REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

NÚCLEO UNIVERSITARIO “RAFAEL RANGEL”

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRUJILLO EDO. TRUJILLO

Construcción de Teselados Escherianos empleando GeoGebra 3.2

Autora:

Bencomo G. María A. C.I: 17.831.397

Tutor: M.Sc. Romano F. José V.

Trujillo, Abril 2011

CONSTRUCCIÓN DE TESELADOS ESCHERIANOS EMPLEANDO GEOGEBRA 3.2

Autora: Br. Bencomo G. María A.

Tutor: M.Sc. Romano F. José V.

RESUMEN

La intención de este estudio se basó, principalmente, en diseñar un manual que contuviese un tema muy particular de Geometría como lo es la División Regular del Plano (Teselados), inmerso en las obras del excelso artista gráfico, Maurits Cornelius Escher. Para este fin se diseñó, en principio, una guía para construir teselados relativamente sencillos, utilizando para ello el software educativo GeoGebra 3.2 como una de las herramientas que ofrecen las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC's), para la enseñanza de la Geometría. El trabajo de investigación se orientó hacia un enfoque cualitativo de tipo exploratorio, descriptivo y confirmatorio; de diseño transversal y longitudinal de tendencia. La investigación se realizó sobre una muestra representada por la creadora de este estudio. Las técnicas para la recolección de información que se utilizaron en las distintas fases de la investigación fueron: observación, documentos/materiales escritos y audiovisuales. Con esta investigación no se pretende hacer hincapié sobre el hecho de que al disponer de nuevas técnicas resolvería todos los problemas de la educación, pues las tecnologías son útiles pero no bastan, éstas son cada vez más una condición necesaria para la evolución educativa, pero no son una condición suficiente, lo que sí se quiere afirmar es que al emplear inteligentemente las nuevas técnicas en el ámbito educativo, serviría para mejorar nuestras prácticas pedagógicas, dejando claro que las TIC's generan nuevos escenarios didácticos para los estudiantes y que de esta manera las actividades pautadas resultan más amenas, creativas y dinámicas.

Palabras Claves: Geometría, División Regular del Plano (Teselados), Escher, TIC's.

ÍNDICE GENERAL

Pág.

Resumen………………………………………………………………………… ii

Introducción…………………………………………………………………... 1

Capítulo I: El uso de software matemático en la enseñanza de la Geometría……………………………………………………………………….. 4

1.1.- Planteamiento del Problema………………………………………… 4

1.2.- Objetivos de la Investigación………………………………………. 11

1.2.1.- Objetivo General……………………………………………….. 11

1.2.2.- Objetivos Específicos…………………………………………. 11

1.3.- Justificación………………………………………………………… 12

Capítulo II: Marco Teórico…………………………………………………... 15

2.1.- Antecedentes de la Investigación………………………………… 15

2.2.- Corrientes Psicopedagógicas…………………………………….. 20

2.2.1.- 2.2.1.- Teoría de Vygotsky…………………………………. 20

2.2.2.- Teoría de Ausubel……………………………………………... 22

2.3.- Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC's)…….. 23

2.3.1.- Características de las TIC's…………………………………... 25

2.3.2.- Incidencias en la Educación según la perspectiva de Echeverría……………………………………………………………………….. 26

2.3.2.1.- Exige nuevas destrezas…………………………………….. 26

2.3.2.2.- Posibilita nuevos procesos de enseñanza y aprendizaje aprovechando las funcionalidades que ofrecen las TIC's………………. 26
2.3.2.3.- Demanda un nuevo sistema educativo…………………… 27
2.3.2.4.- Exige el reconocimiento del derecho universal a la educación también en el "tercer entorno"…………………………………. 27
2.4.- Los Software Educativos como TIC's…………………………... 28
2.4.1.- Software de Geometría…………………………………………. 29
2.4.1.1.- Poly Pro……………………………………………………….. 29
2.4.1.2.- Cinderella……………………………………………………… 30
2.4.1.3.- Sketchpad…………………………………………………….. 31
2.4.1.4.- Regla y Compás……………………………………………… 32
2.4.1.5.- GEUP…………………………………………………………… 34
2.4.1.6.- Cabri-Geometre………………………………………………. 35
2.4.1.6.7.- GeoGebra…………………………………………………… 37
2.5.- Las TIC's en la Educación Venezolana…………………………... 41
Capítulo III: Marco Metodológico…………………………………………… 44
3.1.- Consideraciones Generales……………………………………... 44
3.2.- Tipo de Investigación………………………………………………... 45
3.3.- Diseño de la Investigación………………………………………….. 47
3.4.- Universo y Muestra………………………………………………….. 48
3.5.- Técnicas e instrumentos para la recolección de datos………….. 50

3.5.1.- La Observación Cualitativa…………………………………….. 51
3.5.2.- Documentos/materiales escritos y audiovisuales……………. 52
Capítulo I: El uso de software matemático en la enseñanza de la Geometría……………………………………………………………….. 53
4.1.- Transformaciones Isométricas…………………………………..... 54
4.2.- Teselado…………………………………………………………..... 54
4.2.1.- Teselados Regulares…………………………………………… 55
4.2.2.- Teselados Semirregulares……………………………………… 55
4.2.3.- Teselados Demiregulares………………………………………. 56
4.2.4.- Teselados Irregulares…………………………………………… 58
4.3.- Los 17 Grupos de Simetría………………………………………….. 58
4.4.- Antecedentes Históricos…………………………………………….. 65
4.5.- Biografía de Maurits Cornelius Escher (1898-1972)……………… 67
4.6.- Descripción de algunos Teselados de Escher…………………… 82
4.6.1.- Cielo y Agua I…………………………………………………..... 82
4.6.2.- Día y Noche…………………………………………………….... 82
4.6.3.Reptiles……………………………………………………………... 83
4.6.4.- Límite Circular IV, Ángeles y Demonios……………………..... 86
Capítulo V: Guía para construir teselados “sencillos” empleando el GeoGebra 3.2……………………………………………………………… 87
5.1.- Consideraciones Generales………………………………………... 87

5.1.1.- Ventana principal de GeoGebra 3.2………………………….. 88
5.2.- Construcción de Teselado a partir de un Triángulo……………… 89
5.3.- Construcción de Teselado Hueso Nazarí…………………………. 92
5.3.1.- Primera construcción del Hueso Nazarí……………………… 92
5.3.2.- Segunda construcción del Hueso Nazarí…………………….. 96
5.4.- Construcción de Teselado Pajarita Nazarí……………………….. 100
5.5.- Construcción de Teselado a partir de un Hexágono…………….. 104
Capítulo VI: Manual para la construir Teselados Escherianos usando el GeoGebra…………………………………………………………..... 110
6.1.- Consideraciones Generales……………………………………... 110
6.2.- Construcción de Teselado Reptiles de Escher…………………… 111
6.2.1.- Procedimiento para colorear la Prototesela………………….. 123
6.2.2.- Procedimiento para Teselar……………………………………. 125
6.3.- Construcción de Teselado Pajaritas de Escher………………….. 129
6.4.- Construcción de Teselado Patitas de Escher…………………….. 137
6.5.- Consideraciones Finales……………………………………………. 142
Capítulo VII: Conclusiones y Recomendaciones…………………………. 144
7.1.- Conclusiones………………………………………………………. 144
7.2.- Recomendaciones…………………………………………………… 147
Referencias Bibliográficas…………………………………………………... 149
Anexos………………………………………………………………………… 153

INTRODUCCIÓN

Los cambios tecnológicos que se han venido aconteciendo en el mundo están concatenados con el avance de nuestra cultura, por lo tanto éstos no deberían desligarse de la pedagogía tradicional en lo que respecta al hacer buen uso del ordenador. Ante este reto, la educación venezolana no ha empleado inteligentemente las técnicas novedosas existentes para darle un sentido distinto a la interrelación enseñanza-aprendizaje en el ámbito educativo.

Cabe destacar que el Currículo Básico Nacional del país exige la incorporación de estas técnicas, más sin embargo, la crisis educativa aún sigue latente, sobre todo cuando se refiere a la enseñanza de las Matemáticas, en particular a una de sus ramas, la Geometría.

Para que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría se dé con resultados óptimos, es decir, que el alumno obtenga un aprendizaje significativo que induzca a desarrollar su propio pensamiento creativo-lógico, es necesario que el docente motive la curiosidad de sus estudiantes, valiéndose de la interesante relación que existe entre el Arte y la Geometría con respecto al entorno que les rodea.

La idea fundamental de esta investigación se basa en diseñar un manual que contenga las instrucciones necesarias para construir Teselados de Escher, utilizando el software educativo GeoGebra 3.2, como una de las herramientas que ofrecen las TIC's para la enseñanza de la Geometría.

Por lo tanto, la presente investigación está conformada por:

Capítulo I: comprende el planteamiento y formulación del problema, objetivos de la investigación y su respectiva justificación.

Capítulo II: en este apartado se presentan antecedentes con la temática abordada en la investigación y se desarrollará cada uno de los argumentos teóricos vinculados a ésta.

Capítulo III: consta de la Metodología empleada en la investigación para que se pueda llevar a cabo el resultado de los objetivos, a su vez, se indica el tipo, diseño y muestra de la investigación y finalmente los instrumentos empleados para la recolección de datos.

Capítulo IV: en esta sección se presenta la biografía de Maurits Cornelius Escher dentro del marco que nos atañe. Además, se describen algunas de sus obras en las que se representa la temática central de la investigación: La División Regular del Plano.

Capítulo V: contiene una guía con instrucciones para construir teselados "sencillos" empleando el GeoGebra 3.2.

Capítulo VI: está conformado por el Manual para la Construcción de Teselados Escherianos usando el GeoGebra.

Capítulo VII: se presentan las conclusiones y recomendaciones de rigor, culmina con las referencias bibliográficas y anexos ajustados a la investigación.

CAPÍTULO I

El uso de software matemático en la enseñanza de la Geometría.

1.1.- Planteamiento del Problema

Las Matemáticas tienen un valor pedagógico, didáctico y formativo evidente, ya que ésta Ciencia se encuentra presente en la vida cotidiana de cada ser humano y, aún sabiendo esto, la mayoría de las personas tiene un enfoque negativo y radical sobre ellas, encontrándolas difíciles y aburridas, dando paso a la inseguridad en el momento de la resolución de problemas de toda índole.

El campo del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas está lleno de muchos prejuicios; la construcción de este conocimiento para un "no experto" requiere de una actitud de flexibilidad, interés, perseverancia, tenacidad y sentido crítico, haciendo uso constantemente del ancestral método de aprendizaje por ensayo-error, para así aprender a diferenciar entre el fracaso y el éxito; mejorando de esta manera el rendimiento futuro y desarrollando un conjunto de ideas, que permanecerán la mayoría de las veces en una evolución continua.

