFK sobre la hipotenusa del triángulo, de donde resulta el Teorema. Esta elegante prueba del Teorema de Pitágoras es dada implícitamente por Zhao. En el Chou-Pei original con un lenguaje muy retórico se describe la figura, en términos estrictamente numéricos, diciendo:



**"En cada semirectángulo de anchura 3 y longitud 4, la diagonal debe valer 5, y si se resta del cuadrado total de área 49 los cuatro semirectángulos exteriores, que suman área 24, el resto es un cuadrado de área 25".**

El Chui-Suang contiene 246 problemas de los cuales los 24 se refieren a triángulos rectángulos. Todas las soluciones a los problemas se basan de una u otra forma en el Teorema de Pitágoras. El más famoso es el problema del bambú roto:

**"Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura"**

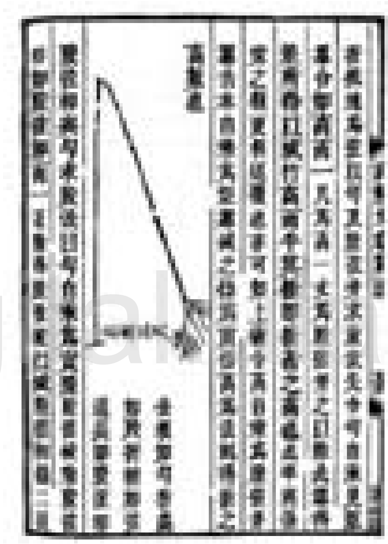


***Figura 3.*** El Bambú Roto



Hacia el año 300 a.C, dos antiguas naciones se unieron para formar una única nación Egipcia bajo el mando de un solo gobernante. La agricultura gozó de asombroso desarrollo, beneficiándose de los periodos regulares de lluvia y de sequia que se daban a lo largo del año. El Nilo anegaba los terrenos durante la estación de lluvias, proporcionando tierras fértiles las cuales, mediante complejos sistemas de riego se convertían en suelos propicios para el crecimiento de los cultivos. La gran zona cubierta por la nación egipcia precisaba una sofisticada administración, un sistema de impuestos y de archivos que registraran todos aquellos bienes que cada persona quería intercambiar. Surgió entonces la necesidad de realizar diversos recuentos y fue entonces cuando se preciso la existencia de la escritura y los números con el fin de crear un historial con todas y cada una de las transacciones que se llevaran a cabo.

De las escrituras de esa época quedan dos manuscritos, uno llamado el papiro de Rhind y el otro papiro de Moscú. Dichos papiros a pesar de su alto valor matemático, no mencionan el Teorema de Pitágoras ni las ternas Pitagóricas, no obstante los egipcios conocían y utilizaban el hecho de que el triangulo de lados 3,4 y 5, llamado “Triangulo Egipcio”, es rectángulo, y lo usaban para trazar una línea perpendicular a otra, a modo de “escuadra de carpintero”, que era una práctica habitual de los agrimensores oficiales para recuperar las fronteras de los linderos de las tierras que desaparecían o que se ganaban tras los periódicos corrimientos de tierras producidos por las crecidas del rio Nilo.



En el antiguo Egipto el Triangulo Egipcio era también llamado Triangulo de Isis y tenía un cierto carácter sagrado, porque el numero tres representaba a Osiris, el cuatro a Isis y el cinco a Horus. Así lo relata Plutarco en Sobre Isis y Osiris, VIII, 4: “Los egipcios se imaginaban el mundo en la forma del más bello de los triángulos. Este triangulo, símbolo de la fecundidad, tiene su lado vertical compuesto de tres, la base de cuatro y la hipotenusa de cinco partes. El lado vertical simboliza al macho, la base a la hembra, y la hipotenusa a los hijos de ambos.

Todas las pirámides de Egipto, excepto la de Keops, incorporan, de alguna manera, este triangulo rectángulo en su construcción, el cual añade a su sencillez, que permite una comprobación visual instantánea del Teorema, el hecho de ser el único cuyos lados son enteros consecutivos. La mención explícita de la relación pitagórica aparece en Egipto, en un papiro de la XII dinastía hacia el 2000 a.C, encontrado en Kahun, allí se establecen cuatro casos numéricos concretos proporcionales a los  del Triangulo egipcio:

$$1^2 + \left(3/_4\right)^2 = \left(1 + 1/_4\right)^2, 82 + 62 = 102$$

$$22 + \left(1 + 1/_2\right)^2 = \left(2 + 1/_2\right)^2, 162 + 122 = 202$$

### 4.2 Teorema de Pitágoras y Los Pitagóricos

Por poco que sea el conocimiento de una persona en matemáticas, cuando se menciona el nombre de Pitágoras inmediatamente viene a la cabeza el famoso Teorema de Pitágoras. Este teorema aparece como Proposición 47 del libro I de Euclides.

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras) Si $c$ es la medida de la hipotenusa de un triangulo rectángulo y $a$ , $b$ son las medidas de sus catetos, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

Es decir, en todo triangulo rectángulo, el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que tienen como lados cada uno de los catetos.



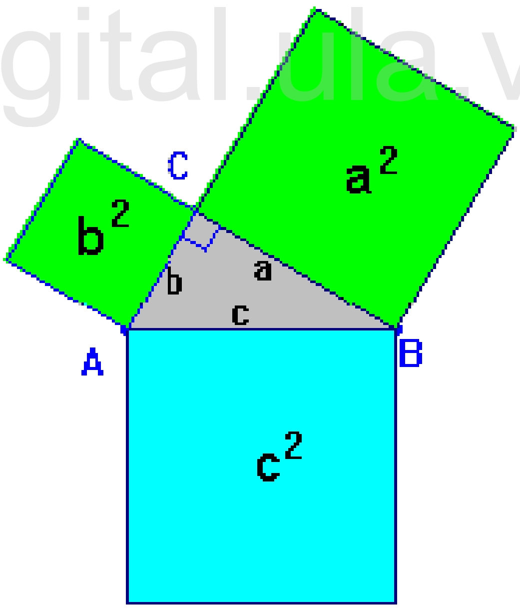



***Figura 4.*** Teorema de Pitágoras

Este es uno de los más bellos e importantes teoremas de matemáticas de todos los tiempos y ocupa una posición importante en el conocimiento universal.

Observemos que de la ecuación (1) obtenemos, usando el orden de R y el hecho que $b > 0$ , que

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 > a^2 \rightarrow \sqrt{c^2} > \sqrt{a^2} \rightarrow c > a$$

Usando el mismo razonamiento y el hecho de que $a > 0$ , se tiene que $c > b$, es decir, que la hipotenusa es el lado más largo de un triangulo rectángulo.

Pero, a quien se atribuye este resultado? El hecho de que los Babilónicos, Egipcios y Chinos ya conocieran esta relación tan hermosa y notable, y que además la usaran para ciertos trabajos prácticos, no le quita el merito a Pitágoras, pues no debemos confundir conocer con demostrar o deducir un resultado o teorema. El descubrimiento es de ellos pero el Teorema es un resultado. El descubrimiento es de ellos pero el Teorema es de Pitágoras. El demostró el resultado no solo para los casos particulares ya conocidos por ellos, sino para cualquier triangulo rectángulo.

Si hablamos de Pitágoras no podemos dejar a un lado a los pitagóricos, con ellos aparece una nueva forma de vida de una comunidad cerrada creada por Pitágoras. Los pitagóricos figuraban, en el siglo V a.C, entre los principales investigadores científicos. Se dedicaron a la Matemáticas, Filosofía y Astronomía.

Como dice Aristóteles "Los Pitagóricos se dedicaron a las matemáticas, fueron los primeros que hicieron progresar este estudio y, habiéndose formado en él pensaron que sus principios era el de todas las cosas". Les cautivó la importancia del número en el cosmos: todas las cosas son numerables, y muchas las podemos expresar numéricamente. Pero entre los descubrimientos que más les impresiono fue que los intervalos musicales que hay entre las notas de la lira pueden expresarse numéricamente. Cabe destacar que la altura de un sonido depende de un número, y es posible representar los intervalos de la escala con razones numéricas. Según Aristóteles, "como vieron que los atributos y las relaciones de las escalas musicales se podían expresar con números, desde entonces todas las demás cosas le parecieron modeladas en toda su naturaleza a través de los números, y juzgaron que los números eran lo primero en el conjunto de la naturaleza y que el cielo entero era una escala musical y un numero".

Con los pitagóricos se inicio un nuevo tiempo en el universo de las matemáticas. Su visión mística de los números no les impidió fundar la aritmética como la ciencia de los números. A ellos se les deben las primeras demostraciones de la historia. Además, les sorprendió la existencia de $\sqrt{2}$, pues ellos solo conocían los números racionales, demostraron la irracionalidad de dicha raíz, que posteriormente formaría parte de los primeros o tal vez el primer elemento conocido del conjunto de los números irracionales. Establecieron 2 categorías de los números enteros, los números impares y los números pares, otro de los grandes aportes de los pitagóricos fue la famosa estrella de 5 puntas, formada por las diagonales de un pentágono regular, conocida también como el pentagrama místico. Esta estrella, fue el símbolo distintivo de la comunidad pitagórica, por eso se le conoce como estrella pitagórica.

No se puede dejar a un lado las famosas Ternas Pitagóricas, la demostración del teorema de Pitágoras, trajo consigo la búsqueda de triángulos rectángulos con lados enteros positivos, similares a los triángulos pitagóricos, entre ellos los más conocidos eran los triángulos de lados (3,4,5), usado por los babilónicos y egipcios y el de lados (6,8,10). Pitágoras o mejor dicho los pitagóricos consiguieron una forma sencilla e interesante de resolver este problema.

Las ternas pitagóricas[1] ya eran conocidas mucho antes de las existencia del Teorema de Pitágoras y estaban íntimamente relacionados con triángulos rectángulos.

[1]Consideremos enteros positivos $a, b, c$ , donde $a > b$ y $a > c$. Decimos que $(a, b, c)$ es una terna pitagórica si cumple: $a^2 = b^2 + c^2$ .

### 4.3 Definiciones, Proposiciones y Teoremas Pertinentes.

En esta sección recordaremos algunas definiciones y propiedades básicas de la geometría plana. El lector que desee profundizar más debe revisar un libro formal de geometría plana tales como: Baldor, Geometría Plana y del Espacio; Moise, Elementos de Geometría Superior. Entre otros.

- **Semejanza de Triángulos**

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos correspondientes respectivamente iguales y sus lados proporcionales. El signo de semejanza es ~.

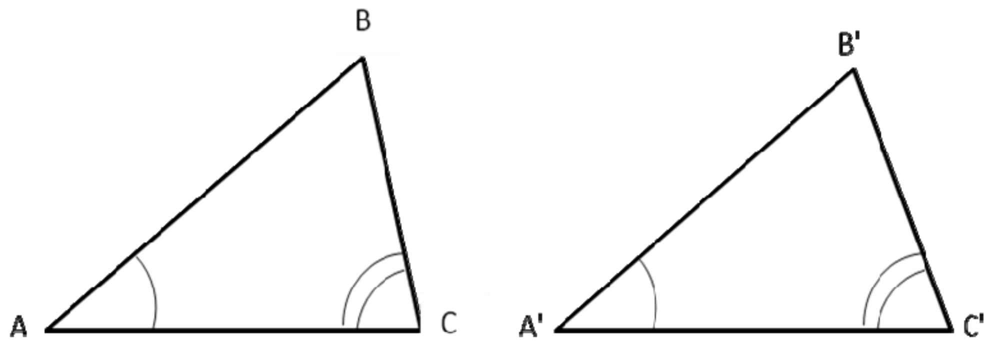
Si $\measuredangle A = \measuredangle A'$ , $\measuredangle B = \measuredangle B'$, y $\measuredangle C = \measuredangle C$ Y $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$ .



- **Lados Homólogos**

Se dice que los lados de dos triangulo son homólogos si se oponen a los ángulos iguales.

$\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, $\overline{CA}$ y $\overline{C'A}$




- **Características de la Semejanza de Triángulos:**

1) Idéntico: Todo triangulo es semejante a sí mismo.

$$\Delta ABC \sim \Delta ABC\ .$$

2) Reciproco: Si un triangulo es semejante a otro este es semejante al primero.

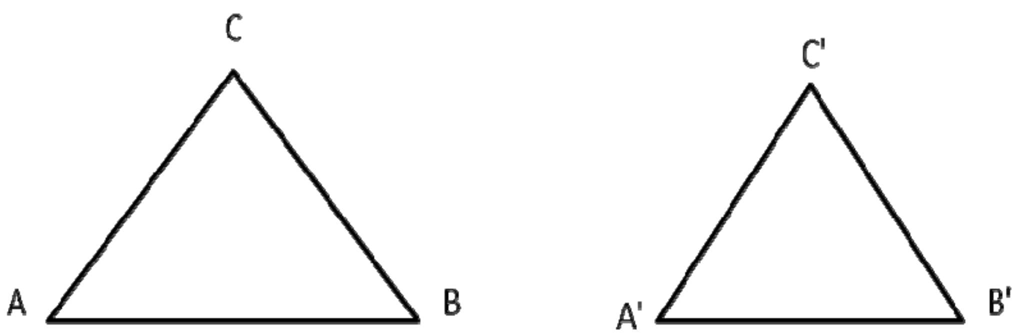
$$Si\ \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad tambien\ \ \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$



3) Transitivo: Dos triángulos semejantes a un tercero, son semejantes entre sí.

$$Si\quad \Delta ABC \sim \Delta A''B''C'' \ \ y \quad \Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C'', \qquad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

- **Razón de Semejanza:** Es la razón de dos lados homólogos.

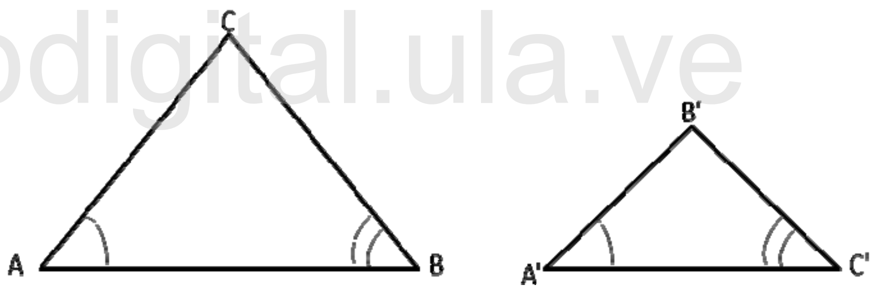


$Si\ \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ , la razón de semejanza es cualquiera de las siguientes razones iguales: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ .

- **Casos de Semejanza de Triángulos:**

**Dos triángulos son semejantes:**

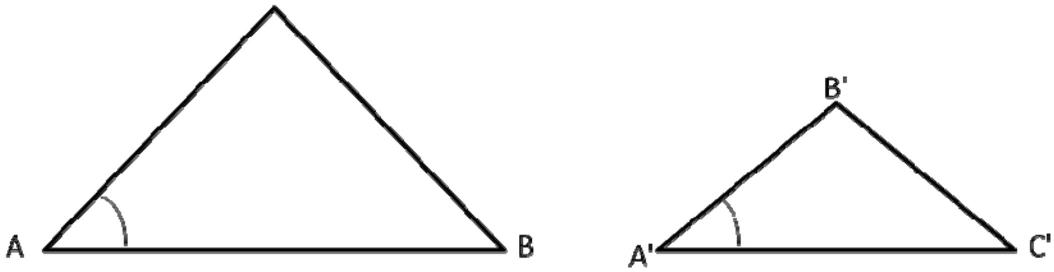
1. Si tienen dos ángulos respectivamente iguale






Si $\measuredangle A = \measuredangle A'$ ,$\measuredangle B = \measuredangle B'$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2. Si tienen dos lados proporcionales e igual el anglo comprendido




Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ y $\measuredangle A = \measuredangle A'$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

3. Si tienen sus tres lados proporcionales.

Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ .

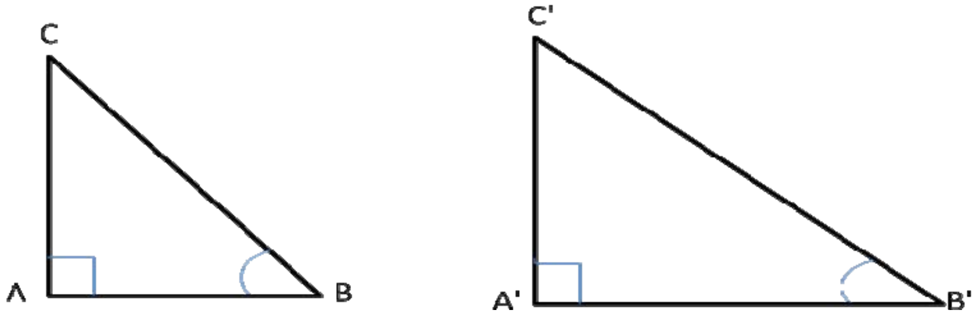
Ahora bien, debido a que en el presente trabajo su principal enfoque y prioridad es el Teorema de Pitágoras, vamos a limitar los casos de semejanza a un tipo de triangulo, el triangulo rectángulo.



- **Casos de Semejanza de Triángulos Rectángulos.**

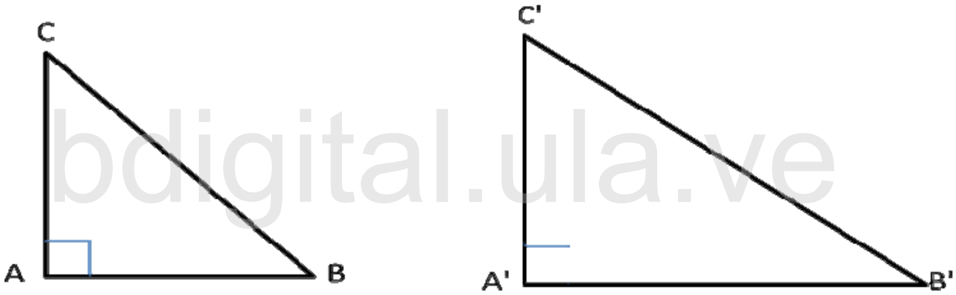
Dos triángulos rectángulos son Semejantes cuando tienen:

1. Un ángulo agudo igual, atendiéndose por ángulo agudo como aquel que es menor que el ángulo recto ($\llcorner 90$).




Si $\measuredangle B = \measuredangle B'$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Y $\llcorner A = \llcorner A'$

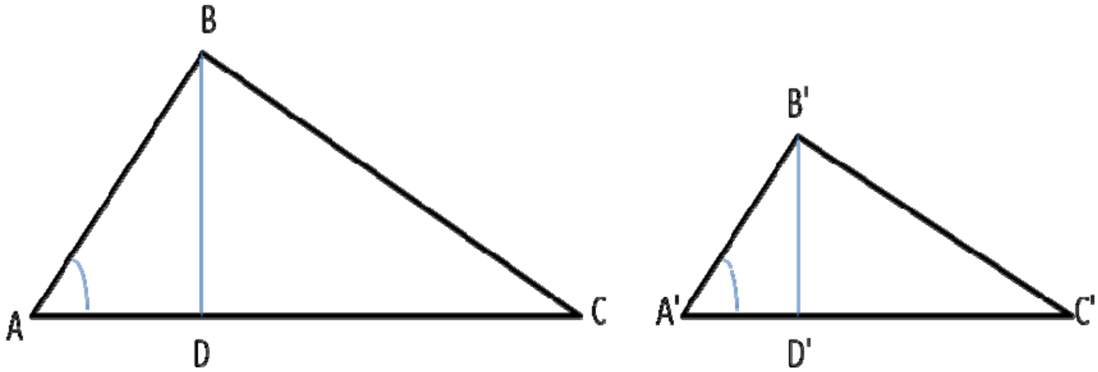
2. Los catetos proporcionales






Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ , entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Y $\llcorner A = \llcorner A'$

3. La hipotenusa y un cateto proporcionales



$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ , entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

- **Proporcionalidad de las Alturas de dos Triángulos Semejantes.**

Las alturas correspondientes de dos triángulos semejantes son proporcionales a sus lados.

En efecto: los lados ABD y ABD (figura) son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo agudo igual $\measuredangle A = \measuredangle A'$ .

Luego: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}}$ .

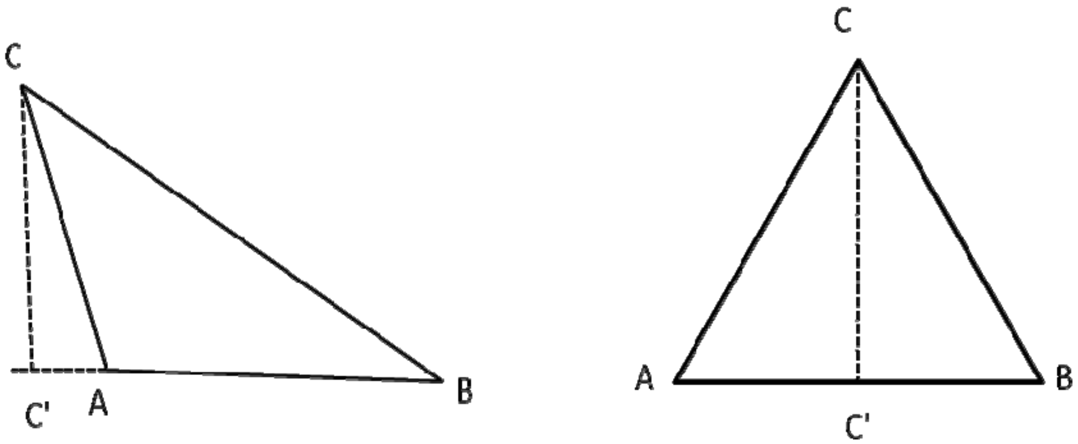
- **Relaciones Métricas en los Triángulos.**

**Proyecciones:**

Se llama proyección de un punto P sobre una recta al pie P' de la perpendicular bajada a la recta desde el punto. La perpendicular se llama proyectante.

- **Proyecciones de los lados de un Triangulo:**

Sea los triángulos ABC



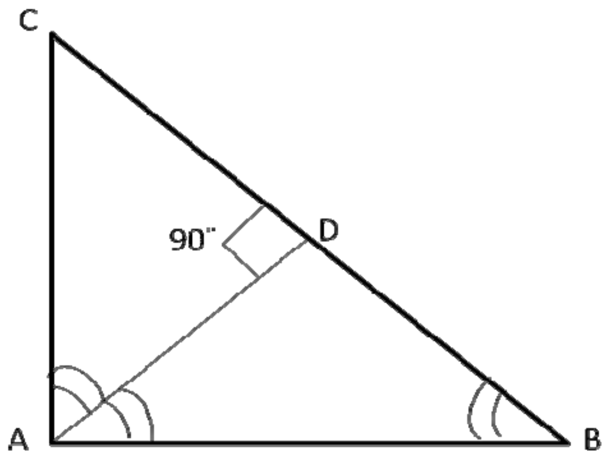

Están representadas las proyecciones de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de los triángulos $\Delta ABC$, sobre el lado $\overline{AB}$. Las proyecciones se expresan de la siguiente manera:

Proyecc$_{AB}$ $\overline{AC} = \overline{AC'}$ Y Proyecc$_{AB}$ $\overline{BC} = \overline{BC'}$.



- **Teorema 2:**

Si en un triangulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, se verifica:




a. Los triángulos rectángulos resultantes son semejantes entre si y semejantes al triangulo dado.
$Si\ \ \Delta ADC \sim \Delta ABC\ y\ \ \Delta ADB \sim \Delta ABC,\ \Delta ADC \sim \Delta ADB$.



b. La altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a esta.

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\ .$$

c. La altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a esta.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

d. Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

e. La razón de los cuadrados de los catetos es igual a la razón de los segmentos que la altura determina en la hipotenusa:

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

Ahora bien, podemos notar en las proposiciones anteriores que existen términos que no se han definido formalmente, por lo tanto se definirán a continuación:

1. Cuarta Proporcional: Se llama cuarta proporcional de tres cantidades $a, b, c$ , a un valor $x$ , que cumple la condición:



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

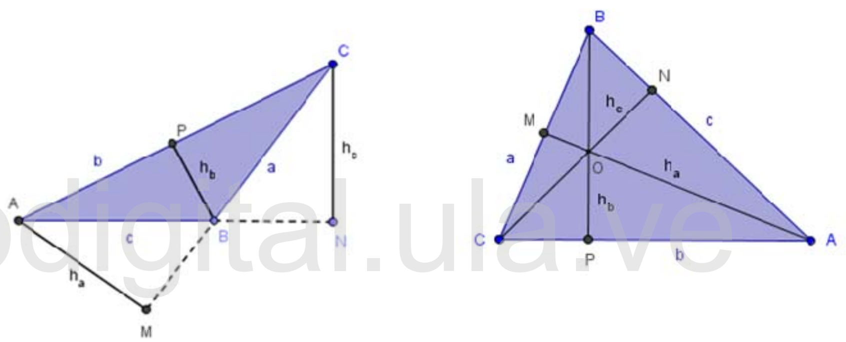
2. Tercera Proporcional: Se llama tercera proporcional a dos cantidades $a$ y $b$ a un valor $x$ que cumpla la condición: $$\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$$

3. Media Proporcional: Se llama media proporcional a dos cantidades $a$ y $b$ a un valor $x$ que cumpla la condición : $$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

- **Altura.**

Es la perpendicular trazada desde un vértice, al lado opuesto o su prolongación: $\overline{AM}, \overline{BP}$ y $\overline{CN}$.

Hay tres alturas, correspondientes a cada lado. Se designa con la letra $h$ y un subíndice indica el lado. $\overline{AM} = h_a$, $\overline{BP} = h_b$, $\overline{CN} = h_c$.