El sistema educativo venezolano ha estado sumergido en una profunda crisis en todos los niveles, lo cual ha influido considerablemente en el rendimiento de los estudiantes, frenando el desarrollo de habilidades tales como: la creatividad, el razonamiento y la imaginación. Visto así, la calidad de la enseñanza y del aprendizaje se ve afectada debido a las dificultades de adaptación a los cambios y transformaciones educativas del país, lo que refleja deficiencia en la práctica docente.

Uno de los lineamientos más afectados en la crisis educativa es, sin duda, el de las Matemáticas, en el cual los docentes no utilizan los distintos recursos de forma adecuada para darle un sentido diferente a la manera de enseñarla; específicamente en lo que respecta a una de sus ramas, la Geometría. Alexandrov (2000) se refiere al proceso de enseñanza-aprendizaje de esta rama como: *"una combinación de imaginación gráfica y de lógica estricta a la que se organiza recíprocamente y la tarea de su enseñanza es la de desarrollar cuatro cualidades correspondientes a la de los alumnos: imaginación espacial, comprensión, razonamiento práctico y pensamiento lógico"* (p.127).

Cabe destacar que el docente debería emplear distintos recursos estratégicos como medio de despertar el interés en los alumnos para que, por ejemplo, la Geometría les resultase amena, de modo que así mejorase su rendimiento. La enseñanza de dicha rama de las Matemáticas se ha orientado básicamente en presentar, en forma por demás harto mecánica, sus nociones fundamentales, sin apelar a su intrínseco valor como herramienta formadora del buen pensar y sin que intervenga una relación de la misma con la cotidianidad, para que de esta manera, el estudiante afiance sus conocimientos básicos, naturalmente aprendidos, con el propósito de relacionarlos, jerarquizarlos y aplicarlos.

En efecto, los recursos y/o técnicas usadas son aspectos determinantes en la estructura del aprendizaje significativo de los estudiantes, ya que de esta manera el docente sirve de mediador para ayudarlos a descubrir soluciones y búsquedas de alternativas para lograr sus objetivos y así integrar, en distintas facetas de la vida, los conocimientos de geometría que poco a poco van adquiriendo.

La Geometría, como contenido, permite emplear el discernimiento para diferenciar los conceptos generales de los particulares, tomando en cuenta que estos conceptos siempre están incluidos en un conjunto de reflexiones que pueden ajustarse a la realidad cotidiana.

Comúnmente se hace hincapié en que la geometría no debería enseñarse de la forma mecánica en la que normalmente se hace, presentando “sus figuras” de forma fría y desconectadas del entorno al cual pertenecemos; al contrario, debería motivarse al estudiante partiendo de la perentoria necesidad de usar las herramientas que ella nos ofrece, utilizando para ello técnicas novedosas ya al alcance de todos.

Es necesario comprender que una de las alternativas para que el aprendizaje de la geometría sea significativo es desarrollar, a través de los recursos adecuados, la intuición, y a su vez, vincular ésta con conocimientos previos, para que el alumno se permita al mismo tiempo ampliarlos en el campo creativo, con el fin de visualizar y/o crear mentalmente distintas formas y figuras que poco a poco acrecienten estos conocimientos y solidifiquen su aprendizaje.

Dentro del campo del pensamiento geométrico, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, es necesario crear espacios que consientan una conexión con el entorno en la cual se tenga acceso a la expresión artística del estudiante, partiendo del reconocimiento previo y utilizando nociones geométricas para que éstas ayuden a promover el desarrollo del pensamiento matemático en términos generales.

Se puede señalar que la relación de las Matemáticas con el Arte es un aspecto muy interesante en lo que a obras de distintos artistas se refiere, tal como en el caso de Maurits Cornelius Escher (1898-1972). Escher relacionó sus obras artísticas con la Geometría y aunque no fue en su comienzo un experto en dicha materia, durante su vida fue desarrollando fuertes habilidades geométricas expresando mucho talento en sus creaciones, hasta convertirse en uno de los artistas más importantes de su época por sus inusuales obras, tales cuales, las basadas en la división regular del plano, demostrando que las Matemáticas abarcan un amplio contenido que no se limita a sólo números y operaciones.

El proceso educativo del país no puede aislarse de los cambios pedagógicos actuales que se suceden en el mundo, tal como lo es la incorporación de nuevas tecnologías para contribuir en el desarrollo de las capacidades cognitivas del alumno; sin embargo, para que éste estructure un aprendizaje significativo brindado por el acceso a la información inmediata que ofrecen estas nuevas herramientas, debe estar guiado por mediaciones pedagógicas que le permitan sustentar su desarrollo, tomando en cuenta la presencia del esfuerzo personal en la relación docente-alumno y así no confundir el conocimiento, o el saber, con la información.

Es necesario resaltar que el uso de las TIC's motiva al alumno a ser investigador, estimula el desarrollo de habilidades intelectuales tales como las ya mencionadas, creatividad, razonamiento e imaginación; lo cual conlleva a que él sea el formador de su propio aprendizaje. Ahora bien, el empleo de las tecnologías en lo que respecta a la relación de las Matemáticas con el Arte, tiene el propósito de que los alumnos alcancen aptitudes a través de la exploración, abstracción, estructuración y evaluación, para llegar a resultados que les permitan comunicarse y hacer interpretaciones y representaciones, aún en la vida real, con una perspectiva estética que atienda su desarrollo integral y así descubrir que las matemáticas están relacionadas con el entorno que les rodea.

El uso de software matemático en la enseñanza de la Geometría ofrece nuevas formas de educar, aprender y hacer matemáticas de manera interactiva. Es de hacer notar que existe una gran variedad de programas destinados a hacer Geometría, donde los elementos que se construyen se definen mediante propiedades cualitativas, en las cuales la geometría analítica se encuentra implícita en el funcionamiento interno de cada programa. Cabe resaltar que dichos programas, aunque sean similares, tienen cada uno características exclusivas que les hacen mejor en algún tipo de construcción geométrica que en otros. Algunos de estos son: Poly Pro, Cinderella, Sketchpad, Regla y Compás, GEUP, Cabri-Geometre y GeoGebra.

En particular, el GeoGebra es un programa muy parecido al Cabri en cuanto a herramientas de construcción se refiere; lo que los diferencia, es la incorporación de elementos algebraicos y de cálculo en una misma ventana (en el GeoGebra). Éste es un software libre y gratuito desarrollado por el Matemático Austriaco Markus Hohenwarter.

Debido a los cambios tecnológicos que ocurren en la actualidad, no debería desligarse el uso de las nuevas técnicas con la educación tradicional para la enseñanza de la Geometría. Puntualizando, un tópico geométrico en específico, como lo es la División Regular del Plano, tema predilecto en las obras de Escher, abordado con la ayuda de las TIC's cobra una relevancia totalmente insospechada comparada con el enfoque habitual.

En virtud de lo antes expuesto, surge un tema de investigación a partir de la siguiente interrogante:

¿Cómo construir Teselados Escherianos usando el programa GeoGebra 3.2?

1.2.- Objetivos de la Investigación

1.2.1.- Objetivo General:

Diseñar un manual para la construcción de Teselados Escherianos empleando como herramienta tecnológica el programa GeoGebra 3.2, el cual puede usarse como una TIC en la enseñanza de la Geometría.

1.2.2.- Objetivos Específicos:

- Brindar, mediante el manual, nociones básicas para la construcción de teselados usando el programa GeoGebra 3.2.
- Desarrollar el pensamiento creativo-lógico por medio de la elaboración de bocetos de teselados de Escher, combinando el método de aprendizaje ensayo-error con la aplicación del programa.
- Motivar la curiosidad del alumno a través de la relación que existe entre el Arte y la Geometría con respecto al entorno que lo rodea.
- Promover el desarrollo de habilidades y destrezas matemático-tecnológicas.

1.3.- Justificación

Las Matemáticas son la primordial herramienta con que ha contado la humanidad para comprender el mundo que nos circunda. Del mismo modo resulta difícil creer, y/o pensar, en que el avance tecnológico debería estar al margen de la enseñanza y el aprendizaje de aquellas.

Asimismo, la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría han sido un obstáculo tanto para el docente como para el alumno. En tal sentido, el estudio de ésta área, en Educación Matemáticas, se integra a un mundo complejo, siendo los estudiantes los más perjudicados para la estructura de su aprendizaje.

Desde el punto de vista teórico, la investigación se sustenta debido a que el propósito de este estudio es diseñar un manual para la construcción de Teselados Escherianos empleando el programa GeoGebra 3.2, el cual puede ser aplicado como una TIC para la enseñanza de la Geometría.

La aplicación del programa permitirá el uso adecuado de una de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Geometría, facilitando el pensamiento lógico para la resolución de problemas de diferente índole. Al mismo tiempo le permitirá al estudiante visualizar el salón de clases como un taller de interacción de ideas, en el que la comunicación y la participación son elementos principales en el desenvolvimiento de habilidades y destrezas del mismo.

En una perspectiva práctica, los docentes se verán beneficiados porque sus actividades serán dinámicas, creativas y organizadas, donde lo más importante de la aplicación del programa GeoGebra es la adaptación a la realidad inmediata de forma inteligente. De igual manera, los alumnos se beneficiarán porque tendrán la necesidad de explorar dentro de ellos mismos la búsqueda de alternativas de solución de acuerdo a los conocimientos que van obteniendo.

En el marco legal, según el artículo 108 de la Constitución (1999), que establece:

> *"El Estado garantizará servicios públicos de informática, con el fin de permitir el acceso universal a la información. Los centros educativos deben incorporar el conocimiento y aplicación de las nuevas tecnologías, de sus innovaciones, según los requisitos que establezca la ley".*

Por consiguiente, Venezuela cuenta en la actualidad con más de 2500 Centros Bolivarianos de Informática y Telemática (CBIT), orientados para la formación integral de alumnos, docentes y de la comunidad en general, a través del uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, considerando el propósito de lograr un ambiente didáctico propicio para el uso de dichas herramientas como instrumentos generadores de cambio educativo.

Por otro lado, la ley Orgánica de la Educación (ley del 15 de Agosto de 2009) contempla en el Artículo 5º, como Competencias del Estado Docente:

> *"Planifica, ejecuta, coordina políticas y programas para alcanzar un nuevo modelo de escuela concebida como un espacio abierto para la producción y el desarrollo endógeno, el quehacer comunitario, la formación integral, la creación y la creatividad, la promoción de la salud y el respeto por la vida, la defensa y la conservación del ambiente, las innovaciones pedagógicas, las comunicaciones alternativas, el uso y el desarrollo de las tecnologías de la información y comunicación, la organización comunal, la consolidación de la paz, la tolerancia y la convivencia".*

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1.- Antecedentes de la Investigación

La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Media y Diversificada tiene un gran valor pedagógico para la formación del educando, porque pretende que éste obtenga un desarrollo del pensamiento lógico, preciso y veraz, que le va a ser de gran utilidad a lo largo de su vida.

Brenes (1997) afirma lo siguiente:

> *"Perfeccionar la Educación es una batalla constante a la que están llamados todos los educadores. Lograr que todos los educandos reciban una adecuada educación en correspondencia con sus niveles de desarrollo y trabajar por alcanzar mejores resultados cada día; saber qué hacer para lograrlo, no solo desde el punto de vista teórico, sino en la práctica, debe ser una meta permanente de todos" (p.93).*

Hernández (2001) señala que la Geometría es tal vez la parte de las Matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad, considerada como una herramienta para el entendimiento; y asegura que la Geometría, como disciplina, se apoya en un proceso extenso de formalización, en la cual se ha venido desarrollando por más de 2000 años en niveles crecientes de rigor, abstracción y generalidad.

La enseñanza de las Matemáticas se debe visualizar de una manera muy amplia, ya que tiene como finalidad la formación de un alumno íntegro, que se interese por el descubrimiento de la búsqueda de alternativas de solución a dificultades, el desarrollo de la creatividad, la perseverancia y la confianza en sí mismo, por el mero hecho de llegar a alcanzar una sensación de satisfacción por sus logros al aprender de sus propios fracasos, en el momento de la solución de problemas personales y/o escolares, siendo estas, formas de contribuir a la construcción de una mejor calidad de vida para los mismos.

Siguiendo el mismo orden de ideas, Monera (1991) señala que:

> *"La enseñanza de las Matemáticas requiere además de un conocimiento adecuado del tema, una comprensión profunda de lo que se enseña y no sólo el manejo de la información, junto a esto, requiere también de un conocimiento amplio de los aspectos psicopedagógicos que permiten reconocer las dificultades potenciales que enfrentarán los estudiantes al abordar distintos temas, lo cual implica no sólo conocer los prerrequisitos sino también los significados asociados y sus representaciones" (p. 36).*

No obstante, se tiene que cambiar la idea de que existen lineamientos rígidos (recetas), que permiten obtener buenos logros de manera automática, señalando que el docente es quien debe decidir los recursos o las técnicas que se van a usar en el aula, considerando las situaciones que se presenten, para ir así acrecentando las habilidades y destrezas de los alumnos en el aprendizaje de la Geometría.

Uno de los problemas más frecuentes dentro del Sistema Educativo Venezolano, particularmente en el área de las Matemáticas, es el relacionado a la enseñanza de la Geometría. Con frecuencia se observan grandes deficiencias que tienen los estudiantes en cuanto al dominio de definiciones geométricas en general. Esto se debe, principalmente, a que los alumnos se limitan mecanizando y memorizando los diversos temas, no logrando así un aprendizaje significativo de esta importante rama de las Matemáticas.

Hernán y Carrillo (1999) exhiben factores negativos al momento de enseñar Matemáticas, tales como, la falta de creatividad e imaginación por parte del docente en el empleo de recursos novedosos e interesantes para desarrollar las clases de Geometría. Es por ello que el docente debe hacer uso de una gran variedad de recursos y estrategias para elevar el rendimiento estudiantil para que el alumno obtenga verdaderamente un aprendizaje significativo.

Van Hiele (citado por Fouz) en sus teorías señala que si el aprendiz es guiado por métodos de enseñanza adecuados, avanza a través de cinco niveles de razonamiento, estos son: Visualización o Reconocimiento, Análisis, Ordenación o Clasificación, Deducción Formal y Rigor. Cada nivel se construye sobre el anterior combinándose el desarrollo de los conceptos espaciales geométricos como una secuencia, desde planteamientos inductivos y cualitativos, hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas abstractas. Estos niveles de conocimiento describen los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática que va desde el razonamiento intuitivo de los alumnos de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes universitarios.

Es pertinente resaltar que en los últimos años *el hacer* Matemáticas en el aula ha sido estimulado amenamente por nuevas ideas, al incluir la ciencia de la computación con el empleo de las nuevas tecnologías.

Hernández y Mamo (2010) comprobaron mediante su investigación de trabajo de grado, que cualquier estudiante de la carrera Educación Mención Físicas y Matemáticas de la ULA-NURR puede adquirir en un corto período de tiempo los conocimientos básicos del lenguaje de programación Logo para ser aplicado como una TIC para construir Geometría.

Hernández y Sánchez (2010) demostraron en su investigación que el “estudiante promedio” y egresados de la carrera de Educación Mención

Física y Matemáticas del Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de Los Andes del estado Trujillo, pueden obtener la habilidad necesaria para dominar en un corto período de tiempo y por sí solos el software educativo GeoGebra 3.00.

Los resultados obtenidos en las investigaciones mencionadas permitieron concluir que realmente se puede autoaprender a manipular correctamente dichos software en un corto período de tiempo.

Los estudios reportados se consideran relevantes con relación a los objetivos propuestos en la presente investigación, tomando en cuenta que la docencia como tal, tiene un valor sumamente substancial en la mediación, la formación y el desarrollo de las habilidades del pensamiento de los estudiantes durante la enseñanza de la Geometría; por cuanto acarrea gran responsabilidad por parte del docente, para que los alumnos reorganicen las distintas percepciones que poseen del mundo que les rodea con respecto a la conexión que tiene éste con las Matemáticas.

Cabe resaltar que a pesar de que la Geometría está incluida en la mayoría de los programas de Matemáticas de Educación Media y Diversificada; el espacio que le corresponde a la enseñanza de ésta área, no es bien aprovechado por el docente, ya que se auto-limita, porque se vale sólo de los recursos que ofrece la educación tradicional, optando por el conjunto de factores anteriormente mencionados, los cuales son opuestos a una mejor pedagogía.

2.2.- Las Corrientes Psicopedagógicas

2.2.1.- Teoría de Lev Semenovich Vygotsky y la Mediación del Aprendizaje en el Aula

Uno de los aportes más importantes relacionados con la construcción del aprendizaje se centra en la idea de Vygotsky, la cual trata del uso de los instrumentos mediadores (herramientas y signos) para entender los procesos sociales. La creación y utilización de signos como método auxiliar para resolver un problema psicológico determinado, es un proceso análogo a la creación y utilización de signos y herramientas. La analogía básica entre signos y herramientas descansa en la función mediadora que caracteriza a ambos, mientras que la diferencia esencial entre los signos y herramientas se relaciona con los distintos modos en que orienta la actividad humana.

Las herramientas sirven como conductores de la influencia humana en el objeto de la actividad, se hallan externamente orientados y deben acarrear cambios en los objetos. Otros de los aspectos centrales en esta teoría es la "zona de desarrollo próximo", la cual es definida por Vygotsky (1979) como:

> *"…la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel*

de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz " (p.184).

El desarrollo real está referido a las actividades que los educandos realizan por sí solos y define las funciones o capacidades mentales maduras, mientras que el desarrollo de potencial, se refiere a aquellas funciones que todavía no han madurado, pero que se hallan de un proceso de maduración.

Vygotsky describe a los recursos como una herramienta al servicio del proceso de enseñanza-aprendizaje. Su importancia se deriva de la naturaleza constructiva del mismo en la medida en que el individuo logra construir, de forma activa y progresiva, su estructura de adaptación e interpretación fundamental a través de experiencias, ya sea directa o mediadamente. Asimismo, estima que el desarrollo del potencial es el que debe atraer mayor interés de los educadores, ya que remite a un conocimiento en proceso de cambio. Por lo que es necesaria la facilitación externa de mediadores para su internalización, es decir el manejo de de los diversos medios instruccionales con la finalidad de que se puedan seleccionar los más adecuados y los que le permitan al educando desarrollar las habilidades del pensamiento para que sean capaces de producir sus propias ideas.

2.2.2.- Teoría de David Ausubel y el Aprendizaje Significativo

Es sabido que la enseñanza tradicional se ha caracterizado por el énfasis en el aprendizaje memorístico, sin tomar en cuenta si la información aportada por parte del docente contiene, o no, relación alguna con los conocimientos que posee el alumno e ignorando los intereses de éste por el entorno que lo rodea.

Ausubel (1976) considera que el aprendizaje es significativo sólo cuando el estudiante es capaz de relacionar sus conocimientos previos (experiencias) con la nueva información que se le presenta. Además, señala que la selección del material a emplear el docente en el desarrollo de sus clases es un factor importante, pero no suficiente, cuando no está acompañado de un desarrollo de la capacidad significativa de habilidades del alumno para el aprendizaje y lo recomienda como una manera de evitar el aprendizaje mecánico, de tal forma que el estudiante pueda comprender el significado de un problema y el procedimiento requerido para la resolución.

Cabe precisar que la labor docente es lograr que los alumnos sean capaces de *aprender a aprender,* de promover aprendizajes significativos a través todas las situaciones y circunstancias que se les presentan en la vida; para esto se deben emplear recursos que resulten útiles para lograr un verdadero aprendizaje.

Es necesario resaltar que las teorías antes mencionadas están estrechamente relacionadas con los recursos adecuados que utilice el docente en la enseñanza de la Geometría y, a su vez, con el aprendizaje y el razonamiento geométrico que el alumno va consolidando, destacando que es por medio de los recursos empleados por el docente, que éste contribuirá en una mejor calidad de aprendizaje. Por tal motivo, el docente deberá utilizar estrategias eficaces para proporcionar y fomentar el razonamiento a los alumnos para proporcionar y lograr efectivamente el aprendizaje.

Es función diaria del docente de Matemáticas, preocuparse por el proceso de aprendizaje de sus alumnos, puesto que de su enseñanza se deriva que sean capaces de aprender “algo” de lo que ofrece este amplio mundo.

2.3.- Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC’s)

Se le llama TIC’s al conjunto de tecnologías que permiten la adquisición, producción, almacenamiento, tratamiento, comunicación, registro y presentación de informaciones, en forma de voz, imágenes o datos contenidos en señales de naturaleza acústica, óptica o electromagnética. Las TIC’s incluyen la electrónica como tecnología base que soporta el desarrollo de las telecomunicaciones, la informática y el audiovisual.