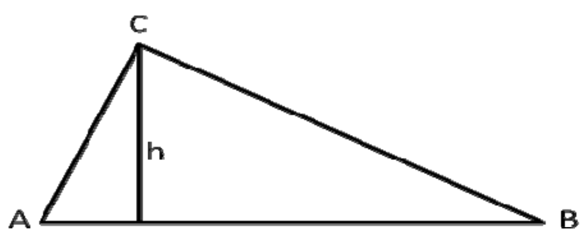





- **Área de un Triangulo.**

Si la altura de un triangulo $ABC$ mide $h$, y la base correspondiente a $h$ mide $b$ , tenemos que el área del triangulo $ABC$ es:

$$\frac{1}{2}.h.b$$



- **Cuadrilátero.**

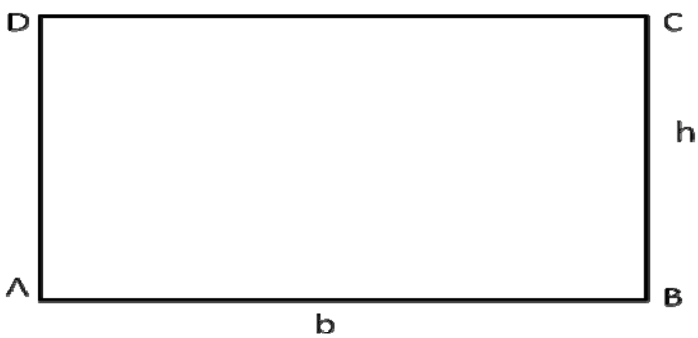
Figura geométrica formada por los segmentos que unen cuatro puntos del plano no alineados tres a tres, y del tal forma que cada uno de esos puntos sea el extremo de exactamente dos de esos segmentos y dichos segmentos no se interceptan salvo en sus extremos.

- **Proposición:** Dos Cuadriláteros son congruentes tienen la misma área.

- **Área de un Rectángulo.**



El área de un rectángulo es el producto de dos lados consecutivos.

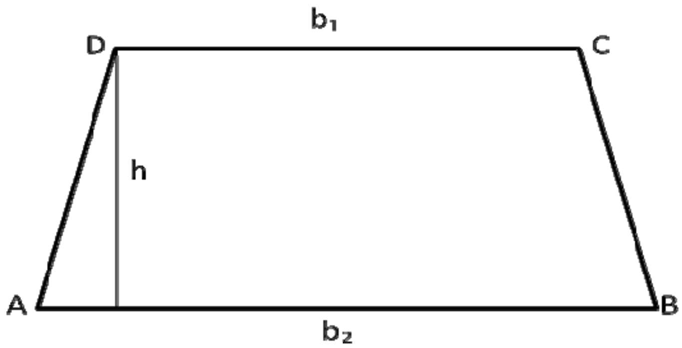



El área del rectángulo $ABCD$ es $b.h$ .

- **Área de un Trapecio.**

El área de un trapecio es el producto de la semisuma de las bases (el par de lados paralelos) por la altura correspondiente (la distancia entre los dos lados paralelos), es decir, si $ABCD$ es un trapecio con $AB \text{ Y } CD$ paralelos y estos lados midiendo $b_1$ y $b_2$ respectivamente, $h$ es la distancia entre los lados paralelos, tenemos que el área del trapecio $ABCD$ es:

$$\frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$$






- **Resultado (Euclides, Libro I Proposición 41):** si un paralelogramo tiene la misma base que un triangulo y esta contenido entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triangulo.

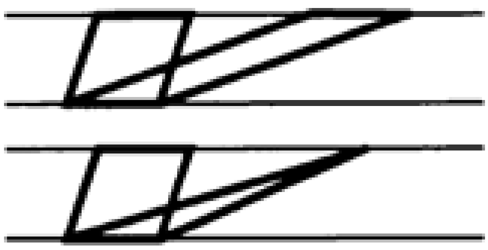


***Figura 5.*** Proposición 41

- 
- 
- **Los dos teoremas de Tales:**

**Teorema primero:** Si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

**Teorema segundo:** Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C. Entonces el ángulo ABC, es recto.

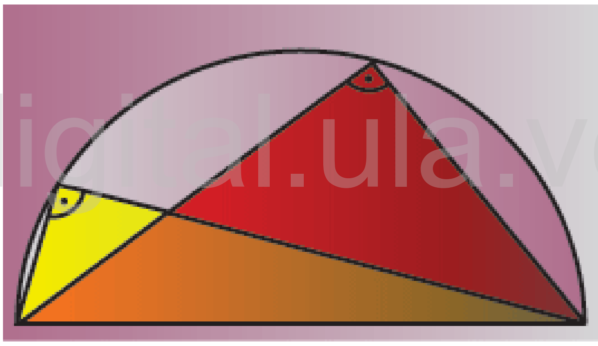


***Figura 6.*** Semicírculos(Teorema de Thales)

- **Polígono.**

Figura geométrica plana, limitada por una poligonal cerrada que no se corta a sí misma.

- **Clasificación de los Polígonos:**

Los polígonos se clasifican básicamente en:

- polígonos regulares

- polígonos irregulares

- **Polígono Regular:**

Polígono en el cual todos sus lados son de igual longitud, y todos sus vértices están circunscritos en una circunferencia. Se clasifican en:

- triángulo equilátero: polígono regular de 3 lados,
- cuadrado: polígono regular de 4 lados,
- pentágono regular: polígono regular de 5,
- hexágono regular: polígono regular de 6 lados,
- heptágono regular: polígono regular de 7 lados,
- octágono regular: polígono regular de 8 lados,... y así sucesivamente.



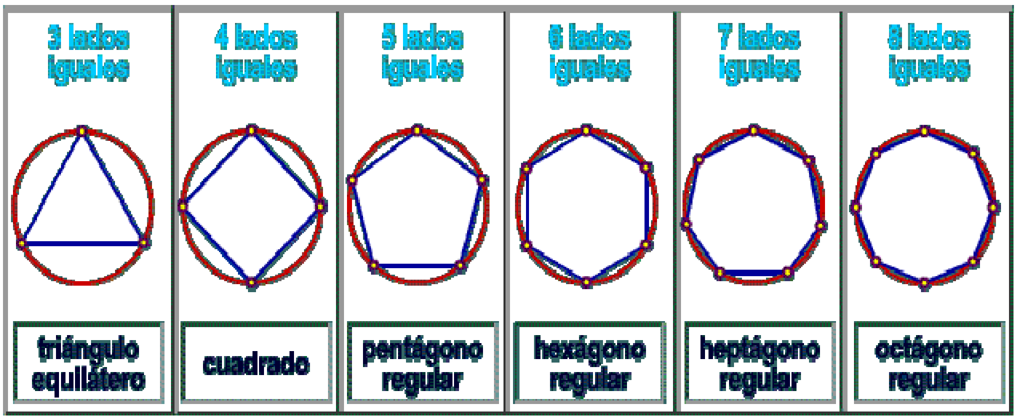



***Figura 7.*** Polígonos Regulares.

## 4.4 Demostraciones Clásicas del Teorema de Pitágoras.

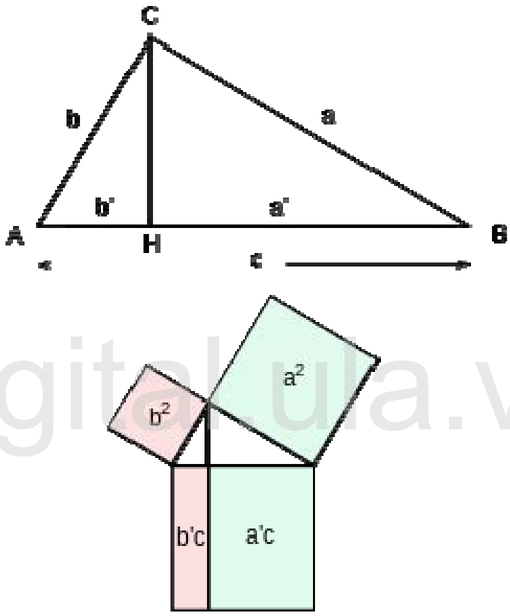
Quizá ningún teorema de la extensa Matemática haya recibido tantas demostraciones como el Teorema de Pitágoras. Bien puede decirse, por ello, que este teorema y la multitud de demostraciones del mismo que se han dado a lo largo de la historia constituyen una prueba fehaciente de que hay muchos caminos para alcanzar la verdad.

En la Edad Media esta proposición se la consideraba la base de toda sólida formación matemática. En algunos centros docentes además de exigir, para obtener el grado de maestro, un profundo conocimiento del Teorema, se obligaba a exhibir una nueva y original demostración del mismo, por eso el Teorema de Pitágoras alcanzó la honrosa designación de "Magister matheseos". Este hecho y la gran significación del teorema explica la razón de las innumerables demostraciones que los matemáticos y no matemáticos de todas las épocas y personajes tan diversos como filósofos, monjes, políticos, juristas, ingenieros y artistas, han encontrado del más famoso Teorema de la Geometría.

A continuación se describirán, algunas de las más famosas demostraciones, que lo son, tanto porque se les ha podido atribuir a un personaje histórico concreto, matemático o no, como porque gozan de una gran claridad y sencillez.

- **4.4.1.-Demostración Atribuida a Pitágoras (Semejanza).**

  En todo triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.






La demostración que se desarrolla a continuación, históricamente se conoce como la demostración hecha por el mismo Pitágoras. Aunque existen muchas dudas y versiones de la pertenencia de la misma a dicho personaje.

Hipótesis:

- $\Delta ABC$ es rectángulo en $\measuredangle C$.
- $a$ , $b$ son los catetos.
- $c$ es la hipotenusa.

Tesis: $c^2 = a^2 + b^2$

**Construcción Auxiliar:**

- El segmento $CH$ es la altura correspondiente a la hipotenusa la cual genera los segmentos $a'$ y $b$.
- $a'$ y $b$ son las proyecciones de los catetos $a$ y $b$ respectivamente.

Se cree que Pitágoras se baso en la semejanza de triángulos: $ABC$ ,$AHC$ y $BHC$

Se realizara la demostración utilizando como herramienta principal la semejanza de triángulos.

1. Semejanza entre $\Delta ABC$ y $\Delta AHC$

$$\measuredangle H = \measuredangle C \qquad Rectangulos.$$



$$\measuredangle A = \measuredangle A \qquad Común.$$

Generalmente un triangulo es semejante a otro si tiene n ángulos iguales, ahora bien por ser rectángulo esa propiedad se reduce, tomándose en cuenta solo un ángulo agudo igual.

Por hipótesis tenemos que él triangulo es rectángulo, lo que permite afirmar que:

$\Delta ABC \sim \Delta AHC$, Por ser ambos rectángulos y tener un ángulo agudo igual.

2. Semejanza entre $\Delta ABC$ y $\Delta BHC$

$$\measuredangle H = \measuredangle C \qquad Rectangulos$$

$\measuredangle B = \measuredangle B \quad Común$

Siguiendo el análisis anterior, tenemos:

$\Delta ABC \sim \Delta BHC$, Por ser ambos rectángulos y tener un ángulo agudo igual.

3. Como: $\Delta ABC \sim \Delta AHC$ y $\Delta ABC \sim \Delta BHC$ .

Entonces por transitividad: $A{\sim}B \ Y \ A{\sim}C \quad entonces \ B{\sim}C$, aplicando dicho criterio obtenemos:

$$\Delta AHC \sim \Delta BHC.$$



Ya que se comprobó la semejanza entre los triángulos $ABC\ , AHC\ y\ BHC$, vamos a usar dichos resultados de la siguiente manera:

1. De la Semejanza de $\Delta ABC \ \ y\ \Delta AHC$ tenemos:
   - ✓ $\measuredangle H = \measuredangle C \ \ Rectos$
   - ✓ $\measuredangle A = \measuredangle A \ \ Comunes$
   - ✓ $\measuredangle B = \measuredangle C \ \ Semejanza$

   Así:

   $\frac{c}{b} = \frac{b}{b'} \ (1)$

2. De la Semejanza de $\Delta ABC \ y \ \Delta BHC$

- ✓ $\measuredangle H = \measuredangle C \ \ Rectos$
- ✓ $\measuredangle B = \measuredangle B \ \ Comunes$
- ✓ $\measuredangle A = \measuredangle C \ \ Semejanza$

Así:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{a'} \quad (2)$$

De (1) y (2)



$$c.b' = b^2 \quad (3)$$

$$c.a' = a^2 \quad (4)$$

Sumando (3) y (4) , tenemos:

$$c.b' + c.a' = b^2 + a^2$$

$$c(b' + a') = b^2 + a^2$$

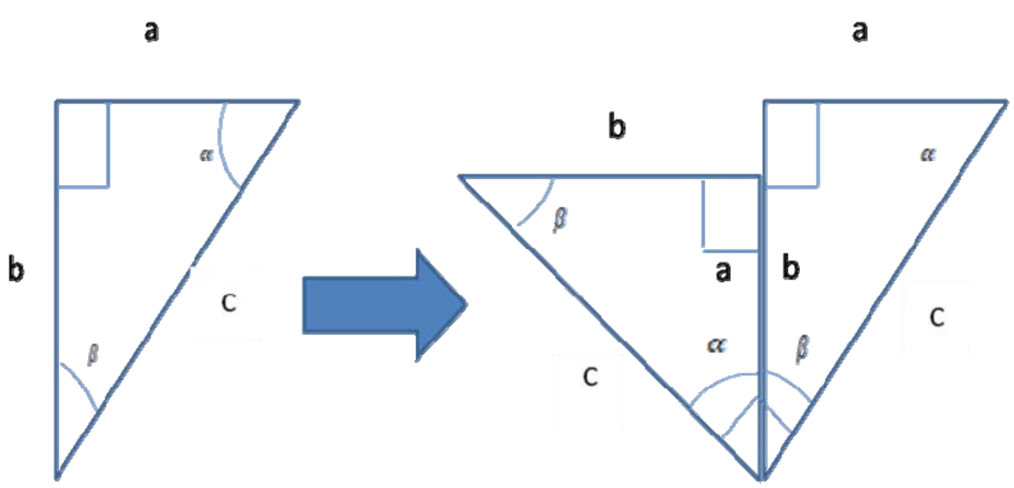
$b' + a' = c$ Ya que son los segmentos generados por la altura correspondiente de la hipotenusa.

$$c.c = b^2 + a^2$$

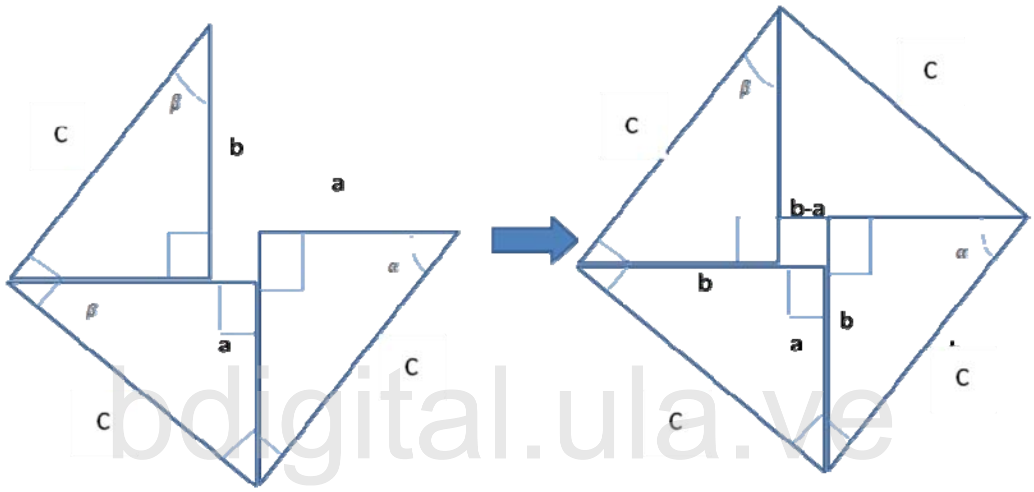
$$c^2 = b^2 + a^2 \ \blacksquare$$

### 4.4.2.-Demostración (Prueba India debida a un matemático llamado Baskara, 1150 d.C).

Consideremos un triangulo rectángulo de hipotenusa $c$, y catetos $a$ $y$ $b$, y supongamos que $b \geq a$. Se formara a partir de este triangulo un cuadrado de lado $c$ como se mostrara en las figuras a continuación:



Obsérvese en la figura anterior, que el ángulo generado por las dos hipotenusas es de $90°$, ya que $\alpha + \beta = 90$. De la misma forma que antes, pegamos a esta figura el mismo triangulo como se observa en la siguiente figura y así sucesivamente hasta generar un cuadrado. Siempre el ángulo generado por la hipotenusa es de $90°$




El mismo triangulo rectángulo se repite 4 veces, (destacando que los 4 triángulos son semejantes) formando un cuadrado de lado $c$ y además en el interior de este cuadrado, gracias a que el triangulo es rectángulo, obtenemos un cuadrado más pequeño de lado $b - a$ . Entonces sabemos que, el área del cuadrado de lado $c$ es $c^2$ que es igual a la suma del área de los cuatro triángulos más el área del cuadrado pequeño de lado $b - a$.

Así.

$$c^2 = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + (b - a)^2$$

Agrupando.

$$c^2 = 4.\frac{ab}{2} + (b-a)^2$$

Desarrollando el producto notable.

$$c^2 = 4.\frac{ab}{2} + b^2 - 2ab + a^2$$

Simplificando.

$$c^2 = \cancel{2ab} + a^2 - \cancel{2ab} + b^2$$

Finalmente.

$$c^2 = a^2 + b^2 \blacksquare$$

### 4.4.3.-Demostración (James Garfield 1875)

Esta ingeniosa demostración se llama así en honor a James Garfield. La concibió unos años antes de ser el vigésimo presidente de los Estados Unidos, y fue publicada alrededor de 1875 en el New England of Education.

Recordaremos algunas de las definiciones expuestas en la sección 4.3.

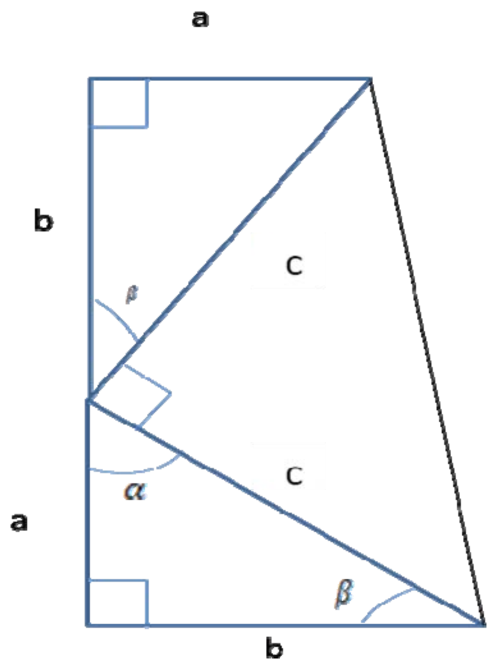


a) $Area\ del\ triangulo\ \frac{b.a}{2}$

b) $Area\ del\ Trapecio\ \frac{b_1+b_2}{2}.$ □

c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

La demostración se basa en la figura de un trapecio, el cual fue construido a partir de un triangulo rectángulo, donde la base está conformada por $a\ y\ b$, siendo $a\ y\ b$ catetos del triangulo cuya hipotenusa mide $c$, por lo tanto la altura de dicho trapecio será $a+b$. Como se puede observar en la siguiente figura.






Observando la figura podemos ver que se formo un trapecio, y el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de los 3 triángulos que lo conforman. Observemos q dos de ellos son semejantes y el otro isósceles rectángulo pues $\alpha + \beta = 90$. Así,

$$2.\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = Area\ del\ Trapecio$$

Aplicando la definición de área en el trapecio obtenemos.

$$2.\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)}{2}(a+b)$$

Sacando factor común $\frac{1}{2}$ y resolviendo los productos notables.

$$\frac{1}{2}(2ab + c^2) = \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

Multiplicando por 2,

$$2ab + c = a^2 + 2ab + b^2$$

Agrupando.

$$2ab + c^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

Simplificando.

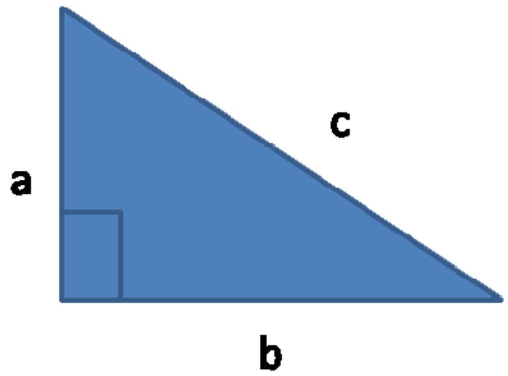
$$\cancel{2ab} + c^2 - \cancel{2ab} = a^2 + b^2$$

Finalmente.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

**4.4.4.-Demostración (Clásica).** Esta simple demostración pudo haber sido la demostración que los pitagóricos imaginaron.

Consideremos un triangulo rectángulo de lados c, a, b, dicho triangulo lo llamaremos T.




Construyamos a partir de este triangulo un cuadrado de lado $a+b$ como se observa en las siguientes figuras.



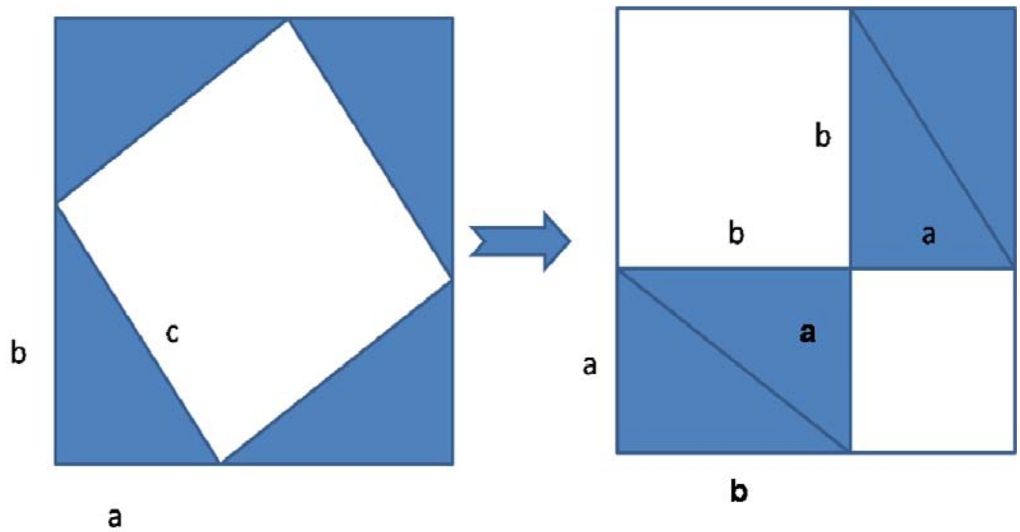



Figura (1) Figura (2)

En la figura 1 observamos que el triangulo T se repite 4 veces sabemos que todo triangulo es congruente así mismo como se muestra en el primer carácter de semejanza reflejado en la sección 4.3, por tanto tenemos 4 triángulos congruentes (iguales). Notemos que los 4 triángulos son congruentes al triangulo T y que a su vez los mismos generan un cuadrado de lados $c$ y por tanto dicho cuadrado posee un area de $c^2$.

Ahora bien hallemos el área del cuadrado de las $a+b$ de la figura (1).

$$Area\ de\ la\ figura\ (1) = 4\frac{(a.b)}{2} + c^2$$

Donde el primer termino refleja el área de los 4 triángulos T y el segundo termino el área del cuadrado del centro.

Luego se mueven los triángulos dentro del cuadrado de lado $a+b$ de forma tal que se forme la figura 2, la cual refleja dos cuadrados más pequeños dentro del mismo uno de lado $a$ y el otro de lado $b$, y a su vez los mismos 4 triángulos T en posiciones diferentes a la principal.

Posteriormente hallemos el área del cuadrado de lados $a+b$ de la figura (2).

$$Area\ de\ la\ figura\ (2) = a^2 + b^2 + 4\frac{(a.b)}{2}$$

Donde los dos primeros términos representan las áreas de los cuadrados de lado $a$ y $b$ respectivamente y el ultimo termino el área de los 4 triángulos T que se reflejan en la figura.