En su dimensión social las TIC’s han permitido llevar la globalidad al mundo de la comunicación, facilitando la interconexión entre las personas e instituciones a nivel mundial eliminando barreras espaciales y temporales; teniendo en cuenta que forman parte de la cultura tecnológica que nos rodea y con la que debemos convivir, ellas amplían nuestras capacidades físicas y mentales y las posibilidades de desarrollo social.

Hoy en día la presencia de la Tecnología Informática en nuestra vida diaria es tan común, que no debe sorprendernos el vertiginoso desarrollo de las comunicaciones. Nos enteramos rápidamente de las innovaciones tecnológicas del mundo entero, de nuestra realidad mas cercana y, en fin, de todo lo que sea de interés para el ser humano del siglo XXI. La evolución de ellas en los últimos años ha sido propiciada por la aparición de la tecnología digital. La tecnología digital, unida a la aparición de ordenadores cada vez más potentes, ha permitido a la humanidad progresar muy rápidamente en la ciencia y la técnica desplegando nuestro arma más poderosa: la información y el conocimiento. Asimismo, la “unión” entre los computadores y las comunicaciones al comienzo de los años 90, desató una explosión sin precedentes con la aparición de la Internet en las formas de comunicación, a partir de allí, ésta herramienta tecnológica pasó de ser, un instrumento científico especializado a ser una red de fácil uso que modificó las pautas de interacción social.

2.3.1.- Características de las TIC's

Las tecnologías de información y comunicación tienen como características principales las siguientes:

- Son de carácter innovador y creativo, pues dan acceso a nuevas formas de comunicación.
- Tienen una mayor influencia y benefician en mayor proporción al área educativa, ya que la hace más accesible y dinámica.
- Son considerados temas de debate público y político, pues su utilización implica un futuro prometedor.
- Se relacionan con mayor frecuencia con el uso de la Internet y la informática.
- Resultan un gran alivio económico a largo plazo, aunque en el tiempo de adquisición resulte una fuerte inversión.
- Constituyen medios de comunicación y adquisición de información de toda variedad, inclusive científica, a los cuales las personas pueden acceder por sus propios medios, es decir potencian la educación a distancia, en la cual, el alumno tiene la necesidad de llegar a "toda" la información posible (generalmente solo), con una ayuda "mínima" del profesor.

2.3.2.- Incidencias en la Educación según la perspectiva de Echeverría (2001):

2.3.2.1.- Exige nuevas destrezas: el "tercer entorno"[1] es un espacio de interacción social en el que se pueden hacer cosas, y para ello son necesarios nuevos conocimientos y destrezas. Además de aprender a buscar y transmitir información y conocimientos a través de las TIC's (construir y difundir mensajes audiovisuales), hay que capacitar a las personas para que también puedan intervenir y desarrollarse en los nuevos escenarios virtuales. Seguirá siendo necesario tener conocimientos de ciencias e historia, pero todo ello se complementará con las habilidades y destrezas necesarias para poder actuar en este nuevo espacio social telemático.

2.3.2.2.- Posibilita nuevos procesos de enseñanza y aprendizaje, **aprovechando las funcionalidades que ofrecen las TIC's:** proceso de la información, acceso a los conocimientos, canales de comunicación, entorno de interacción social. Además de sus posibilidades para complementar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje presenciales, las TIC's permiten crear nuevos entornos on-line de aprendizaje, que elimina la exigencia de coincidencia en el espacio y el tiempo de profesores y estudiantes.

---

[1] *Javier Echeverría cuando expresa "tercer entorno" se refiere al mundo virtual.*

2.3.2.3.- Demanda un nuevo sistema educativo: (una política tele-educativa) con unos sistemas de formación en el que se utilizarán exhaustivamente los instrumentos TIC's, las redes telemáticas constituirán nuevas unidades básicas del sistema (allí los estudiantes aprenderán a moverse e intervenir en el nuevo entorno), se utilizarán nuevos escenarios y materiales específicos (on-line), nuevas formas organizativas, nuevos métodos para los procesos educativos y habrá que formar educadores especializados en didáctica en redes. Aunque las escuelas presenciales seguirán existiendo, su labor se complementará con diversas actividades en estos nuevos entornos educativos virtuales (algunos de ellos ofrecidos por instituciones no específicamente educativas), que facilitarán también el aprendizaje a lo largo de toda la vida.

2.3.2.4.- Exige el reconocimiento del derecho universal a la educación también en el "tercer entorno". Toda persona tiene derecho a poder acceder a estos escenarios y a recibir una capacitación para utilizar las TIC's. Se debe luchar por esta igualdad de oportunidades aunque por ahora se ve lejana. Incluso los Estados más poderosos (que supuestamente garantizan una educación general para todos sus ciudadanos) tienen dificultades para defender este principio en el mundo virtual, pues encuentran dificultades para adaptarse a esta nueva estructura transterritorial en la que la grandes multinacionales pugnan por el poder.

Por otra parte, aún instituciones internacionales educativas como la UNESCO, la OEI o la parte que corresponde en la Unión Europea tampoco tienen suficiente fuerza para ello.

2.4.- Los Software Educativos como TIC's

Los distintos tipos de software educativos son considerados como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de temas específicos en las distintas áreas de educación. El software educativo constituye una evidencia del impacto de las tecnologías en la educación; es la más reciente herramienta didáctica, útil tanto para el estudiante como para el profesor, convirtiéndose en una alternativa válida que ofrece un ambiente propicio para la construcción del propio conocimiento.

El buen uso de este tipo de software puede desarrollar en los estudiantes habilidades y destrezas para el desarrollo del pensamiento, tomando siempre en cuenta que la información que aporte el docente es muy valiosa, debido a que éste tiene la tarea de mediar y orientar al aprendizaje significativo de sus alumnos.

2.4.1.- Software de Geometría

En nuestros días se conoce la existencia de una gran variedad de programas destinados a construir Geometría, los cuales brindan nuevas formas de educar, aprender y hacer matemáticas de manera dinámica. Algunos de estos programas son:

2.4.1.1.- Poly Pro

Es un programa empleado para visualizar, analizar, desarrollar y estudiar la construcción de poliedros. Con Poly, se pueden manipular sólidos poliédricos en el ordenador en una variedad de maneras: como imagen tridimensional, como una red bidimensional aplanada ó como una incrustación topológica en el plano. Las imágenes tridimensionales pueden girarse plegarse/desplegarse en forma interactiva. Los modelos físicos se pueden construir imprimiendo la red bidimensional aplastada, recortando luego el perímetro, plegando las aristas y finalmente pegando las caras vecinas. Además, agrega la posibilidad de exportar los modelos tridimensionales usando formatos estándar para datos tridimensionales. El modelo exportado puede importarse en otros programas de modelado. Es un programa de interfaz multilingüe y básica (la **figura 1** muestra la Interfaz de Poly Pro).

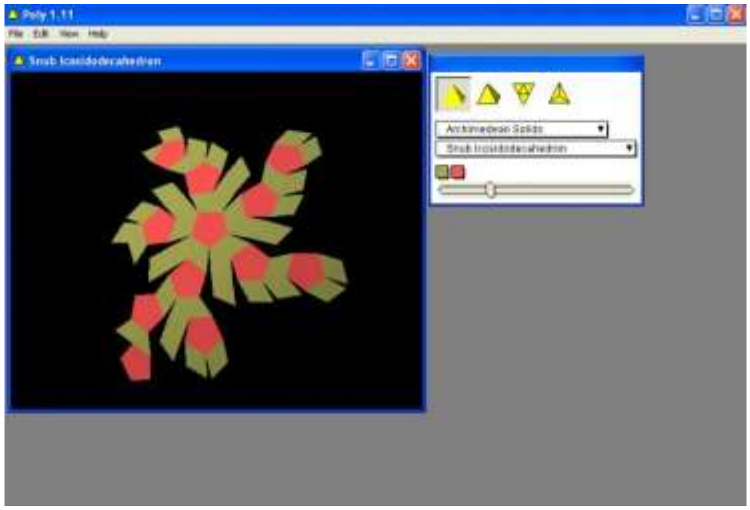


Figura 1: Interfaz de Poly Pro

2.4.1.2.- Cinderella

Está diseñado para cubrir una amplia gama de disciplinas geométricas. Por una parte tiene como ventaja que se pueden construir configuraciones geométricas bastantes complejas de una manera simple. En Cinderella se puede cambiar fácilmente entre la geometría euclidiana, hiperbólica y geometría elíptica. Dependiendo del contexto, sus acciones siempre se interpretan correctamente. Tiene la ventaja de estar programado en Java, posee potentes algoritmos utilizando geometría proyectiva compleja, un comprobador automático de resultados y la posibilidad de realizar construcciones y visualizar en geometría esférica e hiperbólica (en la **figura 2** se puede observar su interfaz). Por el lado negativo no admite "macros", pequeñas construcciones auxiliares que son de utilidad.

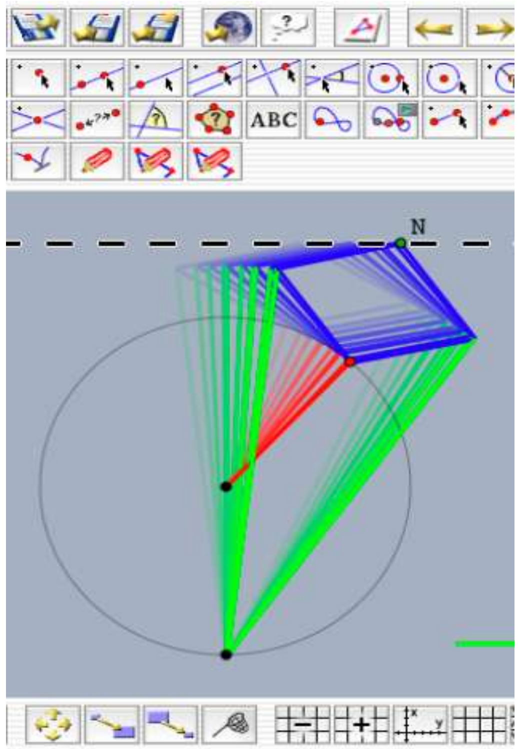


Figura 2: Interfaz de Cinderella

2.4.1.3.- Sketchpad

Fue el primer programa que permitía la manipulación directa de objetos gráficos. Se trataba de un sistema gráfico, creado mucho antes que el término interfaz gráfico fuera concebido. Sketchpad sería una de las primeras aplicaciones informáticas que demostraron las posibilidades de la computadora como extensión de la mente humana, en otras palabras fue el primer programa de dibujo desarrollado en la historia de informática. Este programa tiene posibilidades de tratamiento y estudio de funciones, lo que permite ser utilizado también en temas distintos de los estrictamente geométricos. Es un programa con interfaz en inglés. En la **figura 3** se puede observar su interfaz.