Como podemos ver tenemos 2 cuadrados de lados $a+b$ por tanto su área debe ser igual, ya que 2 cuadriláteros congruentes ocupan la misma área y dicho cuadrado son congruentes debido al teorema de semejanza de cuadriláteros LLLL. Entonces:

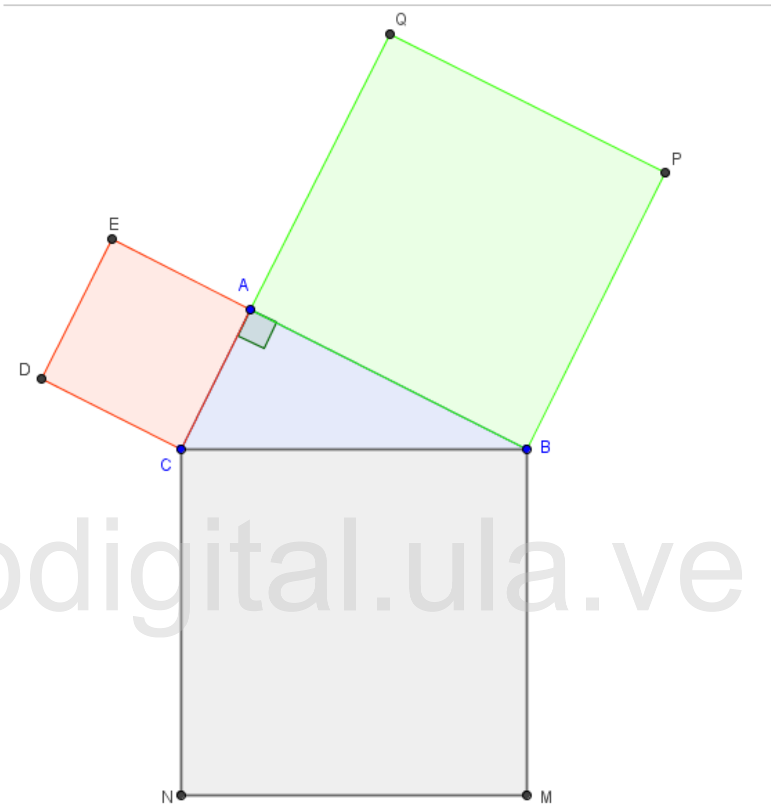
Igualando $Area\ de\ la\ figura\ (1) = Area\ de\ la\ figura\ (2)$

Sustituyendo $4\frac{(a.b)}{2} + c^2 = a^2 + b^2 + 4\frac{(a.b)}{2}$

Resolviendo $\cancel{2(a.b)} + c^2 = a^2 + b^2 + \cancel{2(a.b)}$

Finalmente $c^2 = a^2 + b^2$ 

### 4.4.5.-Demostración (Euclides, libro I de los Elementos, proposición 47)

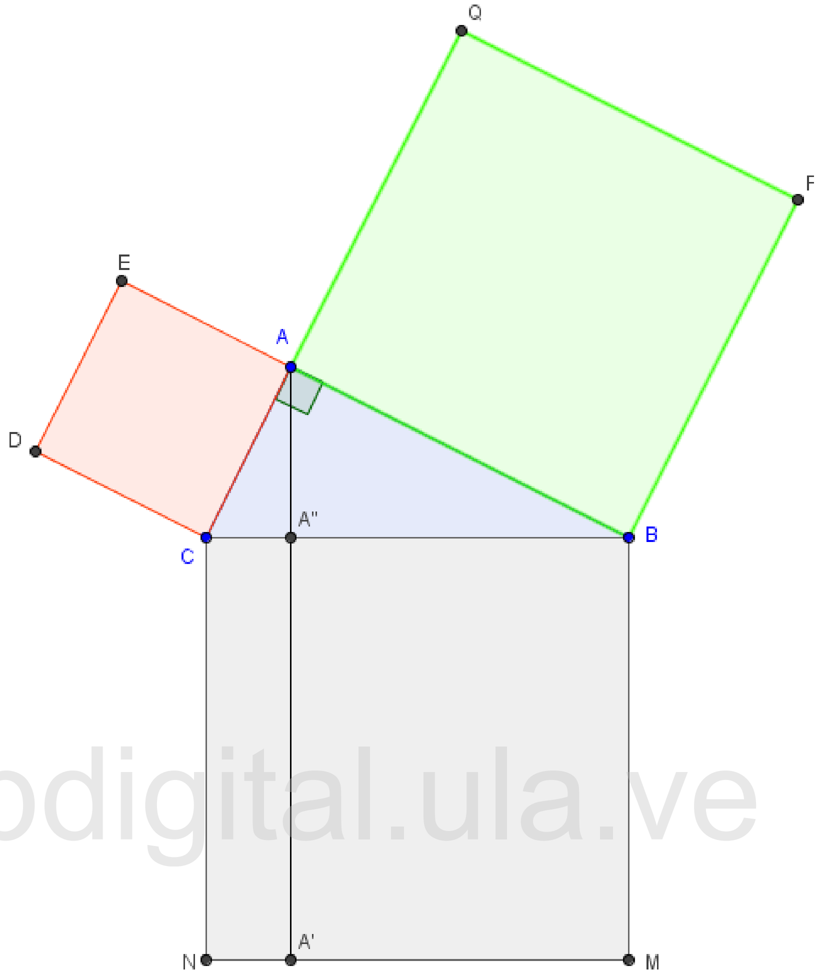





En todo triangulo rectángulo el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto.

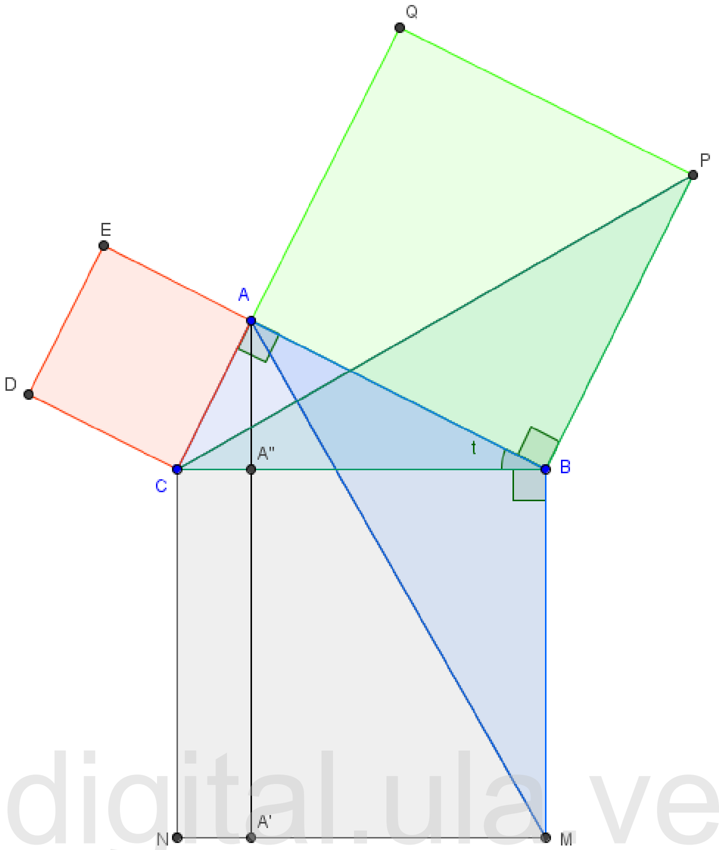
La demostración de Euclides consiste en probar que área del cuadrado $NMBC$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados $ABPQ$ Y $ACDE$.

Para ello trazamos por $A$ una perpendicular a $CB$ que corta a $MN$ en $A'$ y divide al cuadrado inferior en dos rectángulos $A'MBA'$ y $NA'A''C$. Como se puede observar en la siguiente figura.






Luego unimos $A$ con $M$ y $C$ con $P$. Generando la figura a continuación.






Los triángulos $MBA$ y $CBP$ son iguales pues tienen un angulo común $\beta = 90° + t$ , e iguales lados que lo determinan $BP = AB$ y $BM = BC$.

Considerando como la base del triangulo $MBA$ el lado $MB$ , la altura $MA'$ , con dichos datos hallaremos el Área del triangulo $MBA$ .

$$Area\ del\ triangulo\ MBA = \frac{(MB \times MA')}{2}$$

La cual coincide con la mitad del área del rectángulo $A'A''BM$ .

Considerando ahora como base del triangulo $BCF$ el lado $BP$ , su altura es $PQ$, por lo que el Área del triangulo $BCF$ es:

$$\text{Area del triangulo } BCP = \frac{(BP \times PQ)}{2}$$

Igual que la mitad del área del rectángulo $BPQA$.

Como los triángulos $MBA$ y $BCF$ son iguales, sus áreas también lo son, por lo tanto:

Igualando $\quad \mathit{Area\ del\ triangulo\ MBA} = \text{Area del triangulo } BCP$

Sustituyendo $\quad \frac{(MB \times MA)}{2} = \frac{(BP \times PQ)}{2}$

Multiplicando por 2 $\quad (MB \times MA) = (BP \times PQ)$

En pocas palabras $\quad area(A'A''BM) = area(BPQA)$ .



De manera análoga, trazando los segmentos $AN$ y $BD$ , se prueba que:

$area(ACDE) = area(A'A''CN)$.

Finalmente se puede afirmar que:

$$area(A'A''BM) + area(A'A''CN) = area(NMBC)$$

Por lo tanto.

$$area(NMBC) = area(ACDE) + area(BPQA) \ \blacksquare$$

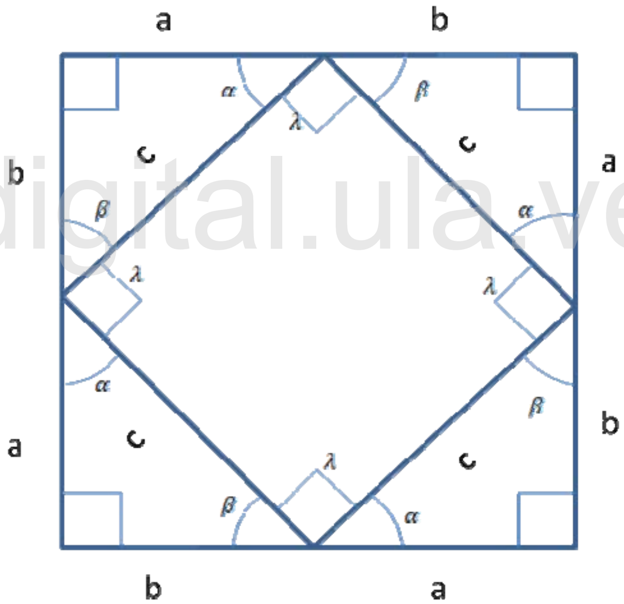
### 4.4.6.-Demostración (Llamada Prueba China).

Si un triangulo tiene lados de longitud (a,b,c), con los lados (a, b) formando un ángulo recto (90°) tenemos que:

$c^2 = b^2 + a^2$

Se hará uso de las herramientas expuestas en la sección 4.3.

Seleccionando 4 triángulos iguales de lados (a, b, c) y colocándolo de la siguiente manera.




Haciendo un estudio de los ángulos que se muestran en la figura.

$\alpha + \beta = 90$

$\alpha + \beta + \lambda = 180$

Es así como despejando $\lambda$ , obtenemos: $180 - 90 = \lambda \Rightarrow \lambda = 90$ .

Podemos observar que la forma en cómo fueron ubicados los 4 triángulos permitió que se generara un cuadrado de lados c, el ángulo $\lambda = 90$ y sus lados son iguales por lo tanto es un cuadrado.

Recordemos que el área de cada triangulo es $\frac{b.a}{2}$ y el área del cuadrado $c^2$.

Se puede apreciar también que se genero un cuadrado más grande de lados $(a + b)$ , y el área de dicho cuadrado es igual a la suma de las partes, tenemos entonces:

$$(a + b)^2 = 4.\frac{1}{2}a.b + c^2$$

Resolviendo en ambos lados:



$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Agrupando:

$$a^2 + \cancel{2ab} - \cancel{2ab} + b^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ordenando:

$$c^2 = a^2 + b^2 \blacksquare$$

## 4.5 Generalización de la Versión Euclidiana del Teorema de Pitágoras para Polígonos Regulares.

A lo largo de este capítulo se ha estudiado exhaustivamente el maravilloso Teorema de Pitágoras, recordemos que se enuncia de la siguiente manera:

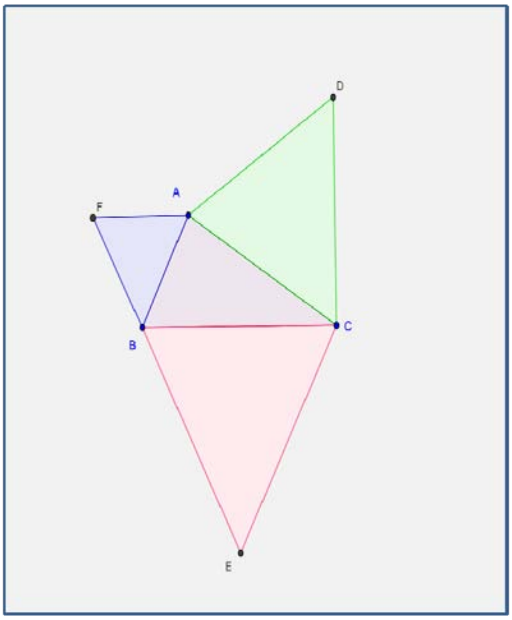
Algebraica: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Geométrica: En un triangulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos.

Ahora bien trabajando con una visión meramente geométrica, si en vez de construir un cuadrado, sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo, construimos otro polígono regular, ¿seguirá siendo cierto, que el área del polígono regular construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los polígonos regulares semejantes construidos sobre los catetos?

Para poder responder dicha pregunta, vamos a enunciar y a demostrar formalmente el teorema de Pitágoras generalizado para polígonos regulares.

Comenzaremos con el polígono regular de tres lados, el triangulo equilátero, considérese un triangulo rectángulo $\Delta ABC$, y se construye un triangulo equilátero sobre la hipotenusa .Si en los catetos se construyen triángulos equiláteros semejantes al triangulo equilátero construido sobre la hipotenusa, entonces el área del triangulo equilátero correspondiente a la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos.






$Area(\Delta ACD) = Area(\Delta BCE) + Area(ABF)$ ■

La demostración de dicho teorema, se dejara al lector y nos enfocaremos en elaborar una demostración para los polígonos regulares de lado $n$ ya que sería un resultado más general, permitiendo que de esta manera se pueda tener un patrón para cualquier polígono regular. Veamos.

Si se construyen polígonos regulares semejantes, de n lados, sobre los lados de una triangulo rectángulo dado, muestre que el área del polígono construido sobre la hipotenusa es la suma de las áreas de los polígonos regulares construidos sobre los catetos.

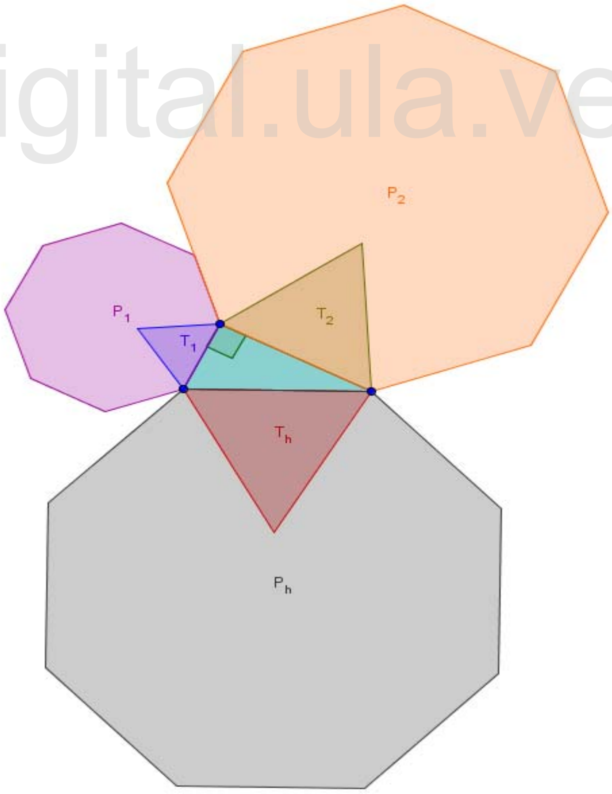
**Demostración:**

Considérese un triángulo rectángulo $\Delta ABC$.Sobre la hipotenusa construimos un polígono, de $n$ lados, regular de lado igual a la hipotenusa. De igual forma construimos sobre los catetos polígonos de $n$ lados, regulares semejantes al construido sobre la hipotenusa.

Denotemos por $P_h$ el área del polígono construido sobre la hipotenusa, por $P_1$ y $P_2$ el área de los polígonos construidos sobre los catetos, entonces para obtener el teorema debemos probar que: $P_h = P_1 + P_2$.

Construyamos tres triángulos equiláteros cuyos vértices son los centros de cada polígono y los vértices del triangulo rectángulo.





Como los polígonos son semejantes entre sí. Denotemos por $T_h$ el área del triangulo sobre la hipotenusa, por $T_1$ y $T_2$ el área de los triángulos sobre los catetos.

El área de los polígonos está determinada por la sumas de los triángulos internos del mismo por tanto $P_h = n.T_h$ , de la misma forma $P_1 = n.T_1$ y $P_2 = n.T_2$.

Ahora bien, como los triángulos son semejantes tomando el resultado del teorema general para triángulos equiláteros, se tiene que,

$T_h = T_1 + T_2$

Multiplicando por $n$ , se sigue.

$P_h = n.T_h = n.(T_{1+} T_2) = n.T_{1+} nT_2 = P_1 + P_2$ ■

## CAPÍTULO V

### Demostraciones Seleccionadas del Teorema de Pitágoras

En este capítulo se presentaran las demostraciones seleccionadas que se realizaron utilizando GeoGebra 3.2, se explicará detalladamente el proceso para llevar a cabo las demostraciones en dicho software educativo, es decir se mostrara paso a paso la construcción de cada una de ellas y a su vez se hará referencia de los fundamentos matemáticos que se emplearon para que de esta manera el lector tenga una mejor comprensión de los resultados obtenidos.

GeoGebra se puede utilizar para facilitar la enseñanza de ciertos temas geométricos, en nuestro caso nos ayudará a elaborar las demostraciones del teorema más importante de la geometría, el Teorema de Pitágoras, las cuales se encuentran expuestas en el capítulo anterior.



Así mismo se hará un invitación formal al lector para que realice una revisión minuciosa del Trabajo de Investigación: **GEOGEBRA, Una Propuesta para su Autoaprendizaje y Utilización como Herramienta Tecnológica por parte de Estudiantes de Educación Mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario "Rafael Rangel" ( Hernández Fanny , 2010).**

Por otra parte, se anexara al trabajo de investigación, un CD donde el usuario tendrá acceso a las demostraciones antes mencionadas. Para ello se debe instalar en principio el Java y luego el software educativo GeoGebra 3.2, para posteriormente acceder a los archivos en formato GeoGebra los cuales vienen identificados por la extensión (.ggb). De esta manera el lector podrá hacer un estudio detallado de dichas con

## 5.1 GeoGebra.

**GeoGebra** (**Geo**metría + Al**gebra**) es un software matemático interactivo para la educación en colegios y universidades, es de libre y fácil manipulación porque cuenta con un proceso de instalación automático y sencillo, así mismo la definición de variables y creación de archivos se puede realizar de forma simple, de igual manera la importación y exportación de datos se efectúa con formatos conocidos. Su principal ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en la pantalla: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica.

Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida. **GeoGebra** está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.



GeoGebra es un sistema de geometría dinámica que permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, polígonos, secciones cónicas, funciones, que a posteriori se pueden modificar dinámicamente. Así como también permite disfrutar de las aplicaciones con animaciones y la posibilidad de manipulación de los objetos geométricos a través de cualquier navegador de internet mediante applets interactivos (permiten al usuario modificar algún parámetro y observar el efecto que se produce en la pantalla).

Otro aspecto de gran importancia es, que no se necesitan muchos conocimientos previos de informática para utilizarlo, de hecho se puede aprender a manipularlo en corto periodo de tiempo, este software posee tal sencillez en su entorno de trabajo que permite ejecutar los comandos vía menú o a través de la edición en el campo de entrada de una manera fácil e intuitiva.

Se puede afirmar que GeoGebra es "relativamente pequeño" en relación a otros programas para matemáticas, los cuales son más complicados y no tienen establecidas fronteras para su utilización; caso contrario sucede con GeoGebra.

Luego de haber reseñado brevemente el software educativo GeoGebra, se hace una invitación formal al lector a que estudie y practique de manera detalla **El Manual GEOGEBRA** expuesto en el trabajo de investigación: **GEOGEBRA, Una Propuesta para su Autoaprendizaje y Utilización como Herramienta Tecnológica por parte de Estudiantes de Educación Mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario "Rafael Rangel"( Hernández Fanny , 2010).**



El Manual **GEOGEBRA** muestra una minuciosa explicación de cada uno de los elementos que posee el software GeoGebra, además posee una serie de ejemplos explicados paso a paso (con sus respectivas graficas) del uso de los iconos y algunos comandos de dicho programa.

El Manual **GEOGEBRA** le ayudara a entender al lector el uso y manejo del programa, así como también los procedimientos usados para el desarrollo de las demostraciones que se expondrán a lo largo de este capítulo.

## 5.2.- Demostraciones Clásicas del Teorema de Pitágoras Empleando GeoGebra 3.2.

A continuación se describirán, algunas de las más famosas demostraciones, del Teorema de Pitágoras, Empleando el software educativo GeoGebra, se explicará paso a paso (con sus respectivas graficas) cada uno de los procedimientos usados para la construcción.

Es importante destacar que los métodos que se utilizaron solo se presentan como una opción para la elaboración de las siguientes construcciones, el lector puede emplear procedimientos completamente distintos que le permitan obtener los mismos resultados.

### 5.2.1 Demostración (Atribuida a Pitágoras)



En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

- $\Delta ABC$ es rectángulo en $\measuredangle C$.
- $a\,,b$ son los catetos.
- $c$ es la hipotenusa.

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2$

Construcción Auxiliar:

El segmento $\overline{CH}$ es cual se ve reflejado en la ***figura 9***, es la altura correspondiente a la hipotenusa la cual genera los segmentos $a'$ y $b'$.

Para elaborar dicha demostración en GeoGebra se realizaron los siguientes pasos:

Primero se construye un triángulo para ello se usa la herramienta Polígono Regular, de la siguiente manera: Se hace clic sobre el modo "Polígono Regular" como se muestra en la ***figura 1*** y luego se ubica el mouse sobre la Zona Grafica.


***Figura 1***. Selección de Modo para Construcción de Polígonos.

Posteriormente se hace clic sobre uno de los vértices del triángulo, finalizando en el mismo punto de inicio para cerrar la figura. En la ***figura 2*** se muestra un ejemplo de un triángulo creado con este comando.

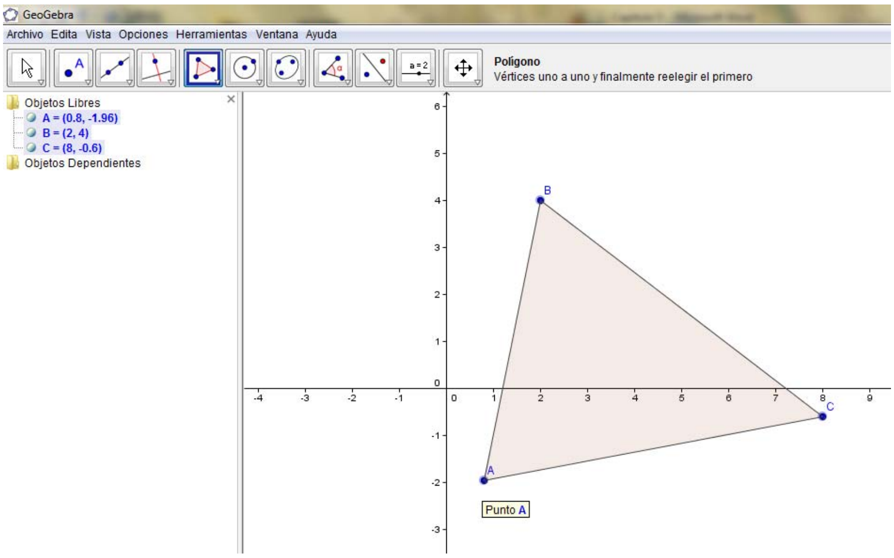



***Figura 2***. Usando Modo Área

Podemos apreciar en la figura anterior que no tenemos el triángulo adecuado para elaborar la demostración del Teorema de Pitágoras, ya que el teorema se basa en un triangulo rectángulo, por tanto se debe seguir un procedimiento adicional para formar el triángulo rectángulo que se desea. Para ello se usará el segundo teorema de Tales como fundamento matemático expuesto en la sección 4.3.