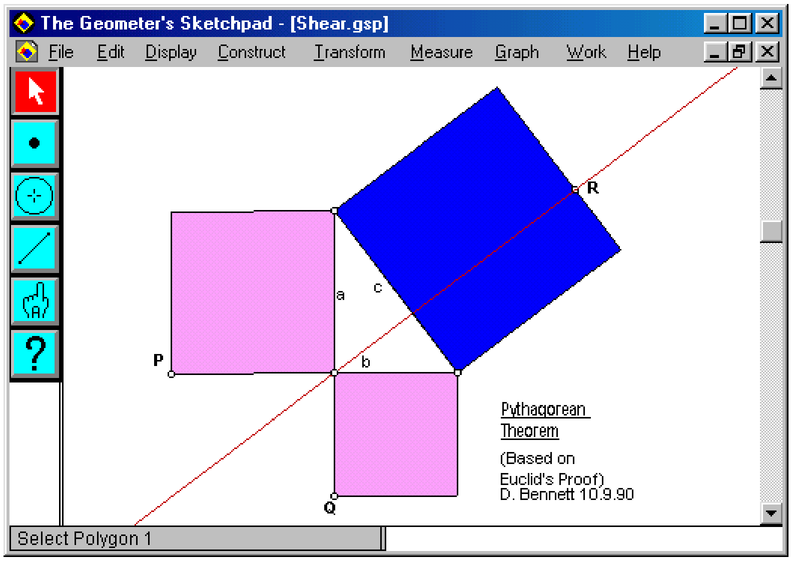


Figura 3: Interfaz de Sketchpad

2.4.1.4.- Regla y Compás

Está programado en Java, originalmente es un programa de idioma inglés, aunque está traducido al castellano y tiene la ventaja de ser de libre uso y gratuito. Permite la exportación de ficheros a formato HTML para visualizarlos con cualquier navegador. Tiene prestaciones similares a Cinderella, en la **figura 4** se visualiza la pantalla principal de Regla y Compás.

Es una aplicación ideal para el ámbito escolar con la que los alumnos pueden desarrollar los conocimientos sobre geometría aprendidos en clase.

Posee multitud de herramientas de dibujos diferentes: segmentos, recta, semirrecta, círculo, compás, recta paralela, recta perpendicular, polígono, entre otras. Con él se puede realizar toda clase de formas y figuras geométricas desde unas simples líneas perpendiculares hasta construcciones más complicadas tales como: proyecciones de objetos, representación de figuras numéricas, etc.

El programa también permite conocer los valores numéricos de las figuras dibujadas, la posición en el plano, la dimensión del área ocupada, las longitudes de los segmentos y las líneas.

Sin duda, la característica más interesante del programa es la posibilidad de elaborar atractivas figuras geométricas animadas. Por otro lado, también es posible repasar paso a paso las construcciones realizadas.

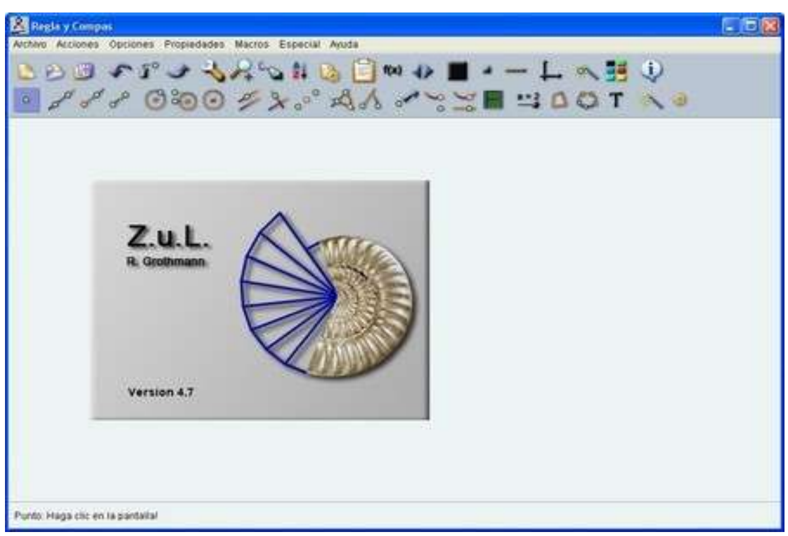


Figura: 4 Interfaz de Regla y Compás

2.4.1.5.- GEUP

Es un programa de cálculo y visualización en Geometría del plano y Matemáticas en general. El concepto de construcción es su núcleo de funcionamiento: un método de programación visual con el que crear construcciones/aplicaciones dinámicas y generales utilizando elementos matemáticos que se definen a través de sus herramientas. GEUP 4 permite la modificación de lo construido visualmente (directamente en pantalla) y calcula cada uno de sus casos particulares en tiempo real. El rango de aplicación de GEUP 4 es muy amplio, a continuación se describen sus principales aplicaciones. Posee la capacidad para trabajar en Geometría Euclídea, no-Euclídea, Analítica y Transformacional, A su vez definir los elementos geométricos elementales punto, recta, circunferencia, cónicas, polígonos, etc. Permite modificar dinámicamente los elementos geométricos, reformando rápidamente la construcción. Realiza transformaciones geométricas de simetría central y axial, traslación, giro, homotecia e inversión. Posee la capacidad para definir, combinar, evaluar y representar gráficamente funciones, define parámetros con variación visual y animación Selección automática de puntos móviles. Tiene una interfaz adaptada a la resolución de pantalla, es de fácil uso; en la **figura 5** se puede observar dicha interfaz. Capacidad de configuración completa, es multilingüe.

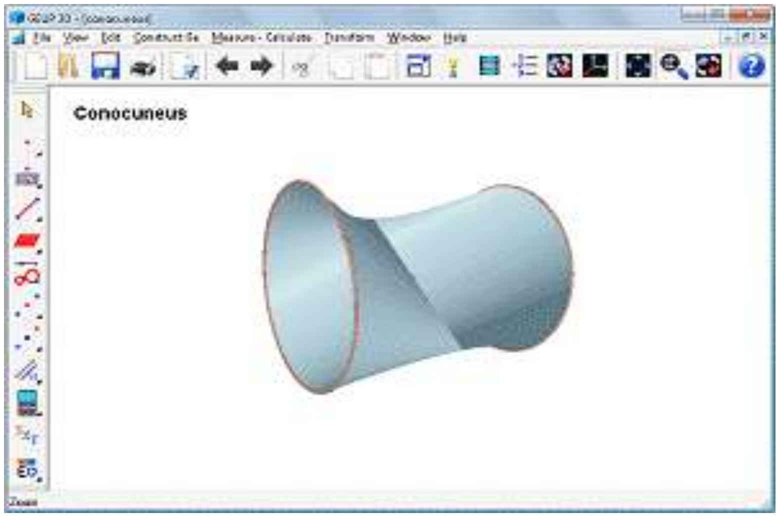


Figura 5: Interfaz de GEUP

2.4.1.6.- Cabri-Geometre

Fue diseñado por la profesora Jean Marie Laborde y Franck Bellemain en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble en Francia en 1995 y fue experimentado en sus aulas.

El programa permite realizar con el ordenador todas las construcciones que se pueden realizar con regla, compás y las herramientas habituales de dibujo, pero con este programa se pueden manipular directamente las figuras construidas en la pantalla mediante el arrastre con el ratón de ciertas partes de ellas. De hecho, una vez elaborada una figura geométrica, Cabri reconoce cuáles son las partes (de dicha figura) que pueden ser arrastradas. Es fundamental señalar que esto ocurre, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura, lo que le convierte en una herramienta muy valiosa para el estudio de invariantes y propiedades geométricas de carácter general de los objetos geométricos. En concreto es un instrumento de primer orden para el estudio dinámico de lugares geométricos.

Es un programa fundamentalmente gráfico que funciona a través de un menú basado en botones para acceder a las distintas funciones (ver **figura 6**). Cabri tiene un problema nada desdeñable, su dificultad de exportar sus gráficos y sus animaciones a otras aplicaciones más familiares para el usuario. Además, puede traducir sus aplicaciones al lenguaje Java y permite verlas en ficheros HTML sin necesidad de tener el programa cargado en el ordenador. Al mismo tiempo el programa es de fácil manejo y no requiere de mucho tiempo y esfuerzo para su aprendizaje.

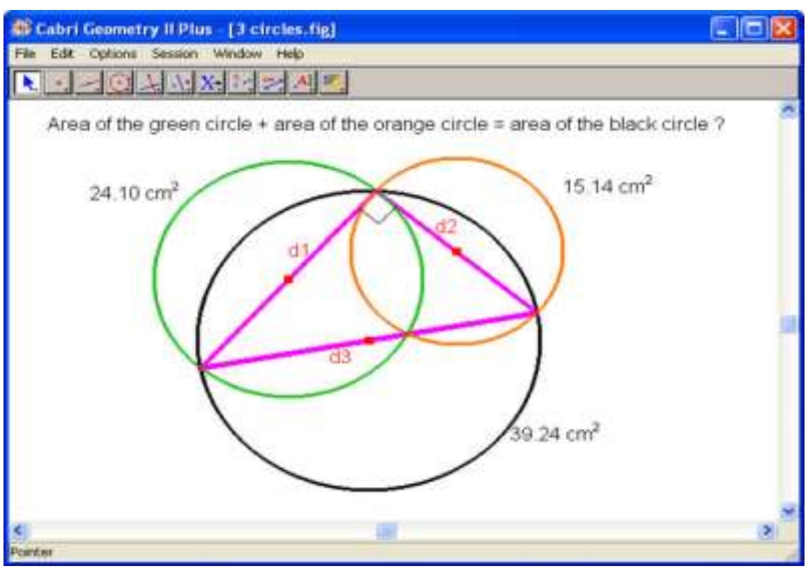


Figura 6: Interfaz de Cabri-Geometre

A continuación se presenta el software interactivo de matemática que combina dinámicamente la geometría, el álgebra y el cálculo; programa que ha sido empleado para este estudio:

2.4.1.6.7.- GeoGebra

Fue diseñado por Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo, Austria; el proyecto GeoGebra comenzó en el año 2001 cuando Markus, en su tesis, propuso como objetivo fabricar una calculadora “gratis” para “trabajar el álgebra y la geometría”. La idea principal fue mejorada y el proyecto culminó en la Florida Atlantic University (Universidad Atlantic de Florida). GeoGebra ha recibido distinciones internacionales tales como:

- **NTLC Premio 2010:** Premio a la Tecnología Dirección Nacional de 2010 (Washington DC, EE.UU.).
- **Premio de Tecnología 2009:** Laureado en la categoría de Educación (San José California, EE.UU.).
- **BETT Award 2009:** Finalista en Londres el Premio a la Tecnología Educativa Británica.
- **SourceForge.net Choice Awards 2008 de la Comunidad:** Finalista, Mejor Proyecto para Educadores.
- **AECT Premio al Desarrollo Distinguido 2008:** Asociación para las Comunicaciones y Tecnología Educativa (Orlando, EE.UU.).