Sobre el segmento $AC$ del triángulo anterior se procederá a construir una semicircunferencia, se usa el sexto icono de la barra de herramientas la cual está compuesta por nueve (09) modos. Entre ellos el modo Semicircunferencia dados Dos Puntos el cual seleccionaremos. (***Ver Figura 3***)

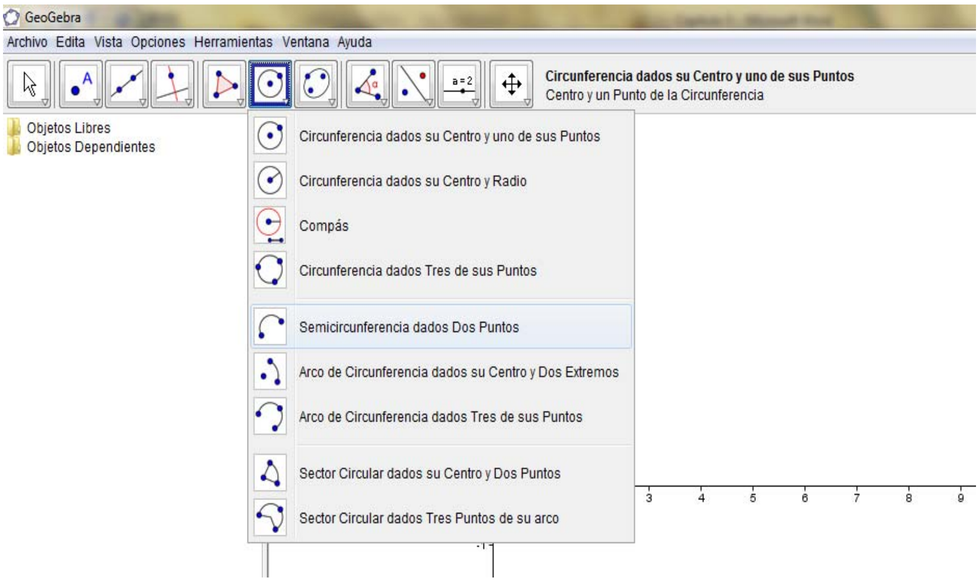



***Figura 3***. Selección de Modo Semicircunferencia dados Dos Puntos.

Luego en la zona gráfica se hace clic sobre las coordenadas de los vértices $A$ y $C$ del triángulo construido previamente. (***Ver figura 4***)



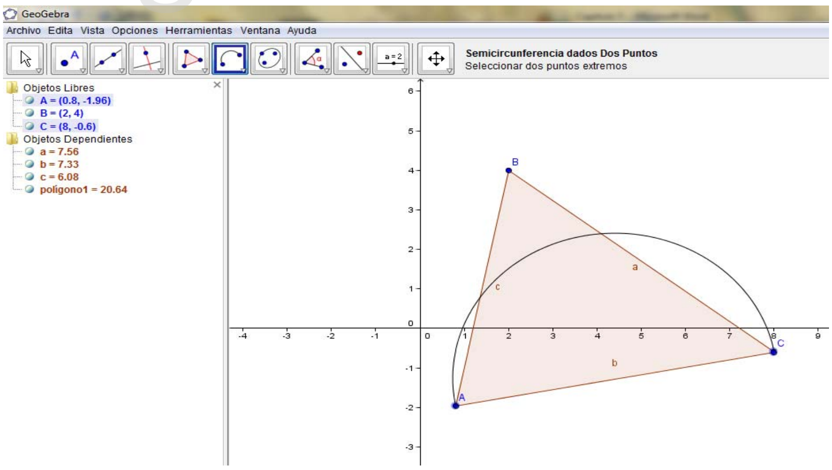



***Figura 4.*** Usando el Modo Semicircunferencia dados Dos Puntos

Ahora se debe colocar un punto sobre la semicircunferencia, para ello se usa  el segundo ícono de la barra de herramientas. (***Ver Figura 5***)

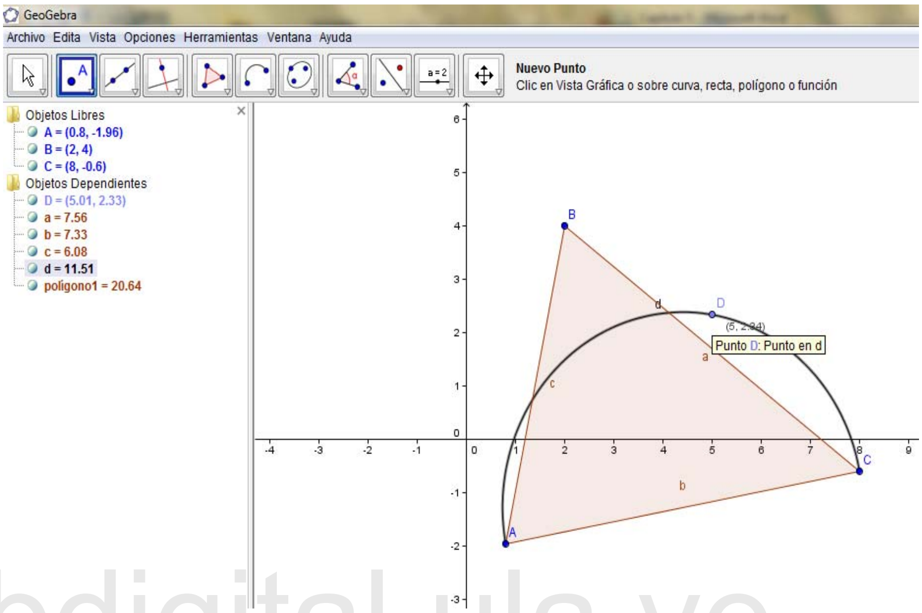



***Figura 5.*** Construcción del Punto "D".



El punto *D* pose una definición, la cual se selecciona colocando el puntero en dicho punto y haciendo clic derecho, desplegándose la ventana propiedades, seguidamente se copia la definición de dicho punto como se muestra en la ***figura 6***.

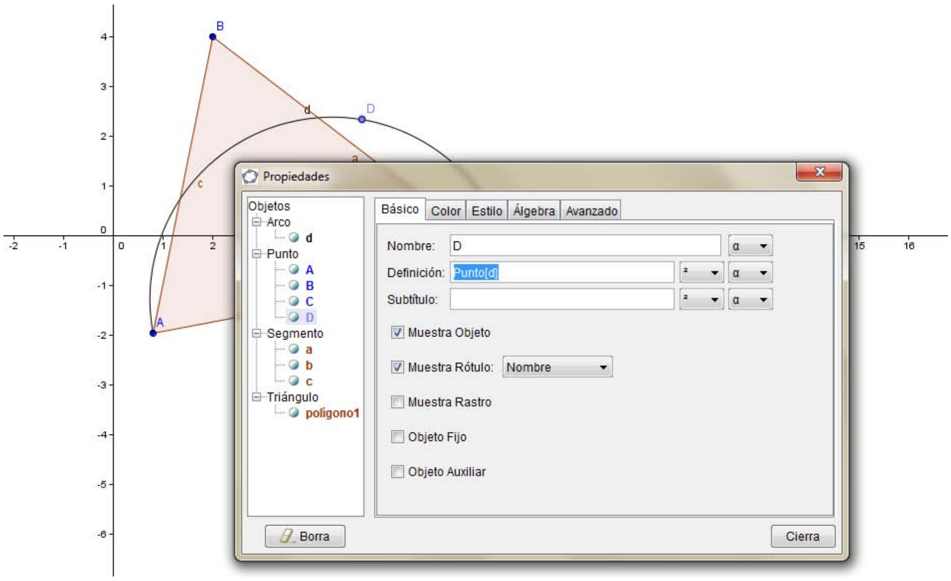



***Figura 6***. Ventana Emergente Propiedades.

Dicha definición se utiliza para redefinir la posición del vértice $B$, como se muestra en la ***figura*** *7*. Se puede apreciar que en la ventana se visualizan las opciones: Muestra Objeto, Muestra Rótulo, las cuales están seleccionadas, si se desea dejar de "mostrar" el nombre de cualquier objeto solo se debe acceder a la ventana de propiedades y eliminar la selección de la opción **Muestra Rótulo**; en el caso de desear ocultar el objeto completamente se debe eliminar la selección de la opción **Muestra Objeto**. También se puede observar que se muestra el nombre del objeto seleccionado en este caso el vértice $B$, el cual se puede cambiar según sea su gusto.

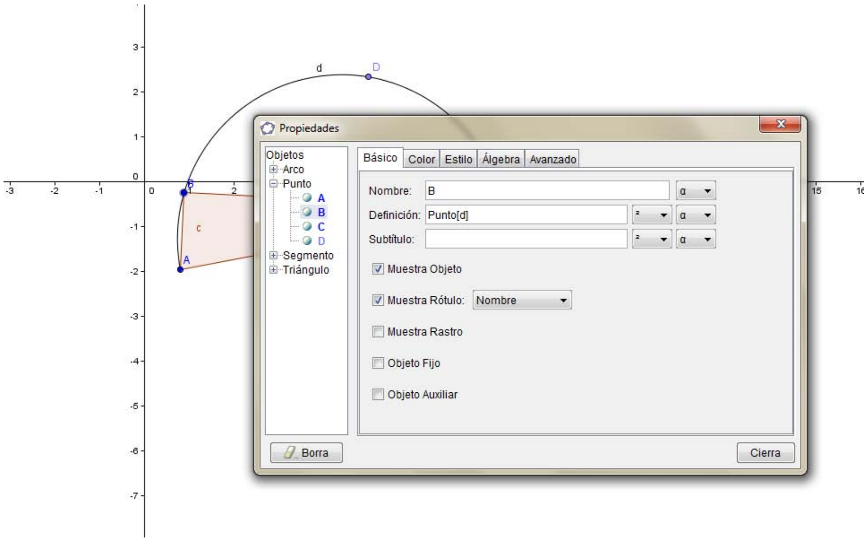



***Figura 7.*** Ventana Emergente Propiedades (Cambio de definición del Vértice *B*).

Es así como la ventana propiedades nos permite ocultar la semicircunferencia construida, así como también cambiar el nombre de los vértices y de los segmentos que forman los lados del triángulo. Finalmente se logra la construcción del triángulo rectángulo que se desea, y dicho resultado se puede apreciar en la ***figura 8***.



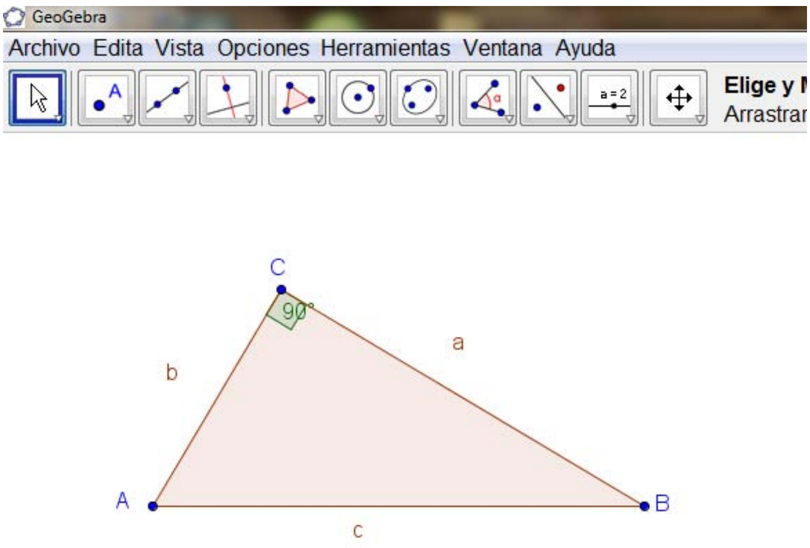



***Figura 8***. Triangulo Rectángulo.

Ahora se realizará una construcción auxiliar, se traza el segmento $\overline{CH}$ perpendicular a la hipotenusa, con la ayuda del tercer ícono de la barra de herramientas, específicamente se seleccionará: Segmento entre Dos Puntos. Haciendo clic en el vértice $C$ y deslizando el mouse hasta el segmento $\overline{AB}$ como se muestra en la ***figura 9***.

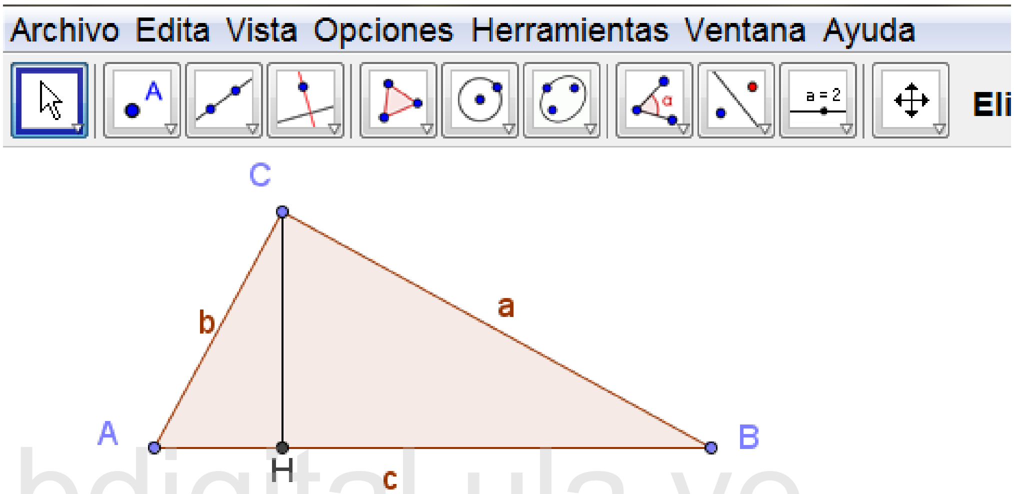





***Figura 9***. Construcción auxiliar del segmento $\overline{CH}$.

La construcción anterior originó los segmentos $\overline{AH}$ y $\overline{BH}$, los cuales se resaltaran con el modo: Segmentos entre Dos Puntos, haciendo clic en el vértice $A$ y cerrando en el punto $H$, de igual forma se hará con el segmento $\overline{BH}$, dichos segmentos se llamaran como $b'$ y $a'$ los cuales serán los nuevos rótulos de $\overline{AH}$ y $\overline{BH}$ respectivamente. Así como también haciendo clic en el ícono ocho de la Barra de Herramientas y seleccionando el primer ítem llamado Ángulo, con el cual se puede determinar el Angulo entre Dos Segmentos dados, en este caso el segmento $\overline{AC}$ y el segmento $\overline{BC}$, el ángulo entre dichos segmentos es rectángulo. Dichos paso se pueden visualizar en la ***figura 10***.

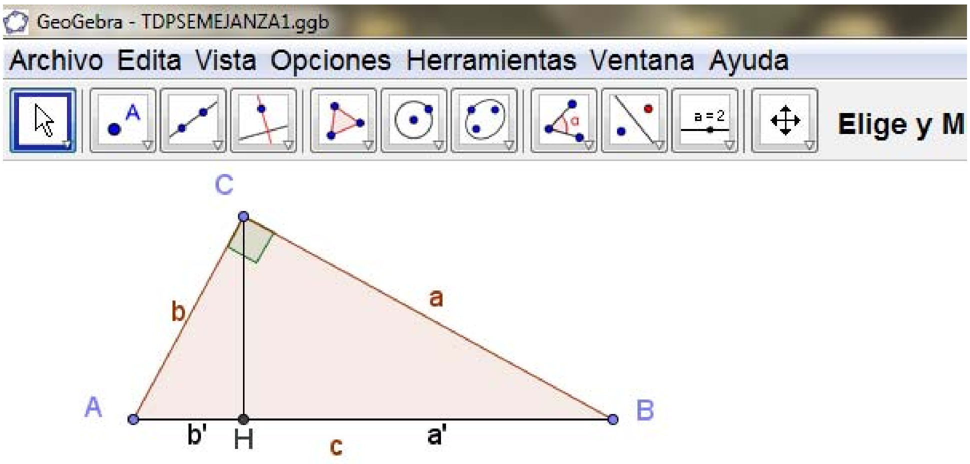



***Figura 10***. Visualización de Segmentos $b'$ y $a'$.

Se puede observar que se han generado los triángulos $AHC$, $BHC$, dichos triángulos, así como el triángulo $ABC$, deben ser dibujados nuevamente sobre la figura, para tal fin se usara la herramienta Polígono Regular , con la ayuda de dicha herramienta se dibujará sobre cada triángulo (un triángulo idéntico) y se ocultara el nombre de sus vértices y segmentos. (***Ver figura11***).



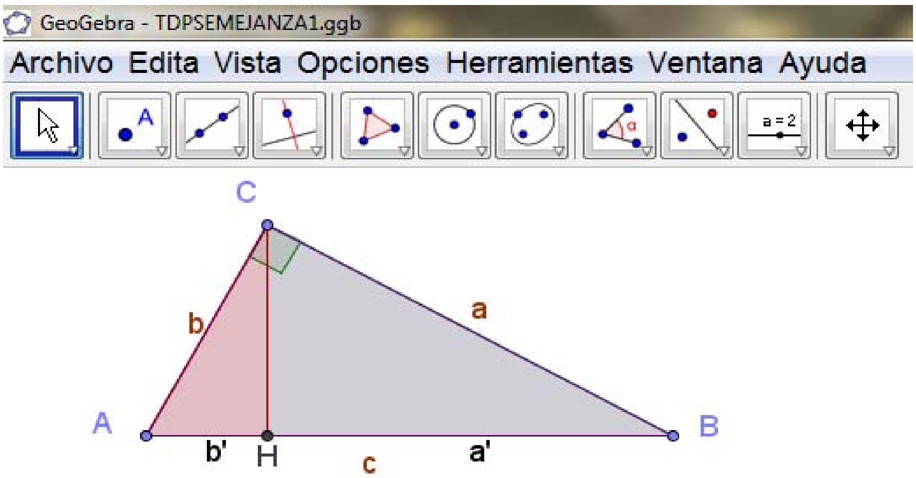



***Figura 11***. Uso del Modo Polígono.

Luego se trasladan los triángulos idénticos construidos sobre la figura original. Principalmente se procederá a construir tres vectores, uno para cada triángulo y para ello se usara el ícono tres de la barra de herramientas, ya que en su haber se encuentra la opción Vectores entre Dos Puntos, dichos vectores se generaran solo haciendo clic en la zona gráfica, en la posición deseada, ahora bien para trasladar los triángulos se hará uso del ícono nueve de la barra de herramientas que tiene por nombre Transformaciones Geométricas, el cual contiene el ítem Traslada Objeto por un Vector, se debe seleccionar el triángulo, después con un clic sobre el vector seleccionado para dicho triángulo bastará para que se produzca la traslación que se necesita. También se puede realizar dicha traslación usando la barra de entrada de comandos, la función "Traslada [$A$, $\vec{v}_1$]", en la que $A$ sería uno de los vértices del triángulo y $\vec{v}_1$ el vector correspondiente a dicho triángulo, así se aplica con cada uno de los vértices restantes del triangulo, para lograr de esta manera la traslación deseada. (***Ver figura 12***)

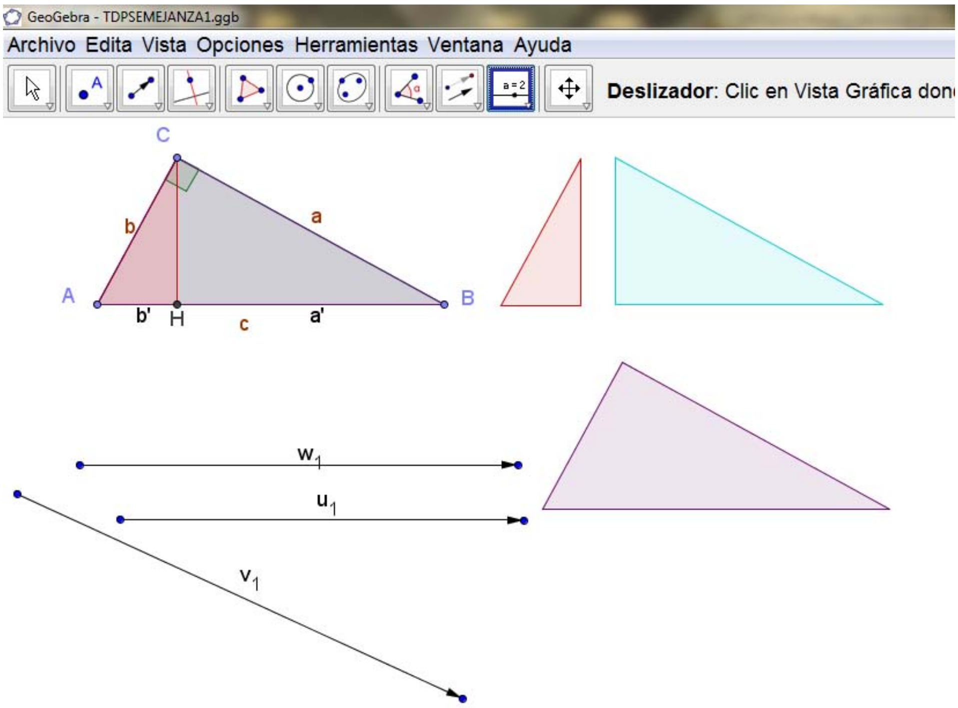



***Figura 12.*** Traslación de los triángulos



Los vectores se deben ocultar para una mejor apreciación de la construcción, ahora bien para animar la traslación, se utilizará el ícono diez de la barra de herramientas, el cual desplegará un menú en la que se seleccionara el ítem Deslixador, el mismo aparece con sólo dar un clic sobre la zona grafica; para ajustar el valor de un número o Ángulo, la ventana que se despliega a partir de él, permite especificar el "Nombre", "intervalo mínimo(min) y máximo(máx)", que es el que especifica los limites en los que se moverá el deslizador .(***Ver figura 13***)

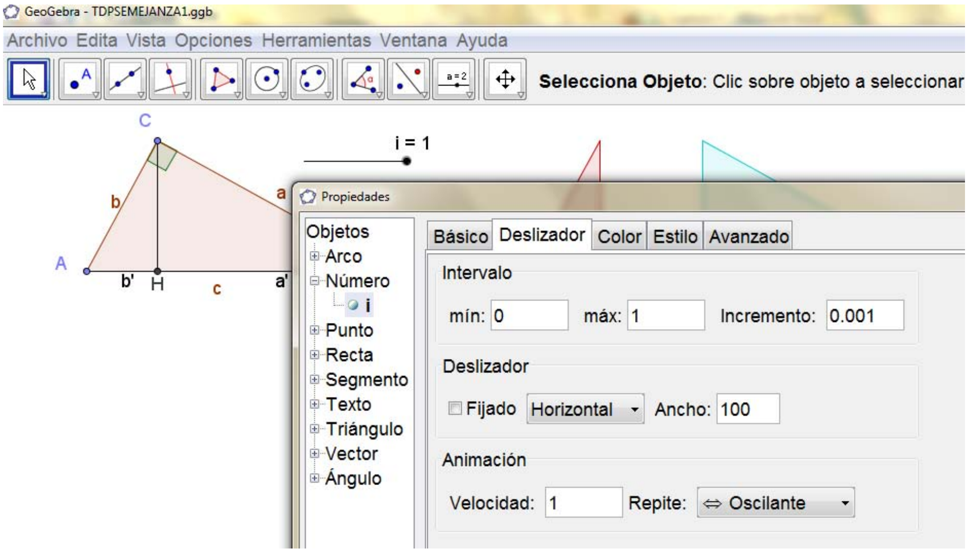



***Figura 13.*** Ventana Emergente para modificar los valores de Deslizador.

Para continuar con la animación de la construcción, sólo se debe redefinir el nombre de cada vector y colocar en el inicio el nombre del deslizador. De esta manera, él mismo controlará la traslación de los triángulos (***Ver figuras 14 y 15***).



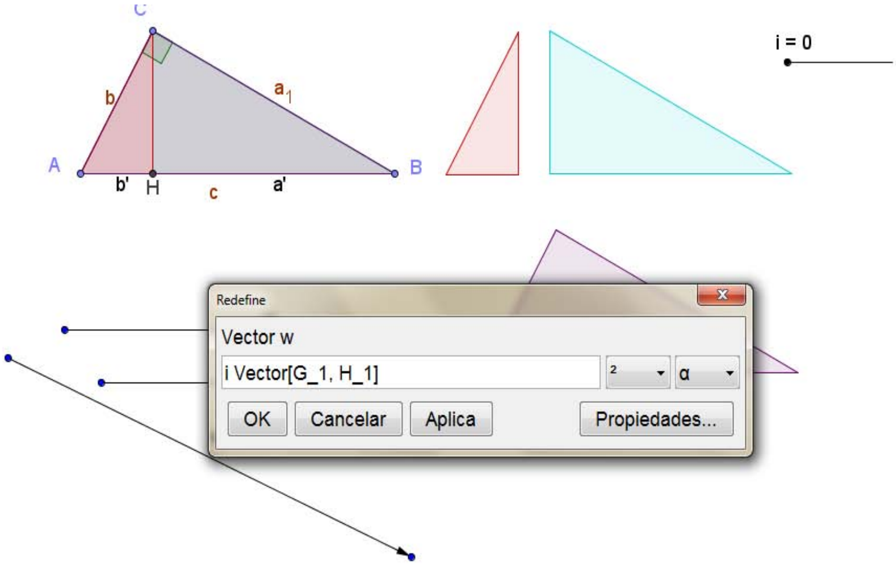



***Figura 12.*** Ventana Emergente para Redefinir Vectores.

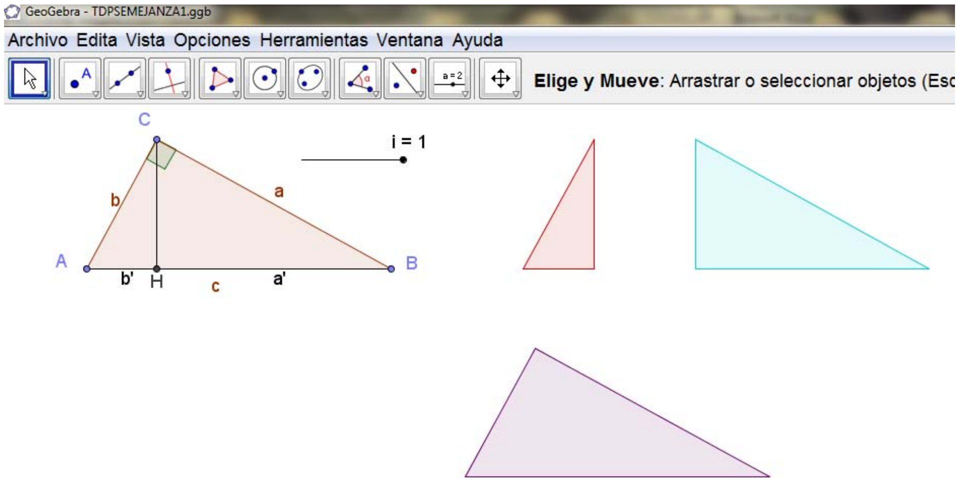



***Figura 15.*** Comportamiento del modo Deslizador.

Ahora se expondrán los ángulos de los triángulos trasladados, seleccionando sus vértices en sentido horario, la herramienta Angulo establecerá sus ángulos interiores. (***Ver figura16***).