- **Premio Learnie 2006:** Premio de Austria de Software Educativo para "Wurfbewegungen MIT GeoGebra" (Viena, Austria).
- **Premio eTwinning 2006:** 1er. premio para el "Desafío Crop Circles" con GeoGebra (Linz, Austria).
- **Learnie Premio 2005:** Premio de la Educación de software austriaca para "Spezielle Relativitätstheorie MIT GeoGebra" (Viena, Austria).
- **Comenius 2004:** Premio Alemán de Medios de Comunicación Educativa (Berlín, Alemania).
- **Digital 2004:** Premio Alemán de Software Educativo (Colonia, Alemania).
- **AESA 2002:** Premio Europeo de Software Académico (Ronneby, Suecia).

GeoGebra es esencialmente un procesador geométrico, pero optimizado para integrar funcionalidades propias de procesadores simbólicos (maple, mathcad, derive) y graficadores (graphmatica, wingraph). Ésta es la principal ventaja (y elemento diferenciador) que destaca, pues integra el algebra, la geometría y el cálculo, con la flexibilidad necesaria para no necesariamente mezclarlos. De ésta manera, si se desea, puede utilizarse sólo como procesador geométrico. La **figura 7** muestra la ventana principal del GeoGebra.

La interfaz de GeoGebra es tan intuitiva como en la mayoría de los software de geometría, contando además con una ventana de algebra donde aparecen todos los elementos de las construcciones, clasificados en “objetos libres”, “objetos dependientes” y “objetos auxiliares”.

La presentación de la pantalla del programa cuenta con dos ventanas activas: una zona de dibujo en la que se crean y manipulan objetos geométricos: puntos, segmentos, rectas, vectores, triángulos, polígonos, círculos, arcos, cónicas (los mismos que en Cabri); y otra donde aparecen las coordenadas de los puntos y las ecuaciones de las rectas y curvas trazadas que se actualizan simultáneamente con los cambios en la región gráfica.

Sus ventajas sobre Cabri y otros programas similares son que se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente, permite manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos, permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático. Sus rutinas analíticas permiten su uso como instrumento para el estudio de funciones como un programa clásico de representación gráfica y de tratamiento de puntos notables: corte con los ejes, extremos, función derivada, integral, etc. Permite grabar los ficheros en formato HTML para ser utilizados con cualquier navegador.

Es una ventaja la doble presentación, geométrica y algebraica, de los objetos estudiados ya que posibilita el tránsito natural de la geometría sintética a la geometría analítica.

Es de muy fácil aprendizaje pues, a pesar de su potencial, presenta un entorno de trabajo agradable. Los gráficos se pueden exportar con facilidad, tanto a páginas web interactivas en las que la construcción funciona como un applet de Java, como a documentos de texto, es además de interfaz multilingüe.

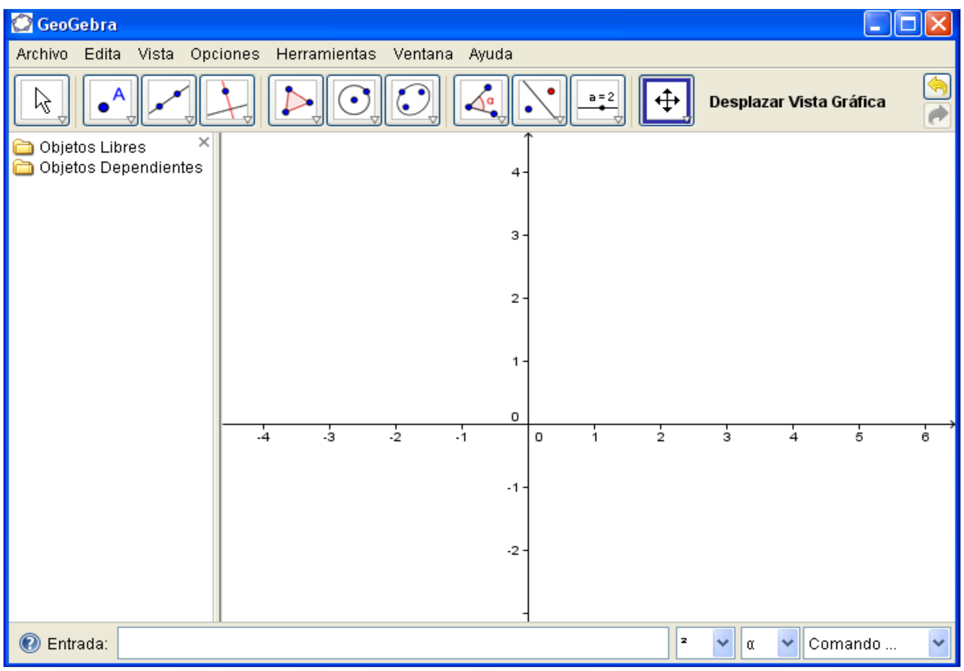


Figura 7: Interfaz de GeoGebra 3.2

2.5.- Las TIC's en la Educación Venezolana

Durante las últimas décadas el desarrollo de las computadoras ha evolucionado de manera acelerada, a tal punto que se han ido creando nuevas formas de enseñanza basadas en estas herramientas que cada vez son mas aceptadas por el mundo actual. La enorme avalancha de recursos informáticos que "dan vida" al Internet, sentaron las bases sobre muchas investigaciones de tinte pedagógico, al anunciar cambios en la enseñanza en las instituciones educativas.

La crisis en la que se ha venido sumergiendo la educación, por una parte ha obligado a crear nuevos enfoques en las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje, para hacer un buen uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación como medio para tal fin. Por otra, el avance de las tecnologías que ocurre a nivel mundial ha estado logrando que la educación no se quede atrás para formar parte de la integración de las TIC's al diseño curricular.

En Venezuela, hasta hace poco, el debate sobre las políticas públicas y decisiones de centros educativos, relacionados con el desarrollo de la sociedad de la información, se fundamentaban en cuánto hardware había por alumno o por escuela y cuánto hardware debería poseer una institución.

Cabe resaltar que los equipos tecnológicos y su software complementario son la infraestructura mínima para empezar a trabajar; puesto que las tecnologías son útiles pero no bastan; son cada vez más una condición necesaria para la renovación educativa, pero no son una condición suficiente. El desarrollo educativo a través de las tecnologías pasa, por nuevas herramientas de autodesarrollo de la docencia, gestión pedagógica, de evaluación académica y organización docente.

Parece indispensable señalar que sin una "buena" formación de los docentes en las tecnologías, adaptada a la forma de ser y de trabajar en el sector de la enseñanza, de poco van a servir las hipotéticas grandes cantidades de recursos invertidas en la informática. Es esencial ésta formación tecnológica para que conlleve a una metodología de apoyo con la cual el docente pueda evolucionar, desde su rol de transmisor de conocimientos, a filtrador y guía en la interpretación de los mismos.

Según el Currículo Básico Nacional, la incorporación de las TIC's es uno de los elementos de organización e integración de los saberes y orientación de las experiencias de aprendizaje, los cuales deben ser considerados en todos los procesos educativos para fomentar valores, actitudes y virtudes, ya que contribuyen al desarrollo de potencialidades lo que va de la mano con el bienestar del entorno sociocultural.

Ahora bien, con cierta visión hacia el futuro (bastante realista), se puede afirmar que falta un largo trecho por recorrer para lograr una conexión conveniente entre el sistema educativo y las tecnologías de información y comunicación para beneficiar la calidad de las clases en las aulas.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1.- Consideraciones Generales.

Una vez propuesto el problema de investigación, delimitados sus objetivos y tomadas las bases teóricas que orientarán el sentido de la misma de manera precisa para indicar el tipo de datos que se requiere indagar, deberán seleccionarse los distintos métodos y técnicas que posibilitarán obtener la información requerida. A fin de cumplir con éste importante aspecto inherente a todo proceso de investigación, se deberá elaborar el Marco Metodológico o la Metodología dentro del proyecto de investigación.

De acuerdo a lo anterior, en éste capítulo se desplegarán los aspectos metodológicos del presente estudio, describiéndose así el tipo y diseño de la investigación, las técnicas y los procedimientos que fueron empleados para llevar a cabo la misma.

3.2.- Tipo de Investigación.

La finalidad de este estudio es diseñar un manual para la construcción de Teselados Escherianos empleando como herramienta tecnológica el programa GeoGebra 3.2, el cual puede ser aplicado como una TIC en la enseñanza de la Geometría. Por lo tanto, la presente investigación se desarrolla bajo una perspectiva cualitativa, la cual es entendida como una investigación social, que estudia fenómenos que no son explicados a través de números, sino que son analizados como sistemas complejos interrelacionados desde el punto de vista humano. Cisneros (2000) se ha referido a este enfoque como el análisis crítico e interpretativo de las narrativas de las experiencias reales de la gente.

En este sentido, es pertinente resaltar que este estudio es de tipo exploratorio, descriptivo y confirmatorio de verificación empírica. Hurtado (2003) expresa lo siguiente:

> *"La investigación exploratoria consiste en indagar acerca de un fenómeno poco conocido sobre la cual hay poca información o no se ha realizado investigaciones anteriores con el fin de explorar la situación" (p.85).*

> *"El propósito de la investigación descriptiva es exponer el evento estudiado haciendo una lista detallada de sus características, de modo tal que en los resultados se pueden obtener dos niveles de análisis, un nivel más elemental, en el cual se logra una clasificación de la información de función de características comunes, y un nivel más sofisticado en el cual se ponen en relación los elementos observados a fin de obtener una descripción más detallada" (p. 87).*

> *"La investigación confirmatoria de verificación empírica es aquella cuyo objetivo consiste en verificar la veracidad de una hipótesis, derivada de una teoría a partir de la experiencia directa" (p.103).*

Es apropiado señalar lo enunciado por Hernández y otros (2003), el cual sostiene que una investigación puede iniciarse como exploratoria y luego puede alcanzar otro tipo de investigación.

3.3.- Diseño de la Investigación.