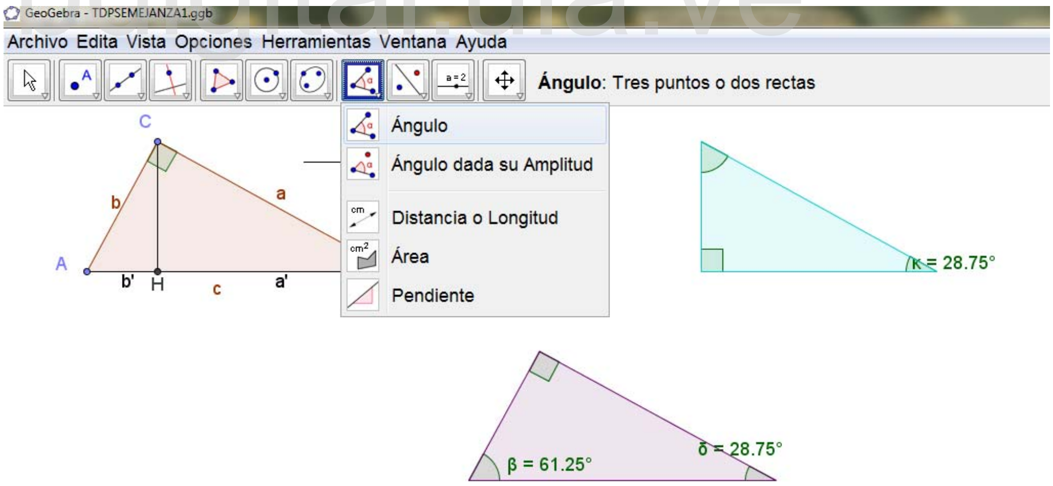



***Figura 16.*** Uso del modo Angulo.

Se procederá  a usar la herramienta Insertar Texto, con este “modo” se pueden formar fórmulas Látex y/o textos estáticos o dinámicos en la Zona Gráfica, para crear un nuevo texto en esa posición se hace Clic, allí se abre una ventana emergente en la que se escribe el texto que se pretende insertar, en este caso se usara la opción Fórmulas Látex para crear las expresiones pertinentes y texto estático para identificar cada paso a seguir en la demostración algebraica, tal como se muestra en las ***figuras 17 y 18*** .

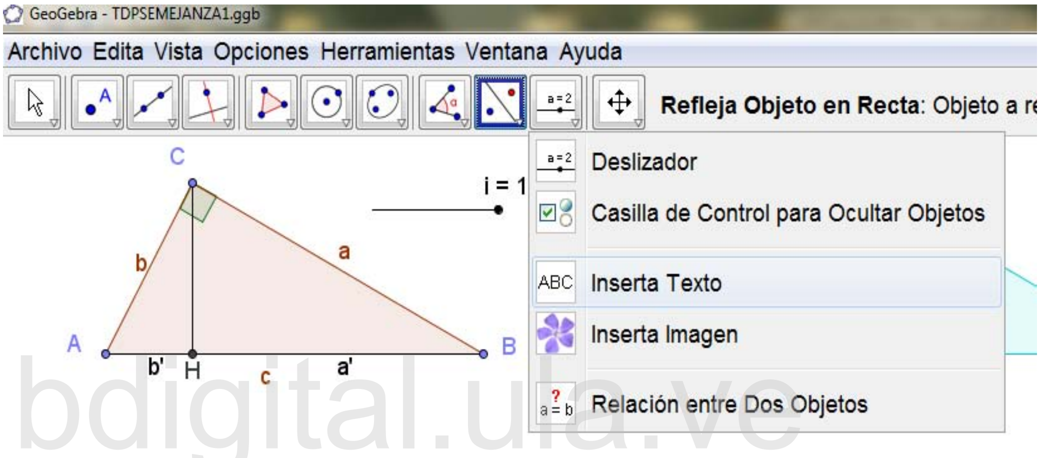





***Figura 17.*** Selección del modo Insertar Texto.

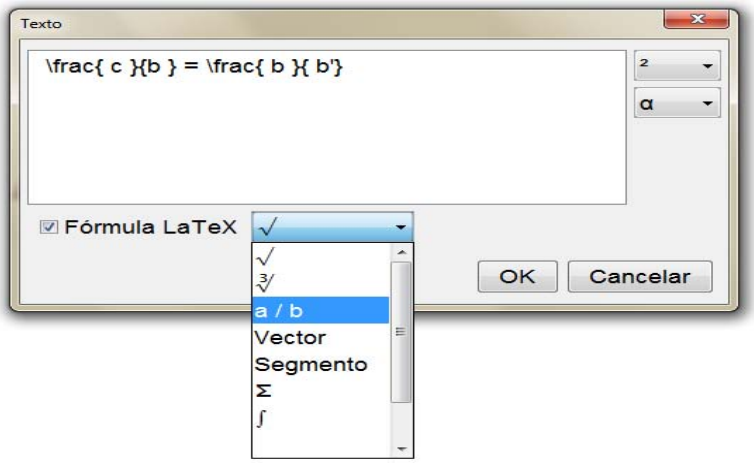



***Figura 18.*** Selección de la opción Formulas Látex

Se procede a controlar el orden en que aparecen los elementos de la construcción, para ello se usara la herramienta Oculta Expone Objetos al (des) tildar el Casillero. ( con solo  seleccionar dicha opción), luego se hace clip sobre la Zona Gráfica se creará la casilla “tildar” para exponer y ocultar uno o más objetos, al hacer clic derecho sobre la casilla se despliega una ventana emergente  donde se pueden especificar los objetos que quedarían afectados por el estado de tal casilla. Estos objetos pueden seleccionarse desde la lista que ofrece la ventana de dialogo o directamente con el mouse en cualquier vista. (***Ver figura 19***).

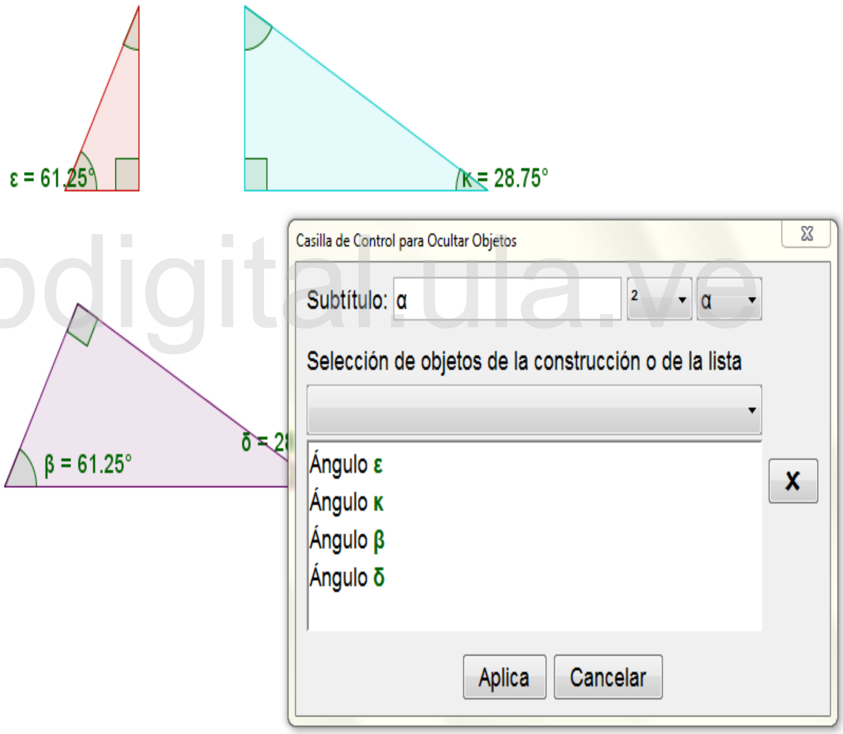
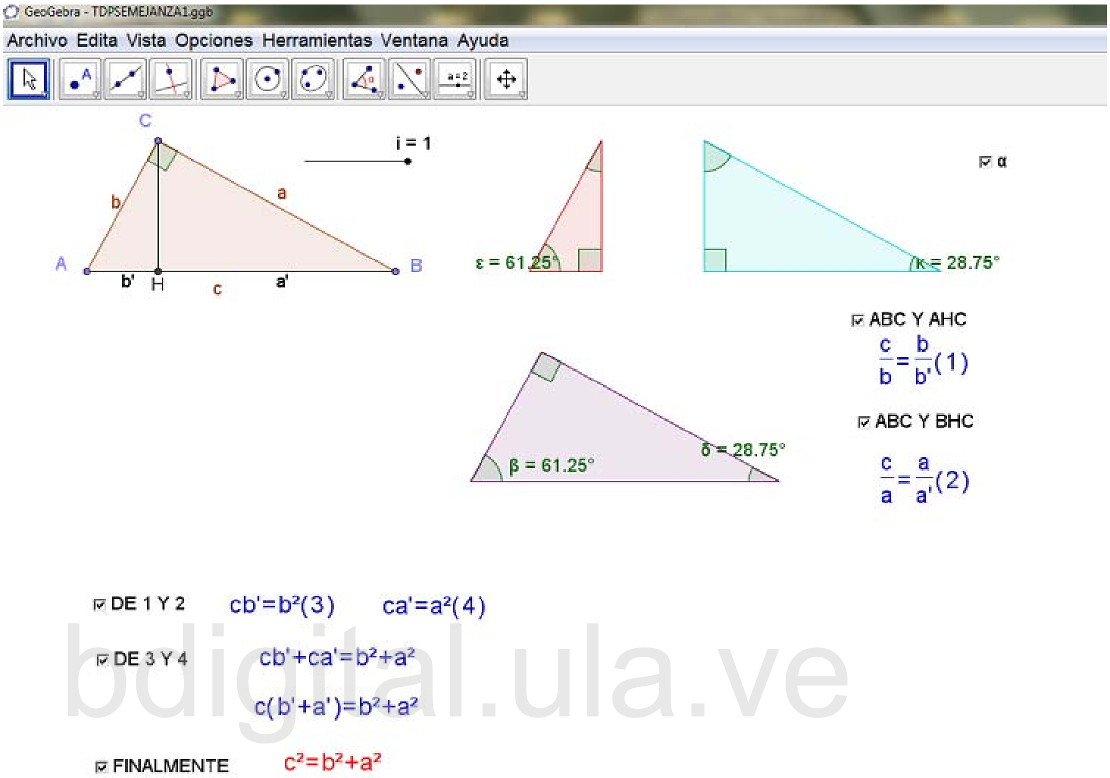



***Figura 19.*** Uso de la herramienta Oculta Expone Objetos.

Finalmente en la ***figura 20*** se puede apreciar el resultado de la construcción.






1

***Figura 20.*** Demostración (Atribuida a Pitágoras) empleando Semejanza de triángulos.

---
1

### 5.2.2 Demostración: (James Garfield 1875)

Esta demostración se basa en un trapecio, construido a partir de un triángulo rectángulo de base $a$ y $b$, altura $a+b$, siendo $a$ y $b$ catetos del triángulo cuya hipotenusa mide $c$.

Para formar el trapecio, se construye una recta $s$ sobre la Zona Grafica, seguidamente se hace una recta perpendicular a ella llamada $r$, usando para tales fines el ícono tres y cuatro respectivamente. Ahora hallaremos el punto intersección de dichas rectas. (***Ver figura 27***).

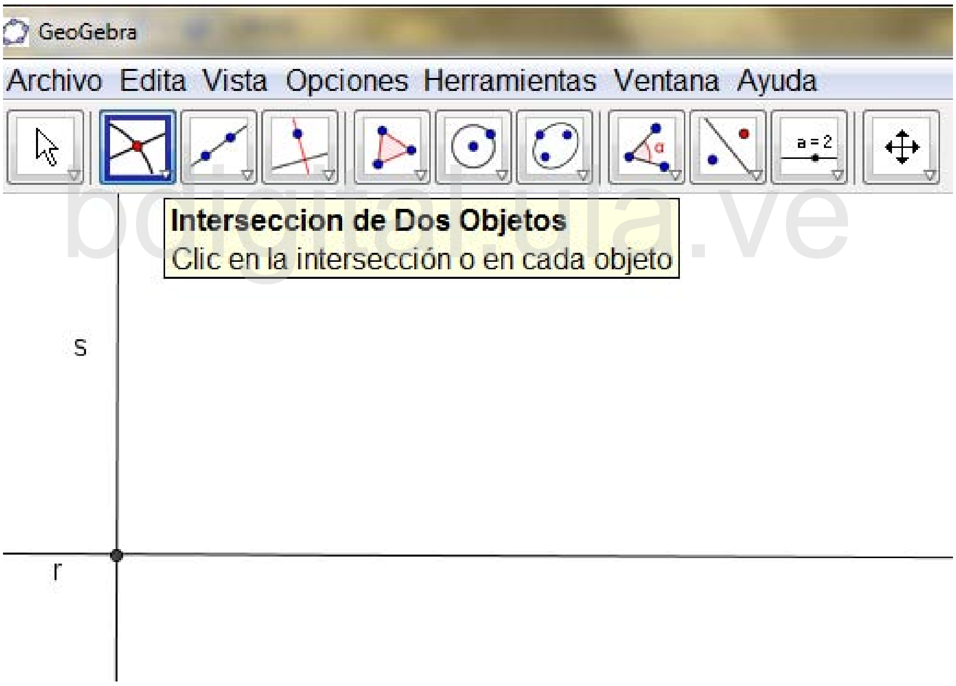



***Figura 27.*** Uso del modo Intersección entres Dos Rectas.

Es precisamente a partir de éste punto de intersección que construiremos el triángulo rectángulo, usando para ello la opción polígono, ahora bien se puede observar en ***la figura 28*** que los catetos del triángulo quedaron sobre las rectas perpendiculares, por tanto los catetos forman un ángulo de 90°, lo que muestra que finalmente se ha construido un triangulo rectángulo.

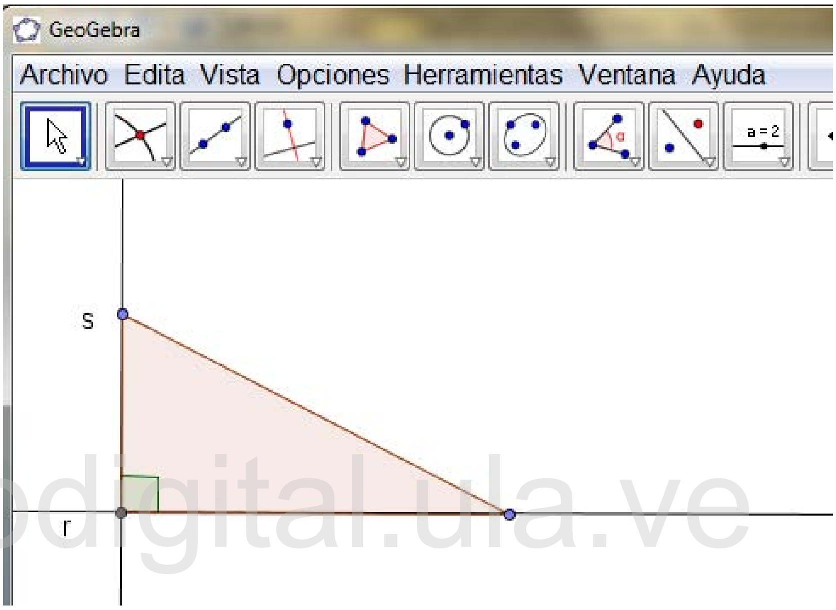



***Figura 28.*** Triángulo rectángulo a partir de Dos Rectas que se interceptan perpendicularmente.

Haciendo clic derecho sobre el triángulo rectángulo, se desplegará la ventana propiedades en la que podemos cambiar su apariencia, mostrar u ocultar sus elementos, obteniendo finalmente el triángulo que se puede apreciar en ***la figura 29***.

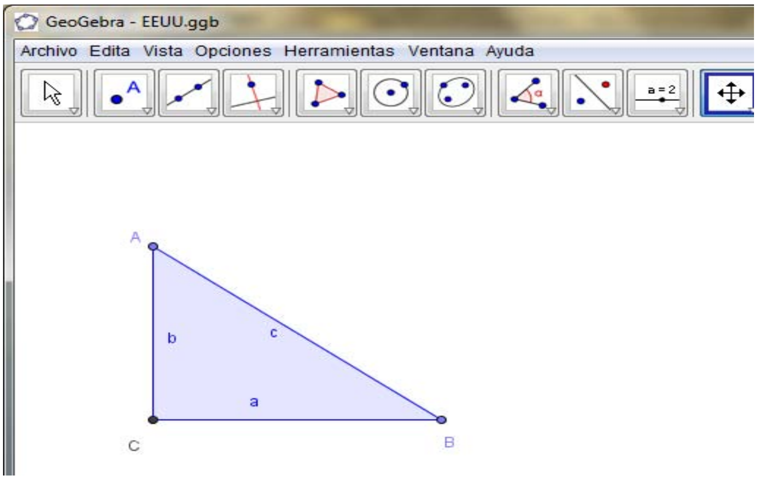



***Figura 29.*** Triángulo Rectángulo.

A partir de éste triángulo rectángulo se construye el trapecio, sólo debemos dibujar un triangulo idéntico a partir del vértice $A$ con la ayuda de la herramienta Polígono. Se expondrán los ángulos de los triángulos, seleccionando sus vértices en sentido horario, la herramienta Ángulo establecerá sus ángulos interiores. (***Ver figura 30***).



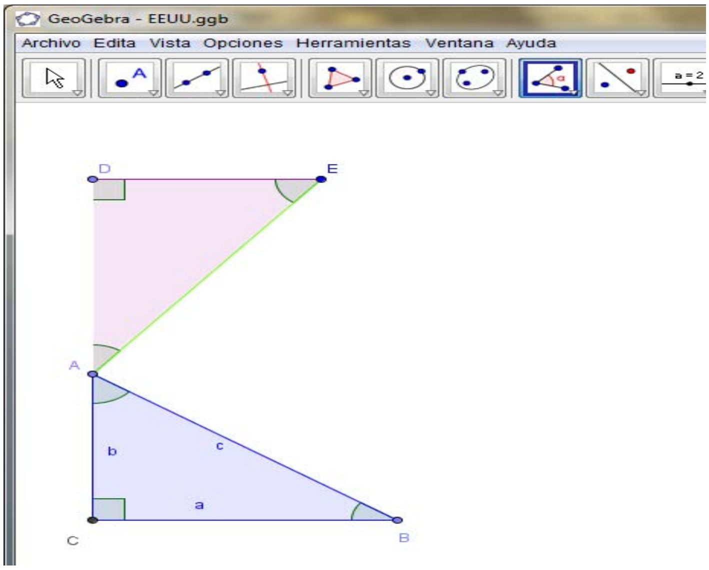



***Figura 30.*** Construcción de un Triángulo idéntico a partir del vértice $A$ y uso del Modo Ángulo.

Ahora bien ya que tenemos los puntos $B, A$ y $E$ los cuales nos permiten formar el triángulo $BAE$, se puede apreciar que los tres triángulos en conjunto delinean finalmente el trapecio. (***Ver figura 31***).

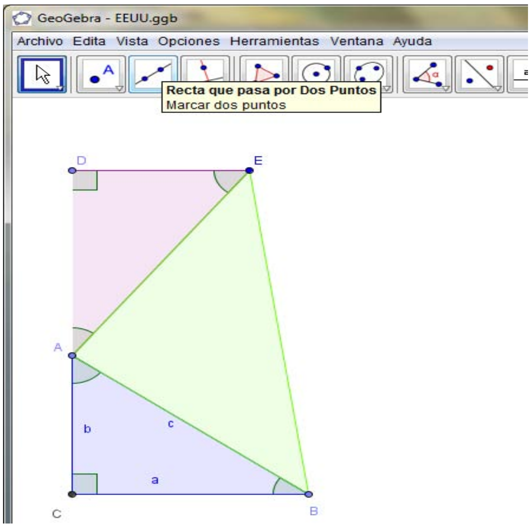



***Figura 31.*** Construcción del triángulo $BAE$.



En consecuencia se puede construir el trapecio $CBED$ definido por los puntos $C, B, E, D$. (***Ver figura 32***)

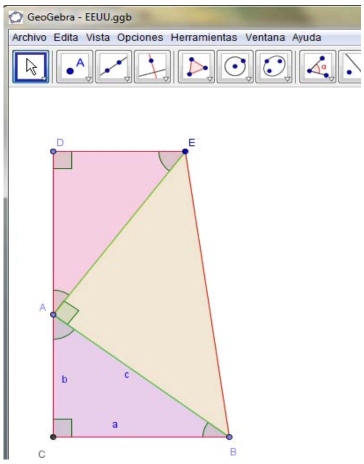



***Figura 32.*** Construcción del Trapecio $CBED$.

Se traslada el trapecio $CBED$, para así apreciar un cumplimiento gráfico del Teorema de Pitágoras. Primeramente se construye un vector llamado $\vec{v}$, para ello se usa el ícono tres de la barra de herramientas, ya que en su haber se encuentra la opción Vectores entre Dos Puntos, dichos vectores se generarán sólo haciendo clic en la Zona Grafica en la posición deseada, para realizar dicha traslación se usa en entrada de comandos la función "Traslada[$C$, $v$]", "Traslada[$B$, $v$]", "Traslada[$D$, $v$]", "Traslada[$E$, $v$]", en la que $C$ , $B$, $E$, $D$ serian los puntos que definen el trapecio y $\vec{v}$ el vector . (***Ver figuras 33 y 34***).

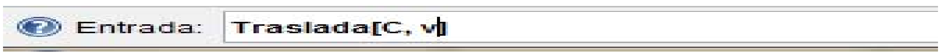



***Figura 33.*** Campo de entrada de Comandos. (Función Traslada).



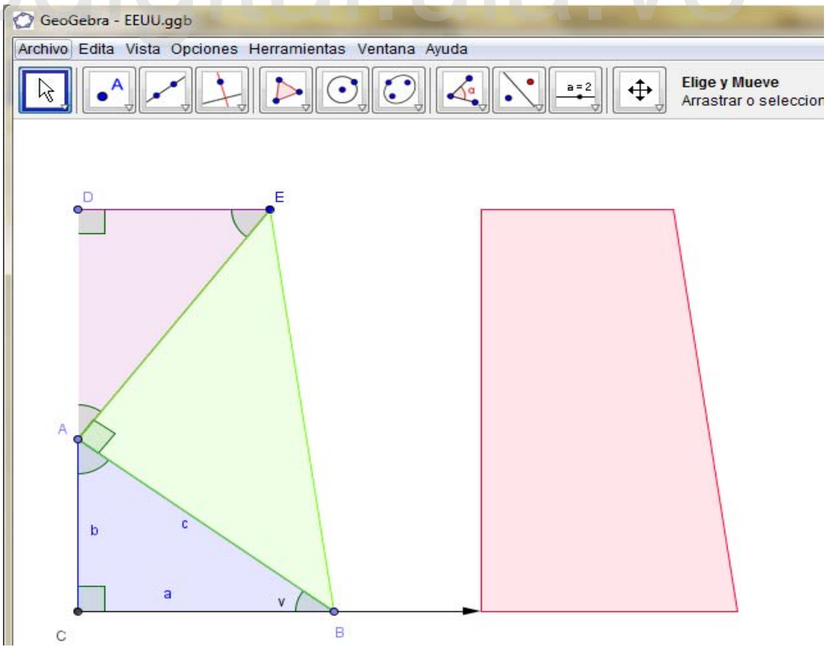



***Figura 34.*** Traslación del Trapecio $CBED$.

Para controlar dicha traslación se hace uso de un deslizador $i$, redefiniendo el nombre del vector $\vec{v}$, y colocando en el inicio el nombre del deslizador, de esta manera, el mismo controlará la traslación del trapecio. (Ver ***figura 35***).

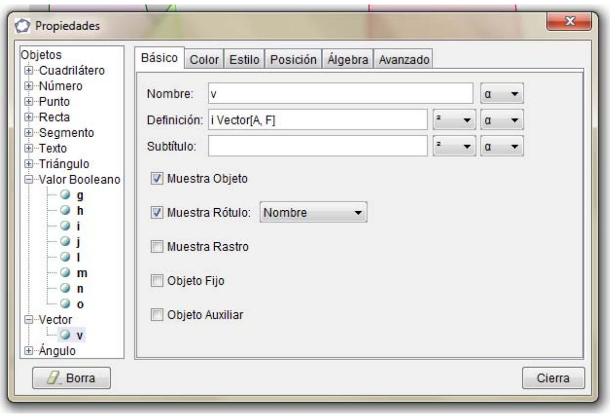



***Figura 35.*** Ventana Emergente Propiedades (Redefine el vector $\vec{v}$).



Ahora se usa la herramienta Insertar Texto, con un clic sobre la Zona Grafica para crear un nuevo texto en esa posición, allí se abre una ventana emergente en la que se escribe el texto que se desea insertar. En este caso se usa la opción Fórmulas Látex para crear las expresiones pertinentes, al Igual que la figura los textos gozan de una ventana propiedades que se despliega haciendo clic en el segundo botón sobre él mismo y así se puede cambiar su apariencia. (***Ver figura 36***).

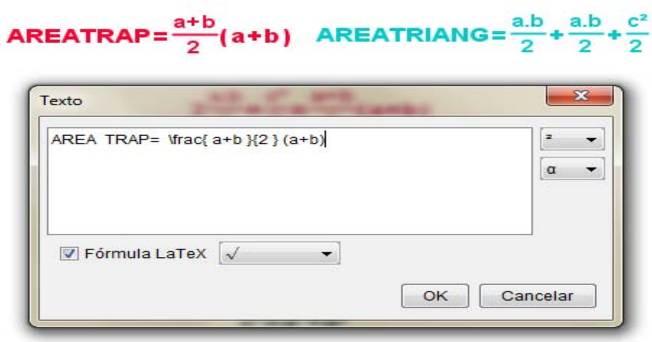


***Figura 36.*** Ventana Emergente Inserta Texto.

Se debe controlar el orden en que aparecen los elementos de la construcción, para ello se usa la herramienta Oculta Expone Objetos al (des) tildar el Casillero. Seleccionar dicha opción, y haciendo clic sobre la Zona Gráfica se creará la casilla “tildar” para exponer y ocultar uno o más objetos, al hacer clic derecho sobre la casilla se despliega una ventana emergente donde se pueden especificar los objetos que quedarían afectados por el estado de tal casilla. Estos objetos pueden seleccionarse desde la lista que ofrece la ventana de diálogo o directamente con el mouse  en cualquier vista. Dichas casillas las podemos ordenar de tal forma que se vean estéticamente adecuadas a la construcción. (***Ver figura 37***).

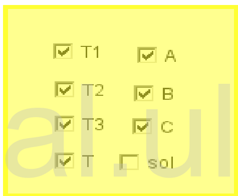





***Figura 37.*** Casillero (des) tildar.

Finalmente  se puede apreciar la demostración realizada por James Garfield 1875.  ***(Ver figura 38).***

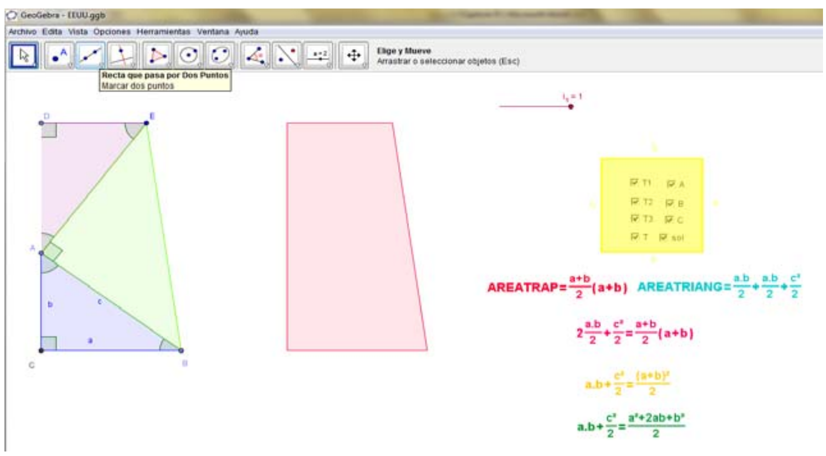


*Figura 38.* Demostración: James Garfield (1875).

### 5.2.3 Demostración (Clásica). Esta simple demostración pudo haber sido la demostración que los pitagóricos imaginarían.

Para comenzar se hace clic en la opción “vista” y se desplegará un menú, en el cual se seleccionara la vista de los Ejes y Cuadrícula, ya que los toma como referencia facilitando así la construcción de la demostración en GeoGebra. (***Ver figura 39***).


*Figura 39.* Menú Vista: Selección de Ejes y Cuadrícula.

Ahora con la ayuda de los Ejes y Cuadrícula se dibuja un triángulo rectángulo de lados 6,8 y 10 respectivamente, dicha terna es el doble de la terna pitagórica que caracteriza el triángulo egipcio. (***Ver figura 40***).

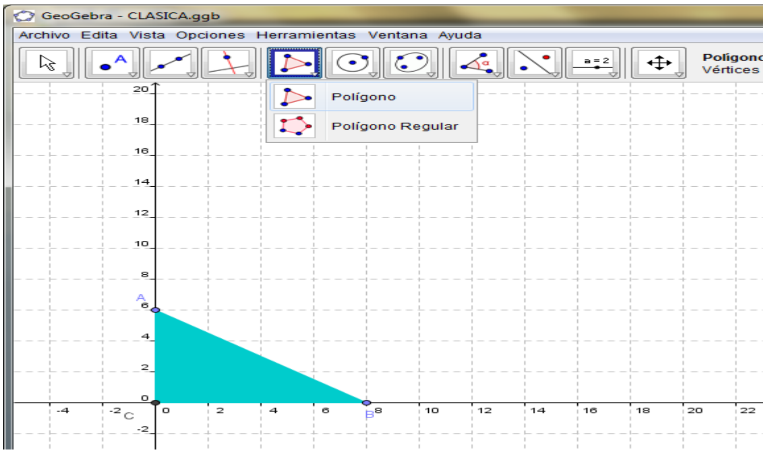



***Figura 41.*** Uso del modo Polígono. (Triángulo Rectángulo).

Se dibuja un cuadrado sobre la hipotenusa con la ayuda de la herramienta Polígono Regular. (***Ver figura 42***).

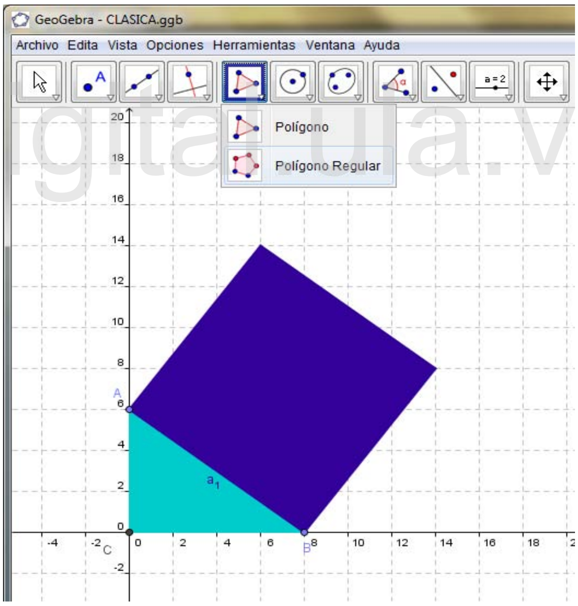





***Figura 42.*** Cuadrado sobre la hipotenusa.

Se traza una recta $f$ por el origen (vértice $C$), paralela a uno de los lados del cuadrado. (***Ver figura 43***)

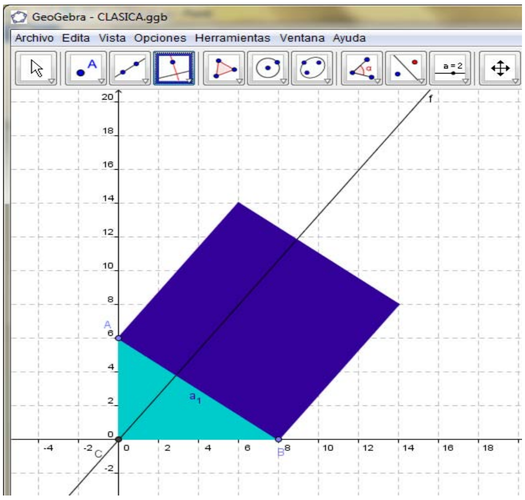



***Figura 43.*** Recta $f$ .

Se colocan tres vectores usando la herramienta Vector entre Dos Puntos, el primero desde el origen o vértice $C$ recorriendo el eje $X$ hasta un punto fuera del triángulo rectángulo, el segundo desde el origen recorriendo la recta $f$ hasta un punto sobre la recta, el tercero desde el origen o vértice $C$ hasta el vértice $A$ y el ultimo desde el vértice $C$ hasta el vértice $B$, dichos vectores están identificados como: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{z}$ respectivamente. (***Ver figura 44***).

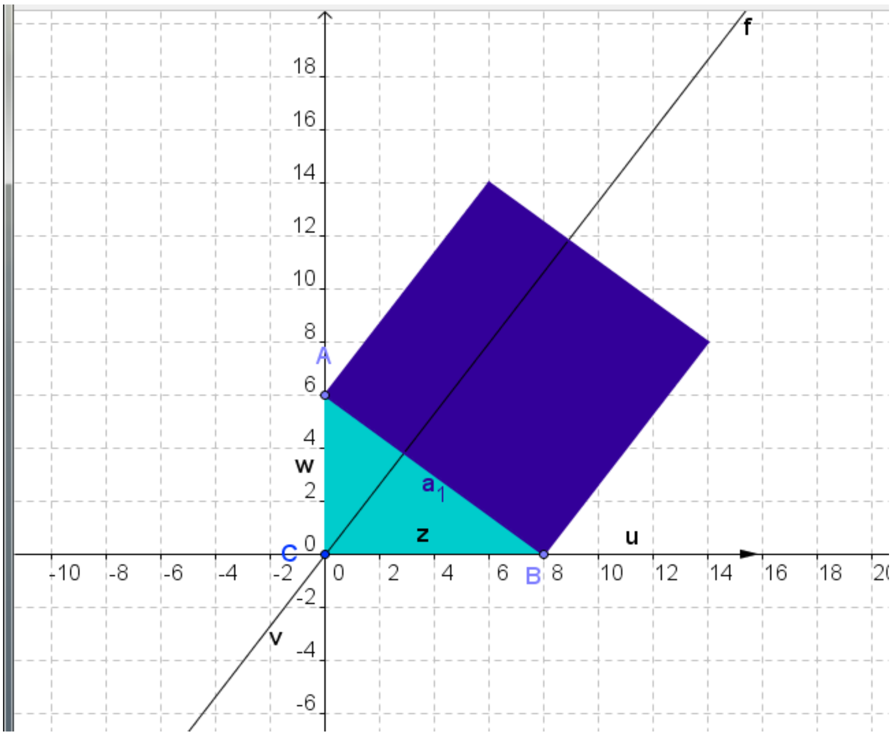





***Figura 44.*** Vectores: $\vec{u}$ , $\vec{v}$ , $\overrightarrow{w}$ y $\vec{z}$.

Se traslada el triángulo $ABC$, usando en la entrada de comandos la función “Traslada[$A$, $u$]”, “Traslada[$B$, $u$]”, “Traslada[$C$, $u$]”, esta operación genera tres puntos sobre los cuales dibujamos un triángulo idéntico al original. (***Ver figura 45***)

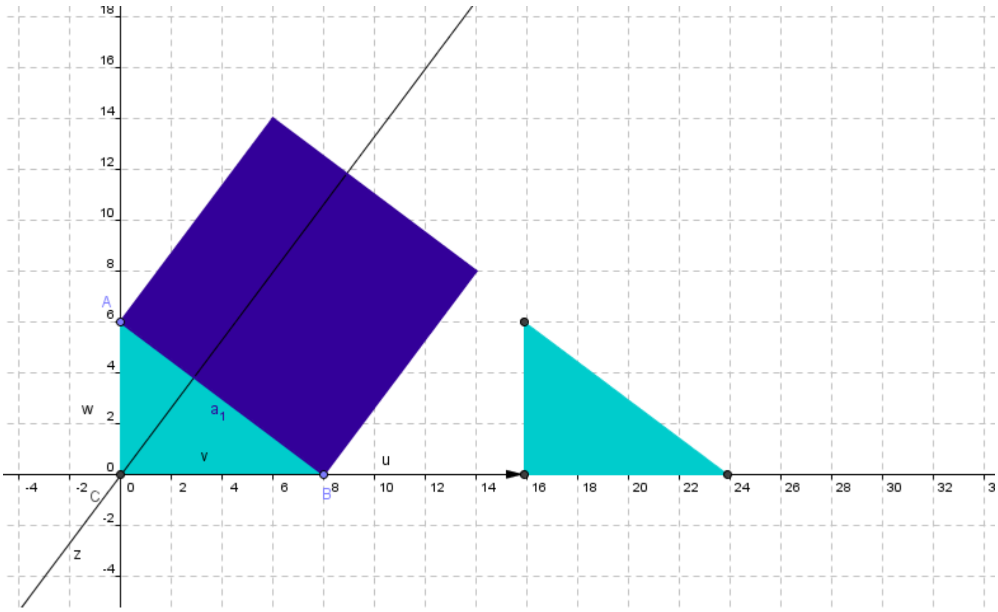



***Figura 45.*** Traslación del triangulo $ABC$.

Se ingresa un deslizador $i$ , el cual controlará los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{z}$, se redefine el nombre de cada vector, y se coloca en el inicio el nombre del deslizador $i$, de esta manera, él mismo controlará la traslación de las figuras. También se dibuja el triangulo $A'HI$. (***Ver figura 46***).

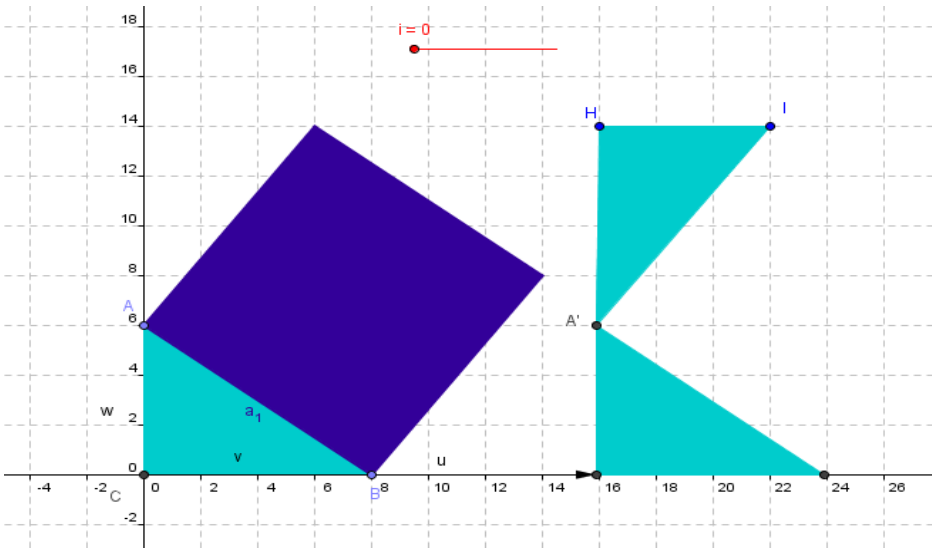


***Figura 46.*** Construcción del triangulo $A'HI$.

Se traslada el triángulo $A'HI$ con la ayuda de vector $\vec{z}$, para realizar la traslación se usa la entrada de comandos seguido por la función "Traslada[$A'$, $z$]", "Traslada[$H$, $z$]", "Traslada[$I$, $z$]", ésta operación genera tres puntos sobre los cuales dibujamos un triángulo. (***Ver figura 47***).

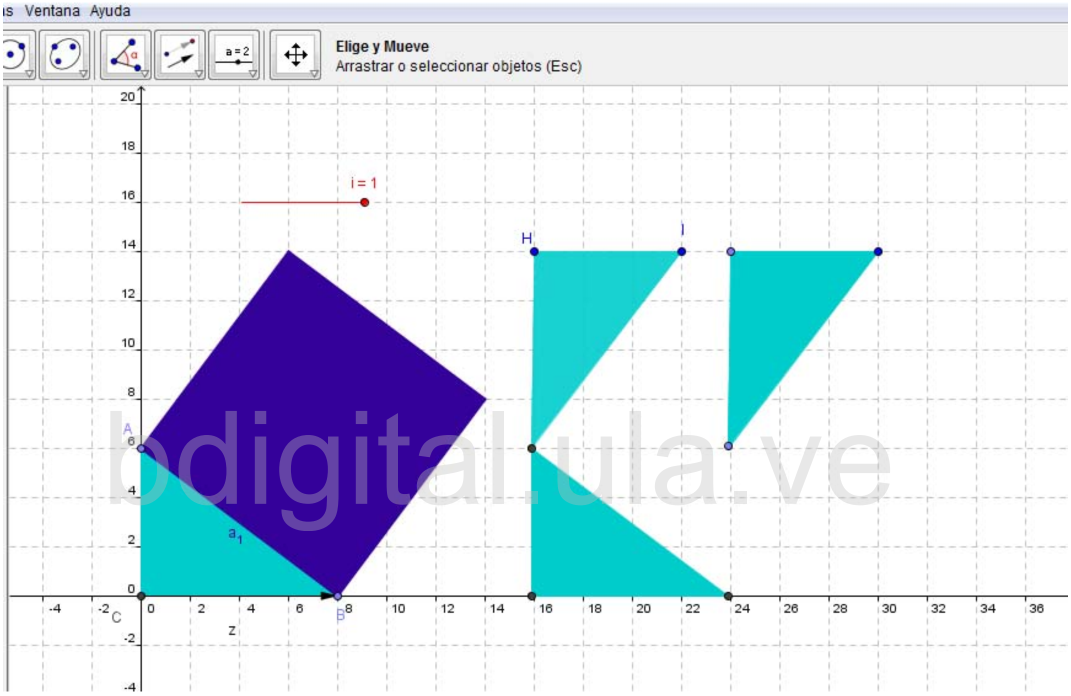



***Figura 47.*** Traslación del triángulo $A'HI$.

Se dibuja el triángulo $IJK$, el cual es idéntico al triangulo $ABC$. Posteriormente se traslada dicho triángulo con ayuda del vector $\vec{v}$. Para efectuar la traslación se usa el comando la función "Traslada[$I$, $v$]" , "Traslada[$J$, $v$]" , "Traslada[$K$, $v$]", esta operación genera tres puntos sobre los cuales dibujamos un triángulo. (***Ver figura 48***).

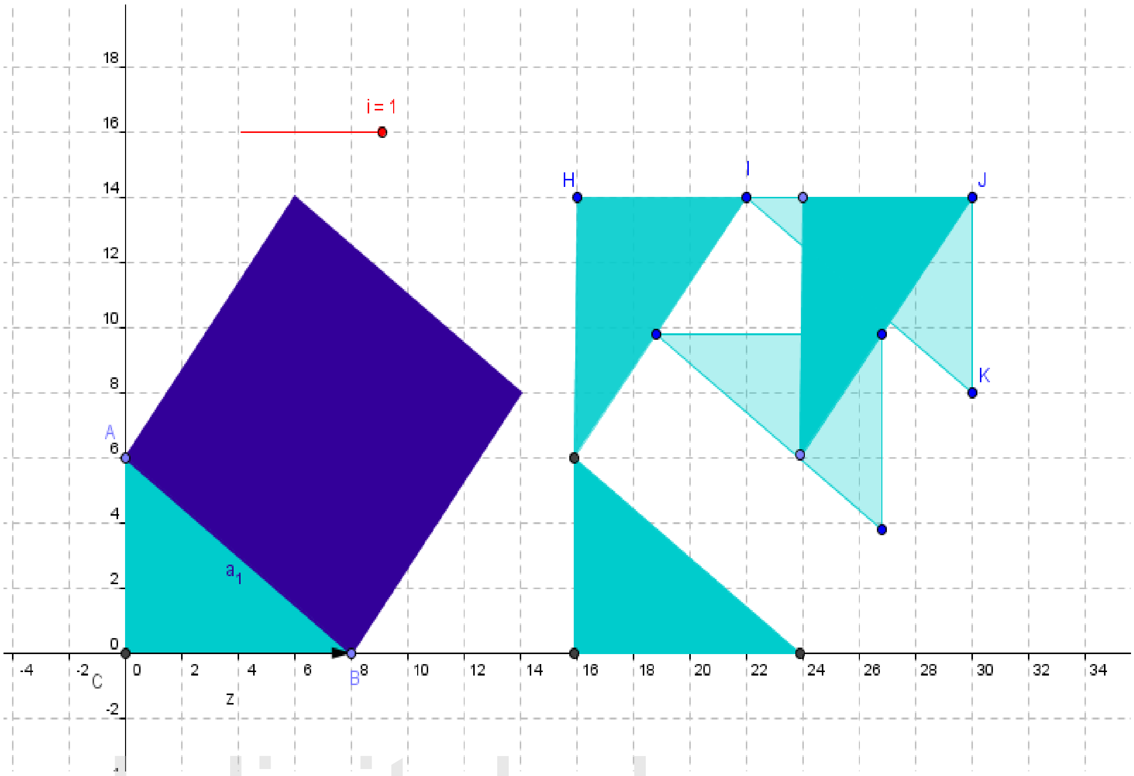



***Figura 48.*** Construcción y traslación del triangulo $IJK$.

Se Dibujara un triángulo $B'KL$, el cual es idéntico al triángulo $ABC$. Posteriormente se trasladara dicho triángulo con ayuda del vector $\vec{w}$. Usando el comando "Traslada[$B'$, $w$]", "Traslada[$K$, $w$]", "Traslada[$L$, $w$]", esta operación genera tres puntos sobre los cuales dibujamos un nuevo triángulo. (***Ver figura 49***).

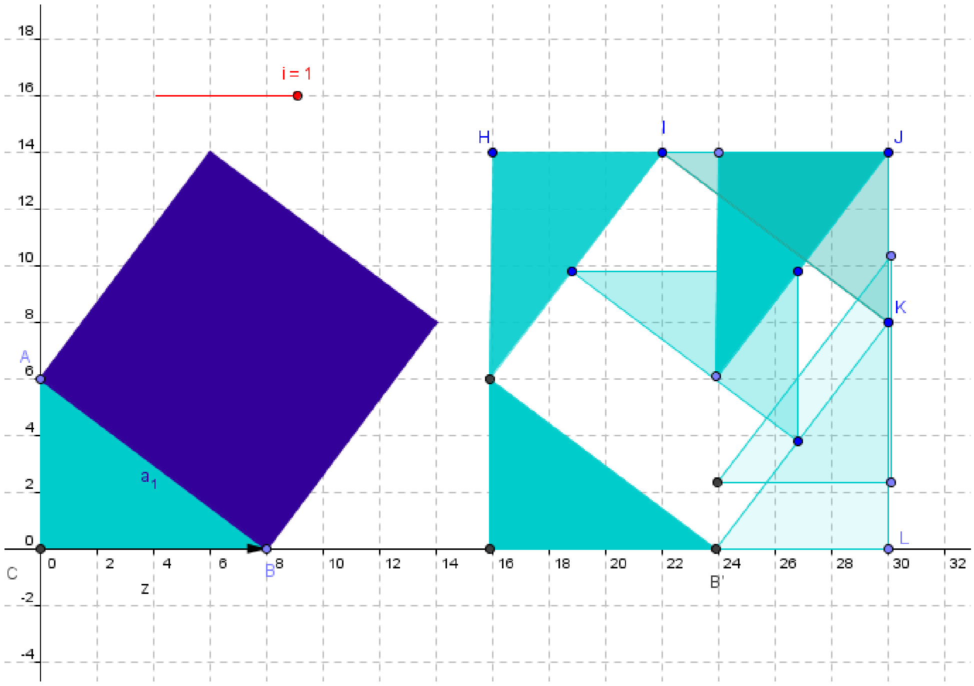



***Figura 49.*** Construcción y traslación del triángulo $B'KL$ .



Ahora haciendo uso de la ventana propiedades se ocultan los objetos de la vista gráfica, como es el caso de los triángulos trasladados, el cuadrado sobre la hipotenusa. También se procede a cambiar la apariencia de los triángulos restantes, para finalmente con la ayuda de opción Polígono se dibuja el cuadrado $C'HJL$ . (***Ver figura 50***).

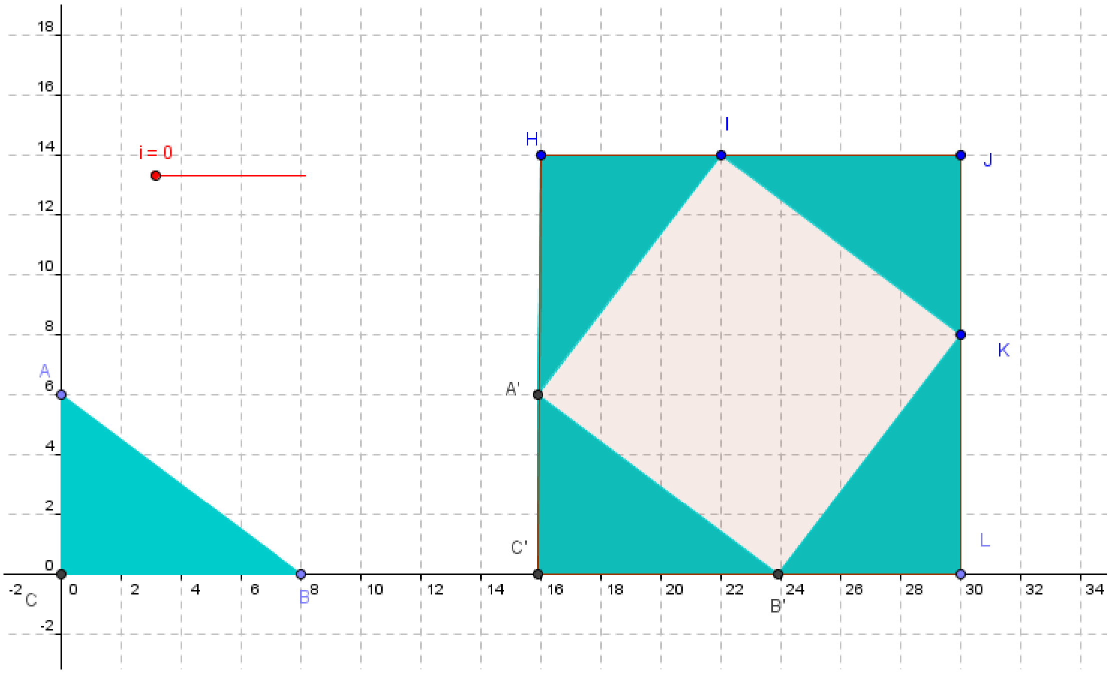



***Figura 50.*** Construcción del Cuadrado $C'HJL$.



Por último, se terminan de ocultar los objetos de la vista grafica que no son necesarios. Si el lector desea puede agregar la demostración algebraica usando la opción Insertar Texto como se ha hecho en demostraciones anteriores. (***Ver figura 51)***

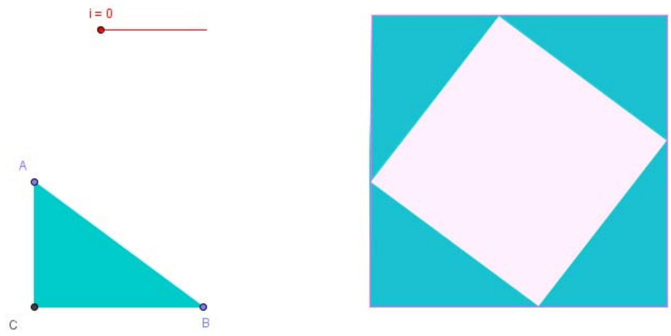



***Figura 51.*** Demostración (Clásica), Fundamentada en Áreas.

***La figura 52*** muestra  la demostración grafica del teorema de Pitágoras al usar el deslizador.



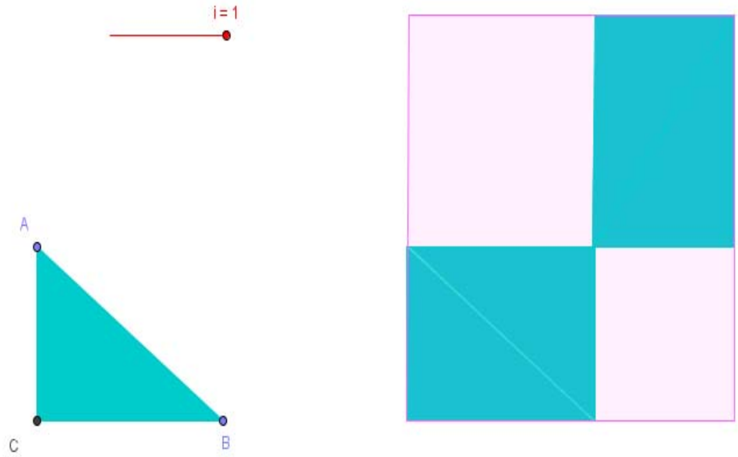



***Figura 52.*** Comprobación Grafica del Teorema de Pitágoras (Áreas).

### 5.2.4 **Demostración (Euclides, libro I de los Elementos, proposición 47)**

La construcción se comenzará, dibujando un triángulo rectángulo, e inmediatamente se construirán cuadrados sobre cada uno de sus lados usando para ello el modo Polígono Regular de la siguiente manera: Se hace clic sobre “Polígono Regular” se ubica el mouse sobre la zona gráfica en nuestro caso será sobre los vértices del triángulo rectángulo, es decir sobre la hipotenusa se dibujará un cuadrado de lado igual a la hipotenusa, para ello se hace clic sobre los vértices $C$ y $B$ respectivamente con tal acción se desplegara una ventana emergente solicitando la cantidad de lados del polígono regular que se desea construir en este caso es una cuadrado por lo que se indica el valor $4$ en números, de manera análoga se construirán cuadrados sobre cada uno de los catetos. (***Ver figura 53***).