Según Hernández y otros (2003), el diseño de la investigación es definido como “un plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación”. El diseño guía al investigador y le señala los pasos a seguir para alcanzar los objetivos del estudio y de esta manera, contestar la interrogante que se planteó.

El presente estudio se ajusta a la investigación no experimental de tipo transversal y longitudinal. La investigación no experimental se podría definir “como la investigación que se realiza sin manipular deliberadamente variables y en las que solo se observan los fenómenos en sus ambiente natural para después analizarlos” (según Hernández y otros: 2003). Esta investigación se enmarca dentro del diseño transversal, ya que tiene como propósito explorar una comunidad, un contexto, una situación, una variable o un conjunto de variables en un momento específico; para el caso de la investigación en cuestión se ejecutará una exploración de las herramientas de construcción del programa GeoGebra 3.2 en un período de tiempo determinado. Asimismo se analizarán los cambios que surjan a medida que se evolucione en el conocimiento de las herramientas de construcción de dicho software. Lo anteriormente expuesto, confirma que la investigación se encaja al diseño no experimental longitudinal de tendencia.

3.4.- Universo y Muestra.

El universo es el conjunto de casos que conforman la totalidad del fenómeno a estudiar, Balestrini (2002) afirma que **"**el universo o población puede estar referido a cualquier conjunto de elementos de los cuales se pretende indagar y conocer sus características, o una de ellas, y para el cual serán válidas las conclusiones obtenidas en la investigación". Para Tamayo (2001) es "la totalidad del fenómeno a estudiar, grupo de entidades, personas o elementos cuya situación se está investigando".

En este estudio el universo es igual a la muestra y es de tipo no probabilístico, tal como lo exponen Hernández y otros (2003), en ésta se hace una suposición de un procedimiento de selección informal y un poco arbitrario; sin embargo este tipo de muestra es muy utilizado con la finalidad de lograr hacer inferencias sobre la población. Es prudente acotar otro principio, el de que en este tipo de muestra no todos los sujetos tienen la oportunidad de ser seleccionados, sino que es el investigador quien decide cuales serán sus objetos de estudio. Esto tiene su ventaja, la de poder ser utilizada para determinar el diseño de estudio en los cuales no sea necesario una representatividad de elementos de una población, sino más bien, una cautelosa y controlada elección de sujetos con ciertas características definidas previamente en el planteamiento del problema.

Dentro de las muestras no probabilísticas se encuentran la de sujetos voluntarios, que según Hernández y otros (2003), son muestras muy usadas en las Ciencias Sociales y Ciencias de la Conducta. En estos casos, la elección de individuos que serán sujetos de análisis depende de circunstancias fortuitas, lo cual se emplea en la presente investigación. El manejo de este tipo de muestra es muy frecuente en laboratorios donde se busca que los sujetos tengan características homogéneas en variables tales como: edad, sexo, inteligencia, entre otras; de tal manera que los resultados que se obtengan no estén sujetos a diferencias individuales, sino a las circunstancias a que fueron sometidos. Del mismo modo se aplica la muestra de sujetos-tipo, que según Hernández y otros (2003), tiene como objetivo el estar basada en el carácter cualitativo, donde lo importante es la riqueza y calidad de la información y no su carácter cuantitativo.

También se emplea la muestra cualitativa de tipo homogénea que según Miles y Huberman (citado en por Hernández y otros: 2003), en el que las unidades a seleccionar poseen un mismo perfil o características, o bien, comportan rasgos similares. Su propósito es centrarse en el tema a investigar o resaltar situaciones, procesos o episodios en un grupo social. Para el caso de esta investigación se toma la decisión de usar este tipo de muestreo, puesto que el sujeto que será estudiado posee características similares a lo planteado en el problema. Nuestro estudio se centra en la adquisición de los conocimientos necesarios del software GeoGebra 3.2 en la construcción de Teselados Escherianos, el cual se puede usar como una TIC en la enseñanza de la Geometría.

Por lo antes mencionado, la muestra tomada para la investigación está conformada por la creadora de este estudio, cursante del décimo semestre de Educación Mención Matemáticas y Física de la Universidad de Los Andes del Núcleo Universitario "Rafael Rangel".

3.5.- Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Según Hernández y otros (2003), la recolección de datos resulta fundamental en una investigación, su propósito es buscar información de sujetos, comunidades, contextos entre otras. Los datos cualitativos consisten en la descripción profunda y completa de eventos, situaciones, imágenes mentales, interacciones, percepciones, experiencias, actitudes, creencias, emociones, pensamientos y conductas reservadas de las personas.

Las técnicas pueden ser recopilación y análisis bibliográfico, así como también la observación, encuesta, cuestionario, lista de cotejo, entre otros.

Los instrumentos para la recolección de datos que se utilizarán en las distintas fases de este estudio se describen y explican a continuación:

3.5.1.- La Observación Cualitativa

Para Hurtado (2000) se trata de una técnica de recolección de datos denominada también observación participativa, en la que el observador pasa a formar parte de de la situación estudiada, ya que se integra al grupo o comunidad estudiada como miembro activo del mismo. La observación permite que el investigador se ubique en el marco de referencia de las personas observadas y tenga mayor acceso a su forma de ver el mundo. En este sentido, en el presente estudio se utilizará de manera continua la observación cualitativa, ya que la investigadora interactúa directamente con el software GeoGebra 3.2 para adquirir los conocimientos necesarios en la construcción de los Teselados Escherianos.

La observación se puede clasificar en observación participante y no participante; para el primer caso el observador interactúa con los sujetos observados y en el segundo caso no ocurre ninguna interacción. A su vez, existen dos tipos de observación participativa: la natural y la artificial. En la presente investigación, se aplica la observación participativa natural, debido a que la observadora interactúa constantemente con el GeoGebra (software empleado en este estudio).

3.5.2.- Documentos/materiales escritos y audiovisuales

Hernández y otros (2003) afirman que ésta es una de las técnicas de recolección de información para una investigación orientada al enfoque cualitativo. En este estudio se realizaron revisiones y consultas referidas al GeoGebra y las TIC's en distintos documentos escritos y/o publicados.

Por otra parte, los instrumentos de recolección de datos utilizados en el presente estudio son la creación de un manual que contenga las instrucciones necesarias para la Construcción de Teselados Escherianos usando el programa GeoGebra 3.2.

CAPÍTULO IV

División Regular del Plano en las Obras predilectas de Escher

Esta sección está dedicada a presentar la biografía[2] de uno de los mejores y más reconocidos artistas gráficos de todos los tiempos, *Maurits Cornelius Escher*, quien con su admirable talento plasmado en sus obras, demostró el continuo desarrollo de sus habilidades tanto artísticas como geométricas; fue tildado con la frase: "*el pintor que hace posible lo imposible",* pues sólo basta con apreciar la originalidad de sus diseños para sumergirnos en un mundo bastante sublime.

Es importante señalar que el carácter matemático de las obras de Escher que nos conciernen, despertó nuestro interés a tal punto que motivó el que haya sido llevada a cabo ésta investigación.

Éste capítulo también contiene las definiciones del tópico central del estudio en cuestión, *la División Regular del Plano (Teselados)*. Además, se realiza la descripción de algunas de las numerosas obras de Escher, en las que se representa la temática que nos atañe.

---

[2] *La biografía que se presentará fue extraída de un artículo online de Covadonga Escandón Martínez.*

4.1.- Transformaciones Isométricas

Para nuestros fines diremos que una *Isometría* es una transformación geométrica que se obtiene al aplicarle sucesivamente a un polígono, traslaciones, rotaciones y reflexiones, de manera tal que no se le altere a este, ni la forma, ni el tamaño, cambiándole sólo de posición (la orientación o sentido de ésta).

4.2.- Teselado

La palabra tesela *(del latín tesella),* significa, "cada una de las piezas que se forman en un plano". También se le llama *mosaico*.

Diremos que un *teselado del plano* es una descomposición del mismo en regiones denominadas teselas, que no se sobreponen ni dejan huecos. Los teselados se crean usando transformaciones isométricas sobre una figura inicial. Como condición *sine qua non*, en un teselado plano la suma de todos los ángulos que concurren a un vértice es de 360º.

Teselar es una acción donde intervienen la técnica, la geometría, el arte y la decoración. Se dice que dos teselas son *congruentes* si tienen el mismo tamaño y forma.

Al polígono que sirve de "modelo" de las teselas para generar mosaicos en el plano, se le llama *Prototesela.*

4.2.1.- Teselados Regulares

Los únicos polígonos regulares que cubren completamente una superficie plana son, el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono (en la **figura 8** se muestra el cubrimiento del plano con estos polígono regulares). Estos son los únicos polígonos que satisfacen la condición de los 360°.

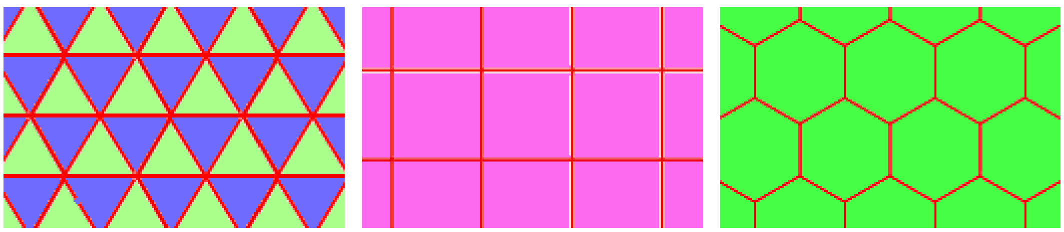
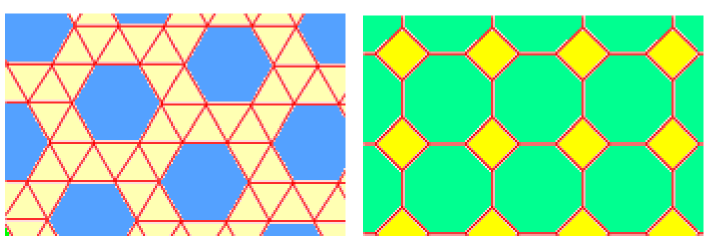


Figura 8: Teselados Regulares

4.2.2.- Teselados Semiregulares

Este tipo de teselados se genera a partir de dos o más polígonos regulares. El patrón de los 360° debe ser el mismo en todos los vértices. Existen ocho (8) teselados semiregulares (observar **figura 9**).