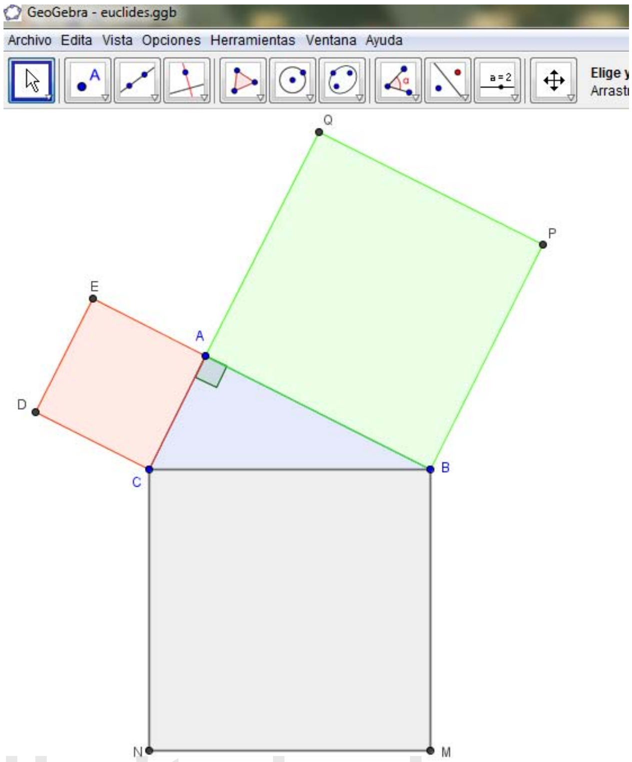



***Figura 53.*** Construcción de cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo.

La demostración de Euclides consiste en probar que área del cuadrado $NMBC$ es igual a la suma de las areas de los cuadrados $ABPQ$ Y $ACDE$. Su enunciado expone que: en todo triangulo rectángulo el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto.

Para ello se traza por $A$ una perpendicular a $CB$ con la ayuda del ícono cuatro de la barra de herramientas, esta recta corta a $MN$ en $A'$ y divide al cuadrado inferior en dos rectángulos $A'MBA''$ y $NA'A''C$ como se puede observar en la ***figura 54***.

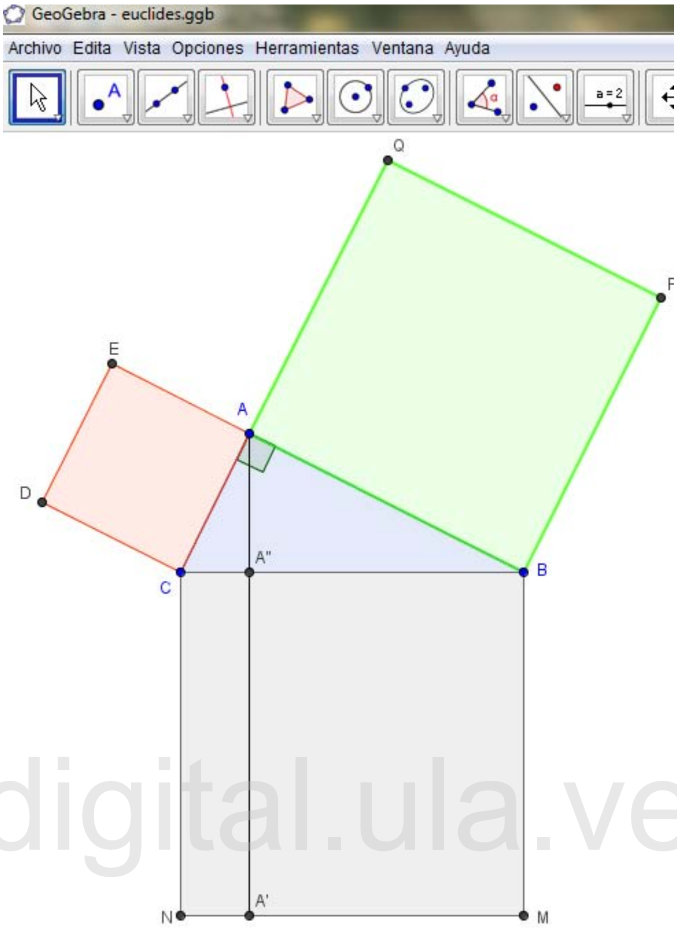





***Figura 54.*** Segmento que pasa por $A$ y es perpendicular a $\overline{CB}$.

Luego con la ayuda del Modo Segmento entre Dos Puntos, se une a $A$ con $M$ y $C$ con $P$. generando la figura a continuación. (***Ver figura 55***)

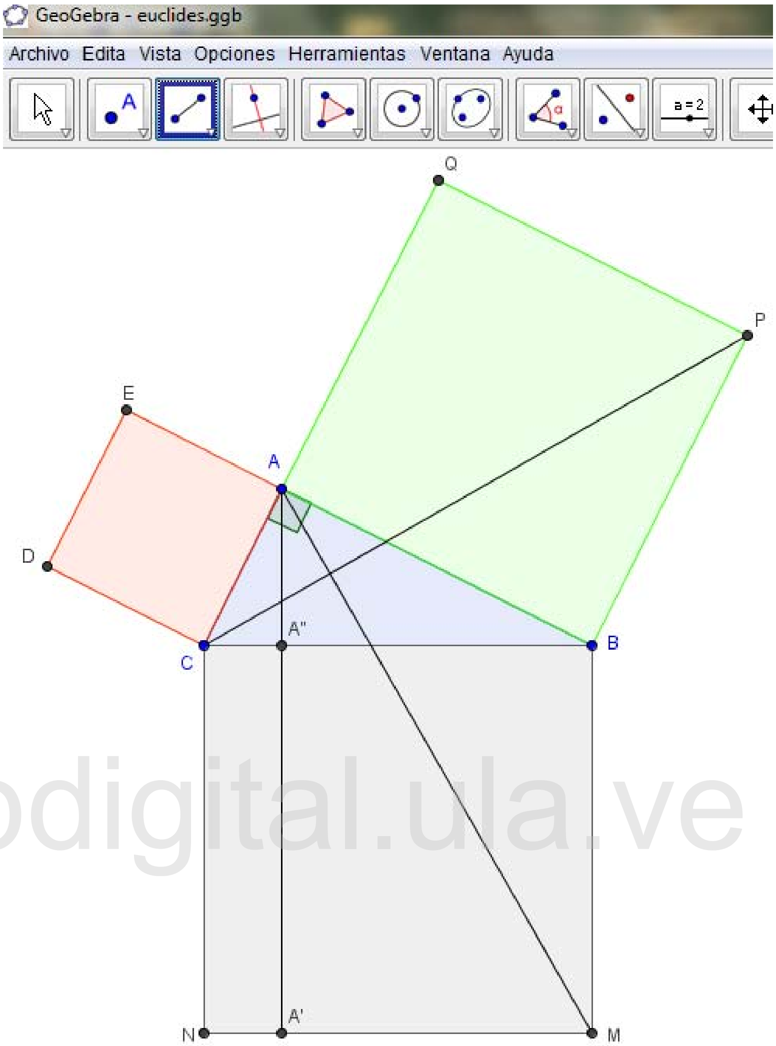



***Figura 55.*** Figura Euclídea.( unión de $A$ con $M$ y $C$ con $P$).

Ahora se puede observar que se generaron los triángulos $MBA$ y $CBP$ los cuales se dibujaran con la ayuda de la opción Polígono, dichos triángulos son iguales; para estudiar gráficamente ésta igualdad se hace uso de la herramienta Ángulo y se exponen los ángulos interiores, determinando así que los triángulos tienen un ángulo común $\beta = 90^o + t$ e iguales lados, $BP = AB$ y $BM = BC$. (***Ver figura 56***)

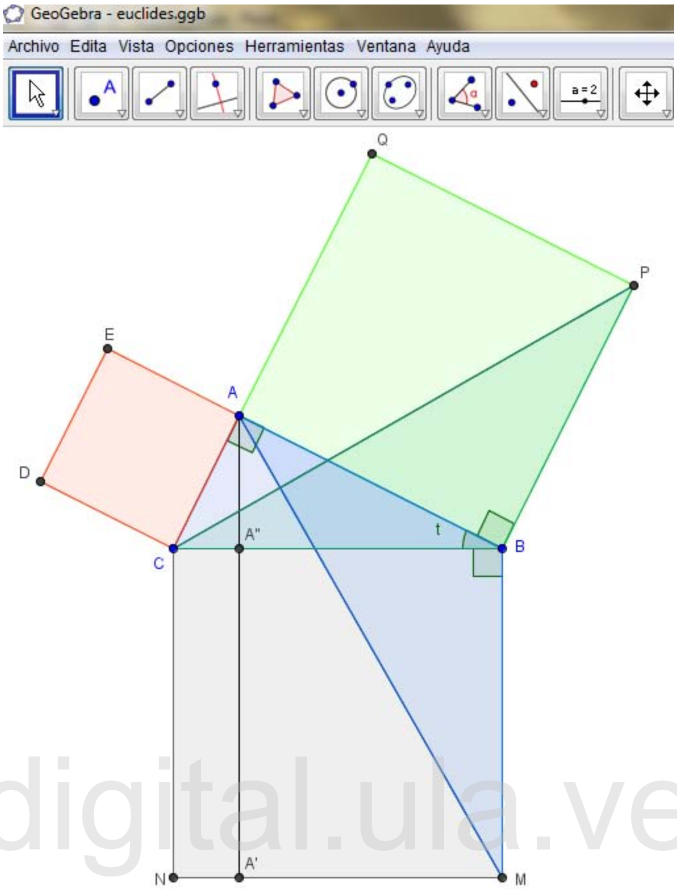



***Figura 56.*** Visualización de los triángulos $MBA$ y $CBP$ y uso del modo Ángulo.

Se puede observar que el triángulo $MBA$ y el rectángulo $A'MBA''$ comparten el lado $BM$ y ambos se encuentran entre dos paralelas comunes, por tanto:

El Resultado (Euclides, Libro I Proposición 41): si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está contenido entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

***Figura 57.*** Resultado (Euclides, Libro I Proposición 41)

Dicho resultado también se puede interpretar de la siguiente manera:

- Si un triángulo tiene igual base que un paralelogramo y está situado en las mismas paralelas que él, su área es la mitad que el del paralelogramo.

De igual forma sucede con el triangulo $CBF$ y el rectángulo $ABPQ$ , ambos comparten el lado $BP$.



Como los triángulos son iguales se obtiene:

$$\text{área}(A'A''BM) = \text{área}(BPQA) \ .$$

De manera análoga, trazando los segmentos $AN$ y $BD$ como se muestra en la ***figura 58***, se prueba que:

$$\text{área}(ACDE) = \text{área}(A'A''CN).$$

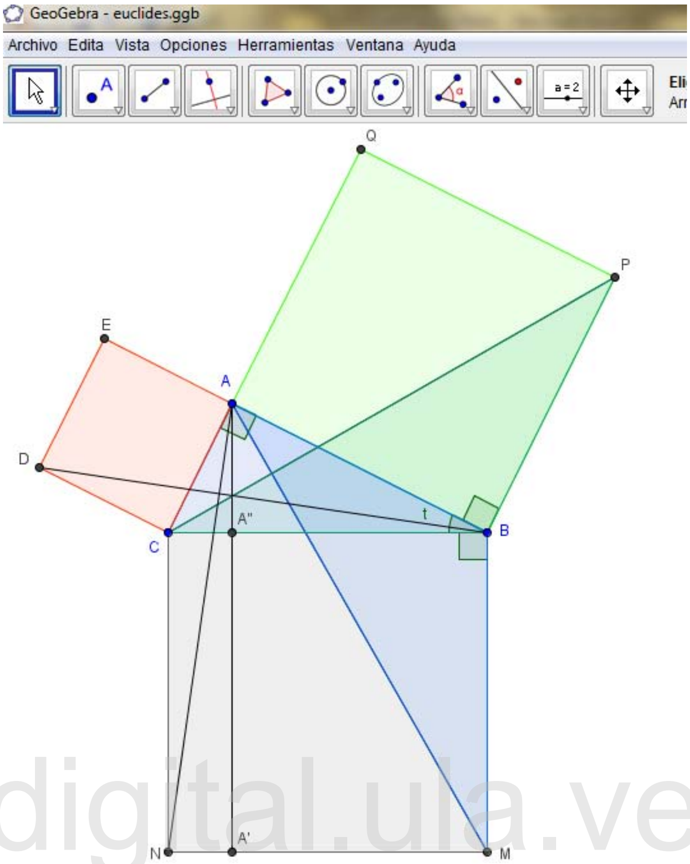





***Figura 58.*** Figura Euclídea. (Unión de $A$ con $N$ y $B$ con $D$).

Finalmente se puede afirmar que:

$$\text{área}(A'A''BM) + \text{área}(A'A''CN) = \text{área}(NMBC)$$

Para mostrar éste resultado se dibujan los rectángulos $A'A''BM$ y $A'A''CN$. Posteriormente se trasladan dichos rectángulos con ayuda de los vectores $\vec{u}\ \vec{w}$ que se construyen con la ayuda de la herramienta Vector entre Dos Puntos ( en la misma dirección y sentido que el eje $X$ ). Para efectuar la traslación del rectángulo $A'A''BM$ se usa en entrada de comandos la función "Traslada[$A'$, $u$]", "Traslada[$A''$, $u$]", "Traslada[$B$, $u$]", "Traslada[$M$, $u$]".

Ahora para trasladar el rectángulo $A'A''CN$ se emplea en entrada de comandos la función "Traslada[$A'$, $w$]", "Traslada[$A''$, $w$]", "Traslada[$C$, $w$]", "Traslada[$N$, $w$]". ó simplemente se puede usar la herramienta Traslada Objeto por un Vector. (***Ver figura 59***)

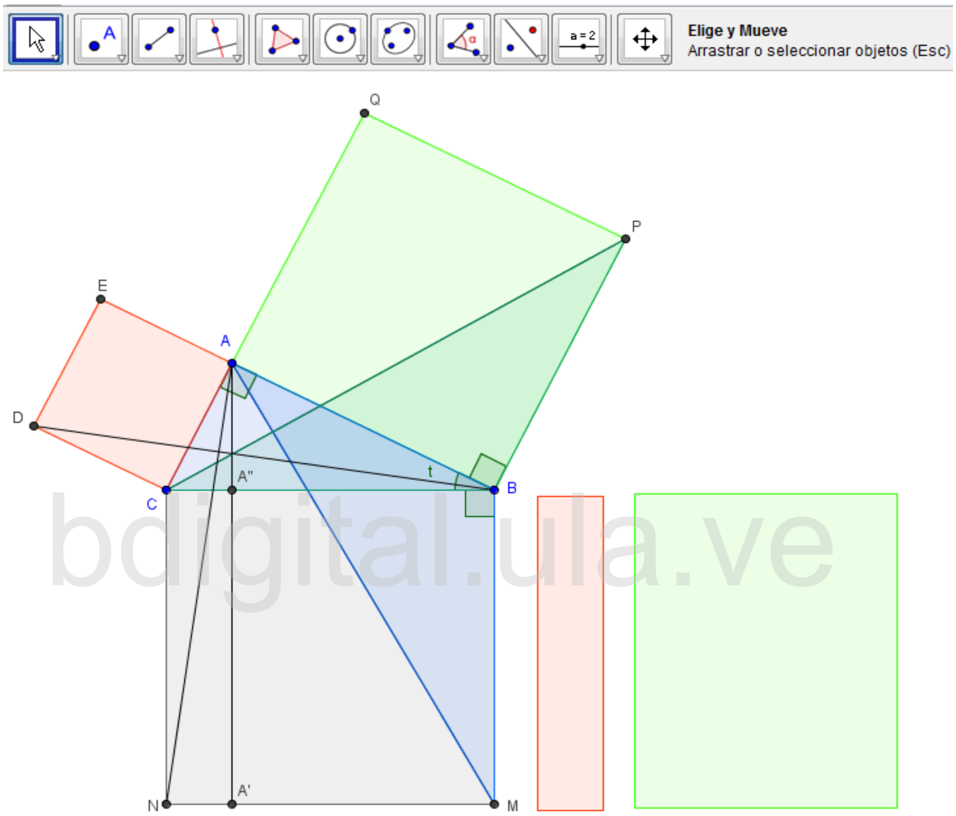



***Figura 59.*** Construcción y traslación de rectángulos $A'A''BM$ y $A'A''CN$

Para controlar dicha traslación se hace uso de un deslizador $t$, redefiniendo los nombres de los vectores $\vec{u}$, $\vec{w}$ y colocando en el inicio de cada uno el nombre del deslizador, de ésta manera, él mismo controlara la traslación de los rectángulos. (***Ver figura 60***).

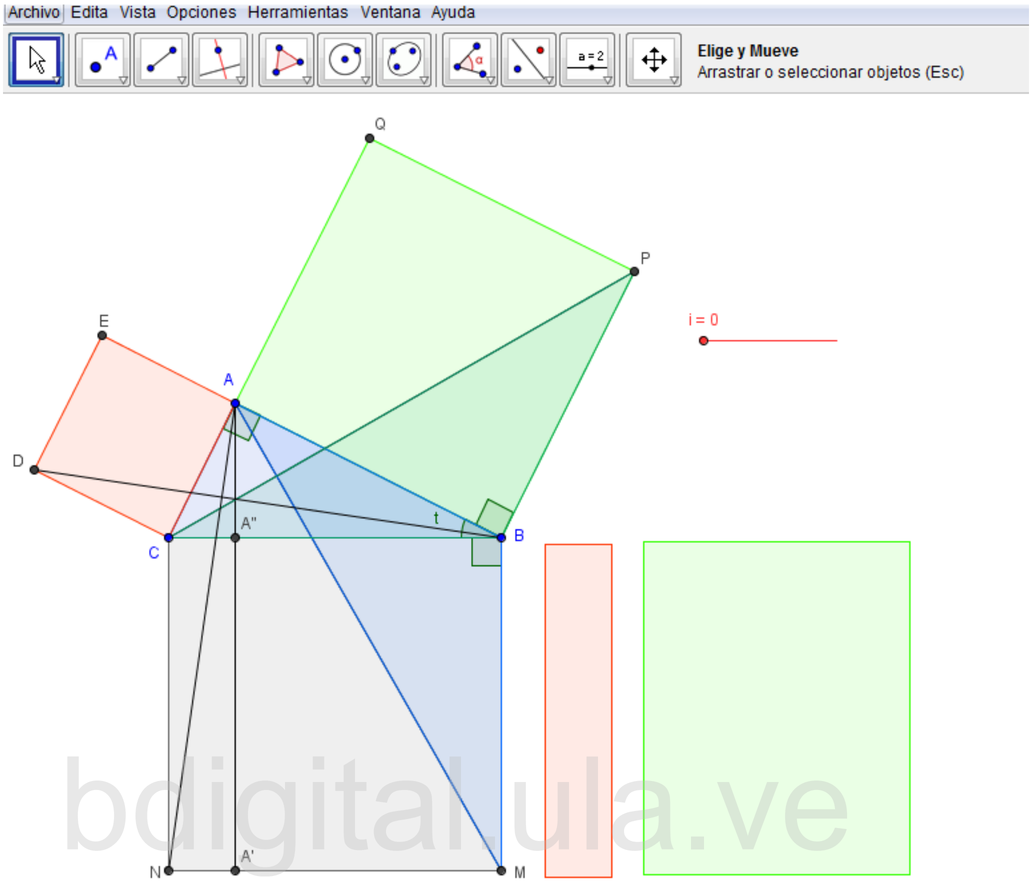



***Figura 60.*** Uso de la Herramienta Deslizador.

Se puede apreciar visualmente que:

$$área(NMBC) = área(ACDE) + área(BPQA).$$

Resaltar: Se puede controlar el orden en que aparecen los elementos de la construcción, para ello se puede usar la herramienta Oculta/Expone Objetos al (des) tildar el Casillero, cabe destacar que al hacer clic derecho sobre la casilla se despliega una ventana emergente en la que se pueden especificar los objetos que quedarían afectados por el estado de tal casilla. Estos objetos pueden seleccionarse desde la lista que ofrece la ventana de dialogo o directamente con el mouse en cualquier vista. Dichas casillas las se pueden ordenar de tal forma que se vea estéticamente adecuada la construcción. (***Ver figura 61***).

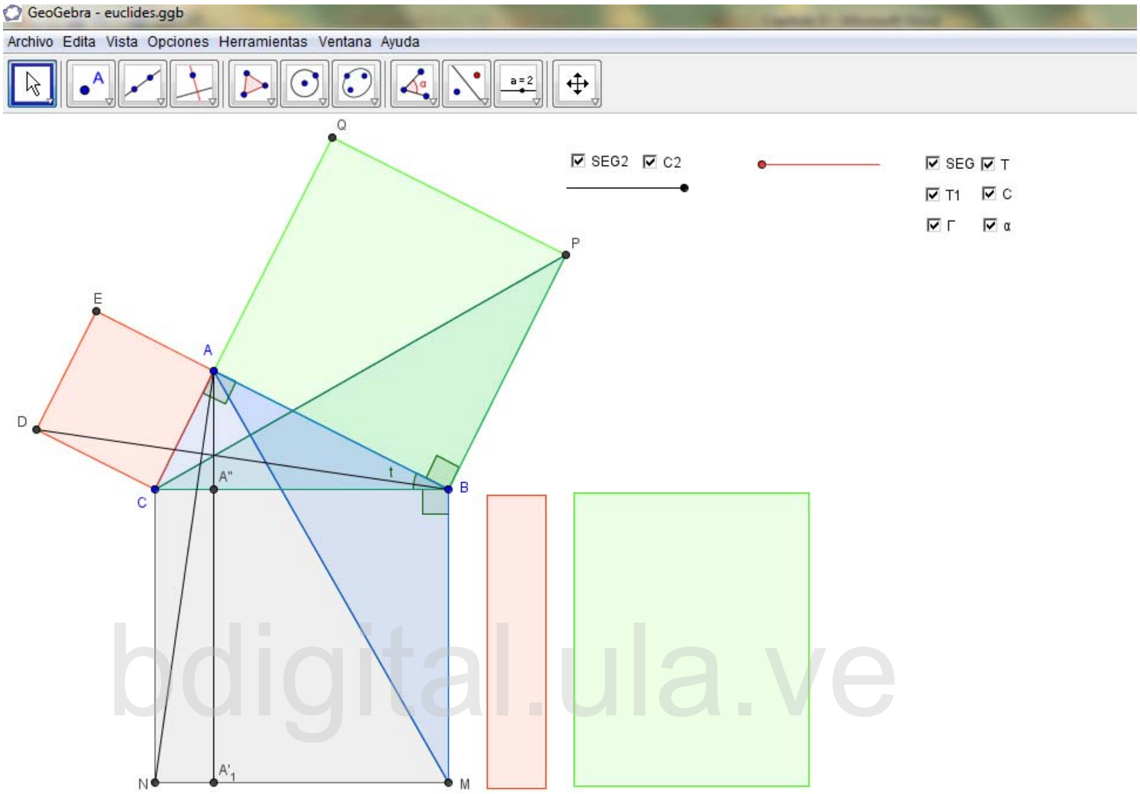



***Figura 61.*** Demostración (Euclides, libro I de los Elementos, proposición 47).

### 5.2.5 **Generalización de la Versión Euclidiana del Teorema de Pitágoras para Polígonos Regulares.**

Usualmente para elaborar una demostración de Teorema de Pitágoras, nos enfocamos en construir cuadrados sobre cada lado del triángulo rectángulo, ahora bien, si en vez de construir un cuadrado, construimos otro polígono regular, es oportuna realizar la siguiente interrogante ¿el área del polígono regular construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los polígonos regulares semejantes construidos sobre los catetos?. Usando las bondades del GeoGebra se dará respuesta a dicha pregunta.

Se comienza con el polígono regular de tres lados, el Triángulo Equilátero:

Dibujemos un triángulo rectángulo $ABC$, y construyamos un triangulo equilátero sobre la hipotenusa, sabemos que un triangulo equilátero tiene todos los lados iguales por tal motivo debemos hacer uso de la herramienta polígono regular e indicar que los lados del polígono que se desea en nuestro caso será 3. (***Ver figura 62***)



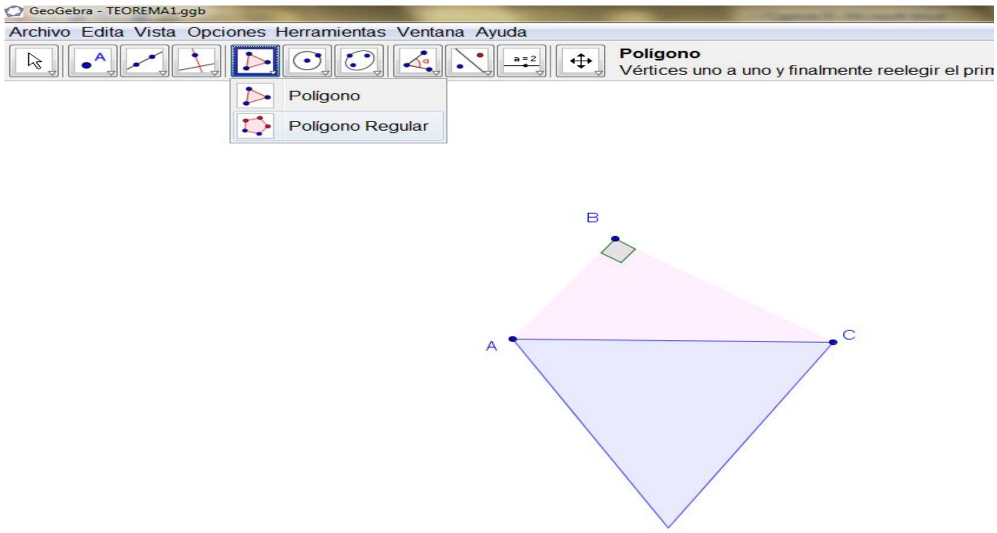



***Figura 62***. Construcción de un triángulo equilátero sobre la hipotenusa.

En los catetos construiremos  Triángulos Equiláteros semejantes al triangulo equilátero construido sobre la hipotenusa. (***Ver figura 63***).

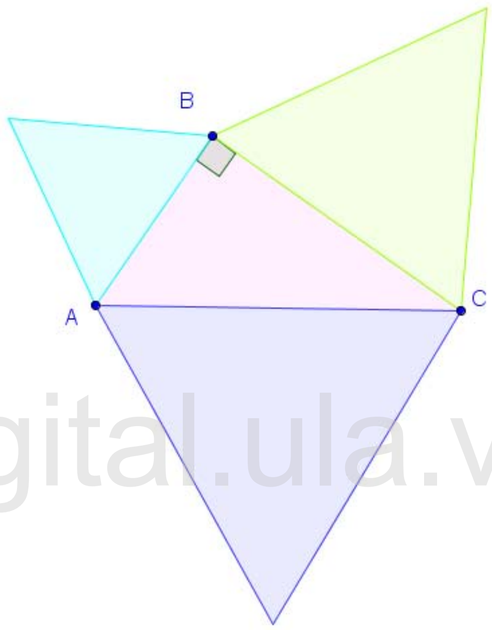




***Figura 63***. Construcción de  triángulos equiláteros sobre c/u de los Catetos.

GeoGebra  brinda numerosas herramientas  geométricas  pero una de sus ventajas sobre otros software de Geometría es que también posee herramientas  algebraicas y de cálculos  las cuales nos permitirán  calcular el área de cualquier polígono.

Ahora bien con la ayuda del modo Área  estableceremos las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre el triangulo rectángulo, dicho resultado se expone como texto dinámico en la Zona Grafica, para obtener el área basta con tener activa la opción área y hacer clip dentro de cada triangulo equilátero ubicado en la Zona Grafica. (***Ver figura 64***).

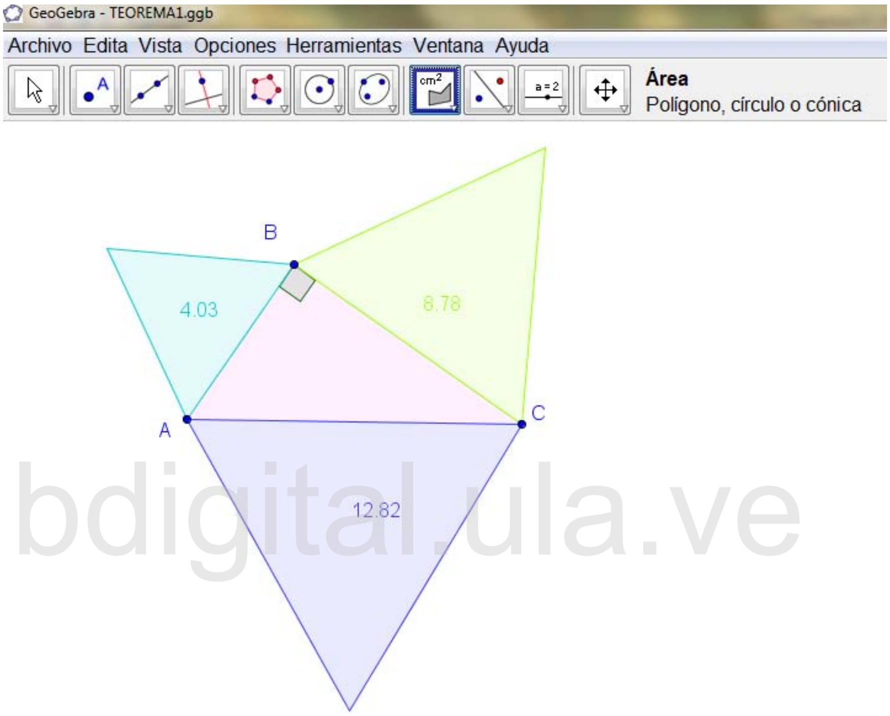



***Figura 64***. Uso del modo Área.

Finalmente dicho resultado puede ser presentado como un texto mixto, es decir un texto dinámico que muestre el valor de las áreas y un texto estático que indique a que triángulo se refiere dicho valor, para ellos usamos la opción insertar texto, hacemos clip en la Zona Grafica donde desee que aparezca dicho texto, y se desplegara una ventana emergente en cual colocaremos entre comilla el texto que deseamos estático y el texto que deseamos dinámico en nuestro caso el valor de las áreas sea antecedido por un signo +. De la siguiente manera: “Área de Polígono Verde + Área de

Polígono Turquesa =" + polígono2 + "+" + polígono4 + "= Área del Polígono Azul=" + (polígono2 + polígono4). (***Ver figura 65***).

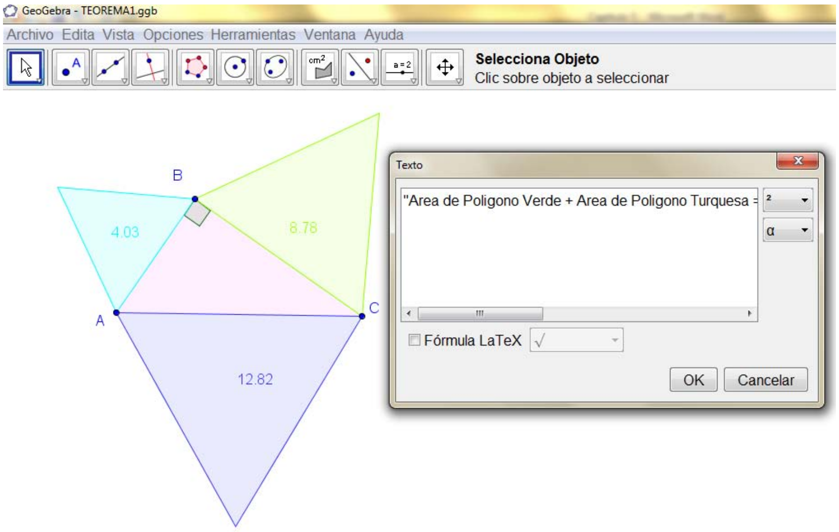



***Figura 65***. Ventana Emergente para insertar texto.



Finalmente se pudo comprobar que el área del triangulo equilátero correspondiente a la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos. (***Ver figura 66***).

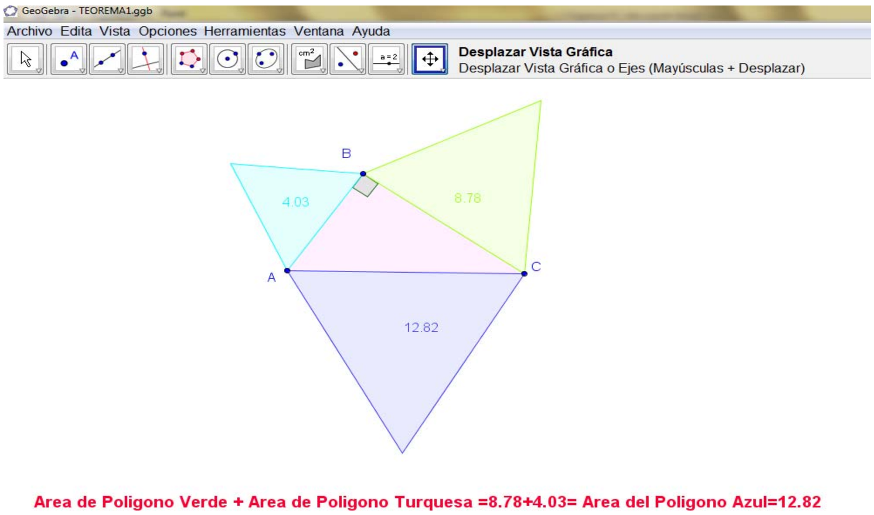



***Figura 66***. Teorema de Pitágoras para Triángulo Equilátero.

Cualquier polígono regular cumple con el teorema de Pitágoras como se pudo mostrar en el capitulo anterior específicamente sección 4.7, ahora bien, acabamos de demostrar para el caso de un triangulo equilátero, el lector puede elaborar la construcción para: pentágono regular: polígono regular de 5, hexágono regular: polígono regular de 6 lados, heptágono regular: polígono regular de 7 lados, octágono regular: polígono regular de 8 lados,... y así sucesivamente.

## CAPITULO VI

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 6.1.- Conclusiones

La finalidad de la presente investigación fue demostrar que el estudiante promedio y egresado de la carrera de Educación mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de los Andes (NURR-ULA) puede obtener la habilidad necesaria para dominar en un corto periodo de tiempo y por si solos el software educativo GeoGebra 3.2, el cual puede ser empleado como TIC para la enseñanza del Teorema de Pitágoras. Para tal fin se comenzó realizando un estudio profundo desde sus orígenes hasta la actualidad del teorema en estudio ya que el conocimiento histórico previo en cualquier área de la matemática posibilita un mejor desempeño a la hora de aplicar cualquier estrategia innovadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en este caso la implementación de GeoGebra 3.2; seguidamente se selecciono un conjunto de demostraciones del Teorema de Pitágoras la selección permitió reducir el número de demostraciones a estudiar debido a que dicho teorema es, quizás, el que cuenta con el mayor numero de demostraciones en su haber y por tanto seria engorroso y prácticamente imposible el estudio de cada demostración existente del teorema de Pitágoras; por tal motivo se pudo estudiar cada una de las seleccionadas por separado y de manera profunda, lo que facilito la implementación de software educativo GeoGebra 3.2, luego se realizo una revisión detallada del software educativo GeoGebra 3.2 en cuanto a las funciones de los comandos básicos para construir geometría, así como también la forma de ejecutarlos, para luego interactuar con este software mediante la construcción de las demostraciones seleccionadas del Teorema de Pitágoras.

Todo lo antes mencionado, sirvió como instrumento para la recolección de datos, que luego de ser analizados permitieron establecer las siguientes conclusiones.

La implementación de GeoGebra 3.2 en la enseñanza del Teorema de Pitágoras tuvo un resultado satisfactorio en todo los aspectos, la creadora de la presente investigación (la muestra en cuestión), pudo obtener la habilidad necesaria en corto periodo de tiempo de manejar cada uno de los comandos del software educativo GeoGebra 3.2, así como también se logró reforzar los conocimientos matemáticos específicamente en el área de la geometría adquiridos durante la carrera, ya que se realizo una revisión bibliográfica de los conceptos matemáticos involucrados y algunas propiedades, y de esta manera podemos catalogar el aprendizaje obtenido como significativo.

El Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de Los Andes, no prepara a sus estudiantes ni los educa en el ámbito de las nuevas tecnologías debido a que se encuentra en disparidad con los avances tecnológicos del mundo globalizado en el que nos estamos desarrollando, por tal motivo los egresados en educación al desempeñarse en su rol como docente no están a la vanguardia con los nuevos cambios que se presentan en el ambiente laboral. Por esta razón uno de los objetivos principales de esta investigación fue implementar el software educativo GeoGebra 3.2 en la enseñanza del Teorema de Pitágoras para que el futuro egresado de la carrera de Educación Mención Física y Matemática entre vea la posibilidad de manejar software educativo y aplicarlo en un tema especifico para poder comprobar la efectividad que conlleva utilizar, por ejemplo, GeoGebra como una metodología novedosa en la enseñanza del Teorema de Pitágoras. Y de esta manera lograr aprendizajes significativos.

Es así como se puede afirmar que el uso del GeoGebra 3.2 se convierte en un aporte importante para la iniciación en el mundo de las nuevas tecnologías, demostrando con esto, que no existe justificación por parte de los profesores de matemáticas para evadir; primero, el uso de herramientas innovadoras como es el caso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, segundo, usar dicha implementación de GeoGebra 3.2 como estrategia de enseñanza- aprendizaje en las distintas Instituciones Educativas que cuenten (o no) con los CEBIT.

Finalmente, es importante acotar que la inclusión de las TIC en el área de la matemática se debe hacer con suma atención y cuidado, sin creer que son la panacea o la solución a la complejidad e infinidad de problemáticas que conlleva el aprendizaje de la matemática.

## 6.2.- Recomendaciones

Luego de haber culminado el presente trabajo de investigación, se considera sugerir a egresados y estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemáticas, y a la comunidad universitaria en general las siguientes recomendaciones:

Para poner al día la práctica educativa se deben hacer esfuerzos por incorporar nuevas tecnologías en el salón de clase, con docentes informados y preparados para adaptar sus experiencias al trabajo con las tecnologías de información y comunicación, donde los educandos sean participantes activos y constructivos, con recursos informáticos que permitan crear modelos, investigar y probar conjeturas acerca de distintos fenómenos, es así como el NURR-ULA debe incentivar la actualización del personal docente, específicamente en el área de la matemáticas, no solamente en el uso de las TIC, sino en el diseño de estrategias y actividades didácticas utilizando las TIC como medio para generar aprendizaje en dicha área y de esta manera preparar adecuadamente a los futuros profesores de matemáticas, ya que el éxito de cualquier innovación en el ámbito educativo depende en gran medida de la actuación docente.



En los programas de enseñanza de las matemáticas, la tecnología debería utilizarse, amplia y responsablemente, con el objetivo de enriquecer el aprendizaje, por tal motivo se recomienda al Ministerio del Poder Popular para la Educación crear planes y proyectos que instruyan e incentiven a los profesores en el área de matemáticas a implementar e implantar el uso de programas educativos, un comienzo de ello puede ser incorporar el software educativo GeoGebra como recurso de enseñanza –aprendizaje en el área de la matemática y así darle utilidad a los CEBIT en las distintas instituciones que gozan de ellos. Aunque es importante acotar, que si dicha institución educativa no cuenta con un CEBIT, que no sea esto la excusa para no innovar a la hora de enseñar matemáticas ya que se pueden buscar vías alternas al momento de implementar estas herramientas y para ello se necesita la ayuda de la comunidad educativa en general y así cumplir esta importante meta en el área de la matemáticas.

Es evidente que en el NURR no existe una política académica que cambie la forma tradicional y rutinaria que han venido adoptando los estudiantes y egresados de la carrera Educación Mención Física y Matemáticas, es así como la mayoría de ellos son la imagen de docentes tradicionales, que apenas usan el pizarrón para impartir o explicar sus conocimientos. Por tal motivo se recomienda implementar estrategias académicas innovadoras que eduquen a los futuros profesores a lo largo de la carrera para que así impartan sus clases con herramientas actuales que permita un aprendizaje significativo a sus estudiantes, dicha transformación académica podría comenzar con la inclusión de temas referentes a el uso de las TIC, sus usos y aplicaciones en la asignatura Introducción a la Informática. Por otro lado se podría introducir en la cátedra, Taller de Matemáticas, el estudio de programas de computación como GeoGebra 3.2, que sirvan como herramienta tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, de esta manera los futuros profesores estarían mejor y más capacitados a la hora de impartir sus clases.

**REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**


- Arias, F. (2006): El Proceso de la investigación. (3ª ed). Caracas-Venezuela: Episteme.

- Ausubel, D. P. (1973). "Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento". En Elam, S. (Comp.)La educación y la estructura del conocimiento. Investigaciones sobre el proceso de aprendizaje y la naturaleza de las disciplinas que integran el currículum. Ed. El ateneo. Buenos Aires. Págs. 211-239.

- Ausubel, D. P. (1976). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Ed. Trillas. México.

- Ausubel, D. P. (1983) Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo .2° Ed.TRILLAS México.
- 
- Ausubel, D. P. (2002). Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Ed. Paidós. Barcelona.

- Andee Rubin, "La tecnología se une la Educación Matemática: Imaginando un futuro práctico" Julio de 2000.[Versión Electrónica] Consultado el 24 de Noviembre de 2011 de: http://www.air.org/forum/abRubin.htm.

- Baldor, J.A. (2003): Geometría Plana y del Espacio (19 ed.). México: Publicaciones Cultural.

- Bruner, Jerome. (1960). El proceso de educación. Cambridge: Harvard University Press.

- Bruner, Jerome. (1966). Hacia una teoría de la instrucción. Cambridge: Harvard University Press.

- Bencomo M, (2011): Construcción de Teselados *Escherianos* implementando GeoGebra 3.2. Universidad de Los Andes, Núcleo Universitario Rafael Rangel. Venezuela.

- Cabero, J. (2001): Tecnología educativa .Diseño y utilización en la enseñanza. Barcelona-España: Paidòs.

- Cabero, J. (2001): El impacto de las NITC sobre el proceso educativo I. Revista Candidus (Nº 16) [Versión Electrónica] Consultado el 22 de Noviembre de 2011 de: http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaNumeroRevistaIU.visualiza&numeroRevista_id=399.

- CARRETERO, M. y PALACIOS, J. (1982)"Los estilos cognitivos. Introducción al problema de las diferencias cognitivas individuales". Infancia y Aprendizaje, 17, pp. 20-28.

- Castro, R. (2004): Un modelo Constructivista para la comunicación en la enseñanza de la Matemática. Educere, 8 (24):119-127.

- COLL, C. (1988): «Significado y sentido en el aprendizaje escolar». Infancia y Aprendizaje, 41,131-142.

- Dunham, P. & Dick, T. (1994). La investigación sobre las calculadoras gráficas. Profesor de matemáticas. 87 (6). Pp. 440-445.

- De Aimas, M.: *Sobre el Teorema de Pitágoras*. Revista Números. Sociedad Canaria “*Isaac Newton*” de Profesores de Matemáticas, nº 10, Tenerife, agosto, 1984 pp.15–33.
-
- Euclides: Elementos. Traducción y notas de M.L. Puertas. Gredos. Madrid, 1996. Libro I, p.260, Proposición I.47.

- EUCLIDES: *Los seis primeros libros de Los Elementos*. Traducción de Rodrigo Çamorano. Casa de Alonso de la Barrera. Sevilla, 1576. Nueva edición de 2000 de Ediciones Universidad de Salamanca.

- García, V. (2001): La tecnología en la Escuela venezolana. Revista Candidus (Nº 16) [Versión Electrónica] Consultado el 22 de Noviembre de 2011 de: http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaNumeroRevistaIU.visualiza&numeroRevista_id=399.

- Gómez, J. (2004). Las TIC en educación. [Versión Electrónica]. Consultado 5 de Diciembre de 2011 de: http://boj.pntic.mec.es/jgomez46/ticedu.htm.

- Glorifica y Achicharre (1999): Las **TIC para el logro de un aprendizaje significativo de la Matemática** [Versión Electrónica]. Consultado el 17 de Febrero de 2012 de: http://www.monografias.com

- Groves, S. (1994). Calculadoras: Un ambiente de aprendizaje para promover el sentido de los números. Ponencia presentada en la reunión anual de la American Educational Research Association. Evaluación Nacional de Logros Académicos in CENTROS Escolares Resultados 2009. [Versión Electrónica]. Consultado el Día 27 de noviembre de 2011 en: http://enlace.sep.gob.mx/ba/

- Guzmán y Hernández. (1993): Las **TIC para el logro de un aprendizaje significativo de la Matemática** [Versión Electrónica]. Consultado el 17 de Febrero de 2012 de: http://www.monografias.com.

- GUTHRIE, W.: *Pitágoras y los pitagóricos* (en *Historia de la Filosofía griega*. Vol. Cap.IV).Gredos, Madrid, 1984.

- GUZMÁN, M.: *Los Pitagóricos*. [Versión Electrónica]. Consultado el 8 de octubre de 2011 de: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/ pitagoricos.htm.

- Hernández. R, Fernández, y Baptista, P. (2003): Metodología de la Investigación. (3 ª ed.).Bogotá-Colombia: McGraw-Hill.

- Hernández. A, Mamo J. (2010): El Lenguaje de Programación Logo, una Alternativa Tecnológica para construir Geometría. Universidad de Los Andes, Núcleo Universitario Rafael Rangel. Venezuela.

- Hernández F, Sánchez J. (2010): GEOGEBRA, Una propuesta para su Autoaprendizaje y Utilización como Herramienta Tecnológica, por parte de Estudiantes de Educación Mención: Física y Matemáticas del Núcleo Universitario "Rafael Rangel". ULA-NURR Venezuela.

- Huidobro, J. (2009): Tecnologías de Información y Comunicación. [Versión Electrónica]. Extraído el 12 de Diciembre de 2011 de: http://www.monografias.com.

- Hohenwarter, M y Hohenwarter, J. Documento de Ayuda de GeoGebra: Manual Oficial de la Versión 3.2. [Versión Electrónica]. Extraído el 3 de septiembre de 2011 de: www.geogebra.org.

- Moise, E. (1968): Elementos de Geometría Superior. (1ª ed.) . México 22, D.F. Editorial Continental, pp. 196-207.

- Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. En M.A. Moreira, C. Caballero y Rodríguez Palmero ML Sahelices, Eds. Acta del II Encuentro Internacional de Aprendizaje Significativo. Servicio de Publicaciones. Universidad de Burgos. Pp. 19-44.

- Moreira, M. A. (2000 a). Aprendizaje Significativo: teoría y práctica. Ed. Visor. Madrid.

- Palomo, R., Ruiz, J. y Sánchez, J. (2006). *Las TIC como agente de innovación educativa*. Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Disponible en http://www.juntadeandalucia.es/averroes/publicaciones/nntt/TIC_como_agentes_innovacion.pdf.

- Pérez, A.: *Pitágoras: mucho más que un teorema* (en la Serie de TVE "*EL UNIVERSO MATEMÁTICO*"). La Aventura del Saber, 2000.

- Pozo, J. I. (1989). Teorías cognitivas del aprendizaje. Ed. Morata. Madrid.

- Rojano, T. (1996): «El desarrollo de los aspectos algebraicos de resolución de problemas dentro de un entorno de hoja de cálculo», en Bednarz, N.; Lee, L. y Kieran, C. (eds.) Métodos para el Álgebra: Perspectivas para la Investigación y la Docencia, Londres, Boston, Kluwer Academic Publishers.

- Sheets, C. (1993). Los efectos de aprendizaje de la computadora y las herramientas de resolución de problemas en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes de secundaria de funciones matemáticas. Universidad de Maryland.

- Sabino, C. (2006). Como hacer una Tesis y Elaborar todo tipo de escritos. (1ª ed.) Venezuela: Panapo.

- Toffler, A., y Toffler, H. (1994). Creación de una nueva civilización. Atlanta: Turner Publishing.

- Tamayo, M. (2001): EL Proceso de la Investigación Científica (4ª ed). Ciudad de Mexico-Mexico: Limosa.

- UNESCO. (2004): Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente.[Versión Electrónica]. Extraída el 12 de Enero de del 2012 de: http://www.anr.edu.pe/salavirtual/file.php/1UNESCO_TICs3.pdf.

- UNESCO. (2008): Estándares de competencia en TIC para docentes.[Versión Electrónica]. Consultada el 8 de Febrero de del 2012 de: http://www.anr.edu.pe/salavirtual/file.php/1UNESCO_TICs3.pdf.

- Zubira, H. (2004): el constructivismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje del siglo XXI. Barcelona-España: Plaza y Valdés.