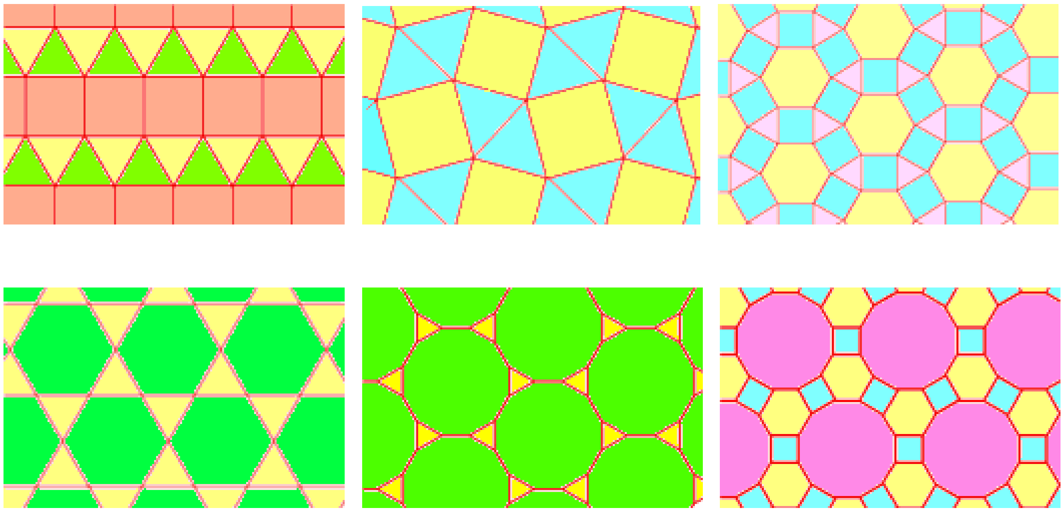
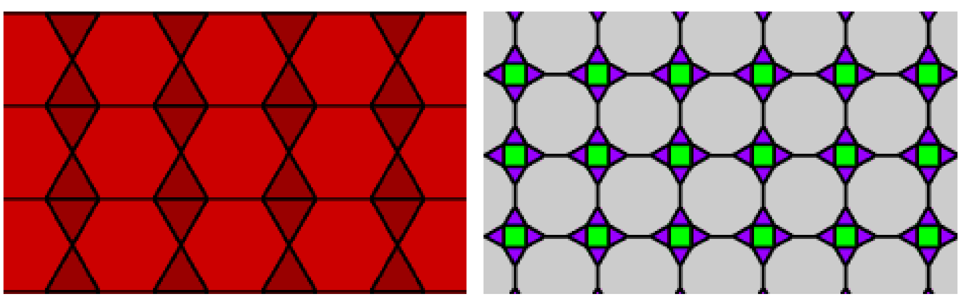
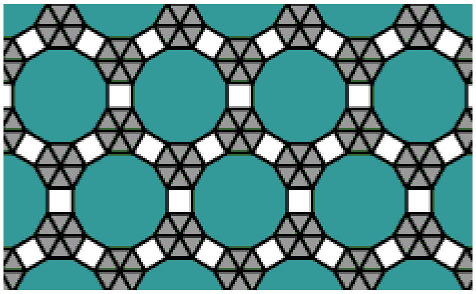
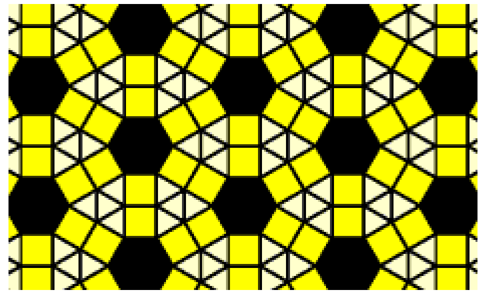
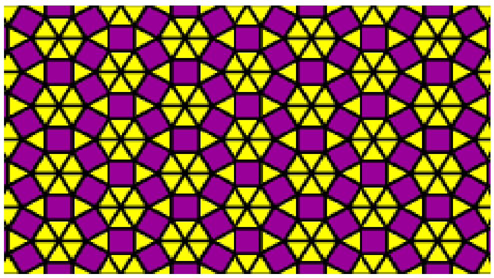
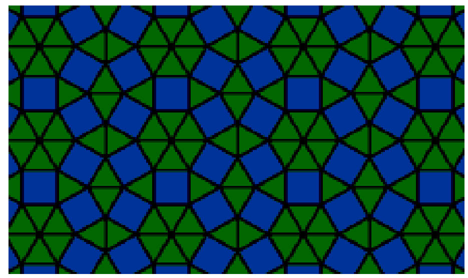
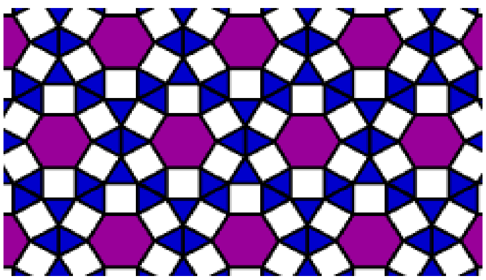
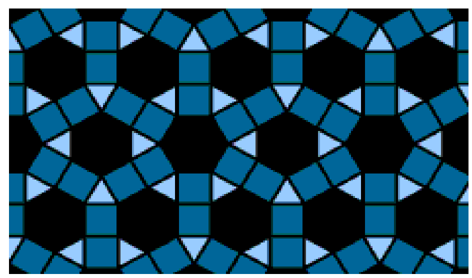
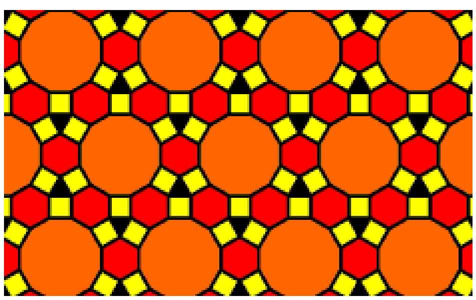
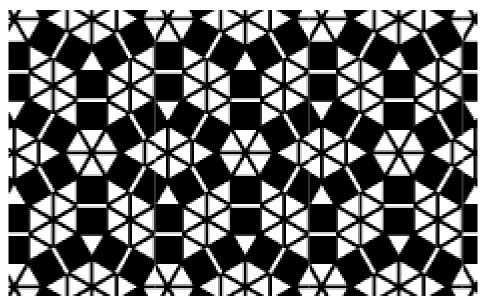
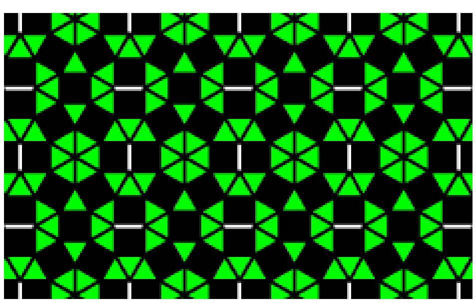
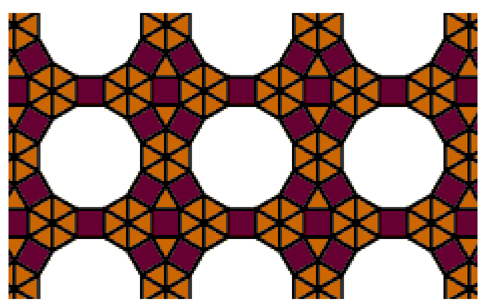


Figura 9: Teselados Semiregulares

4.2.3.- Teselados Demiregulares

Combinando los tres teselados regulares y los ocho teselados semiregulares se conforman los así llamados teselados Demiregulares Existen catorce teselados de este tipo (ver **figura 10**).



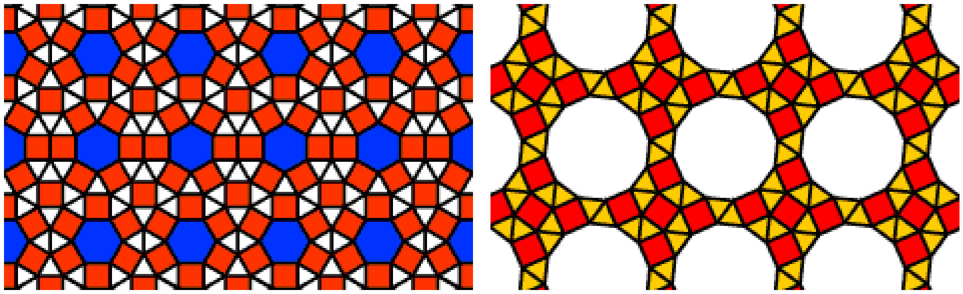


Figura 10: Teselados Demiregulares

4.2.4.- Teselados Irregulares

Están construidos a partir de polígonos regulares e irregulares que al igual que todos los teselados cubren toda la superficie sin sobreponerse y sin dejar espacios vacíos. La distribución de los polígonos en los distintos vértices es cíclica (ver ejemplos en la **figura 11**)**.**

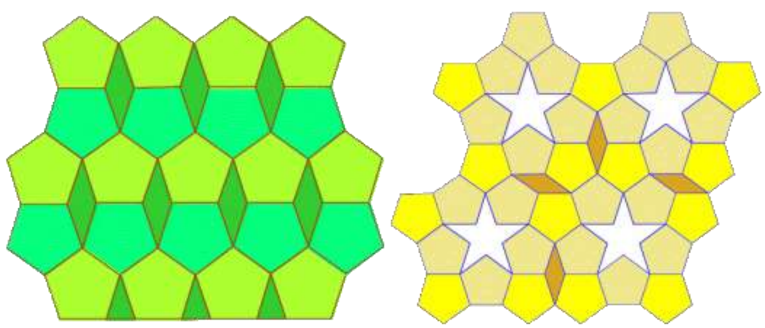


Figura 11: Ejemplo de Teselados Irregulares

4.3.- Los 17 Grupos de Simetría

También llamados *Grupos Cristalográficos del Plano o Grupos Periódicos.* Las diferentes maneras de cómo se generan los patrones o los embaldosados es una consecuencia de la aplicación de la teoría de los *17 grupos de simetría del plano*, demostrada por el matemático Evgraf Stepanovich Fedorov (1853-1919) en 1891, es decir, únicamente son diecisiete las formas que existen para cubrir el plano. Desde 1952 fueron clasificadas según la naturaleza de sus giros y denominadas por la Unión Internacional de Cristalografía.

Estos Grupos se pueden agrupar según el orden máximo de los giros:

- Grupos de simetría sin giros: 4 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con giros de 180º: 5 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con giros de 120°: 3 grupos de simetrías
- Grupos de simetría con giros 90°: 3 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con giros de 60°: 2 grupos de simetrías.

La lista de los Grupos Cristalográficos es la siguiente:

1) p1: dos traslaciones.

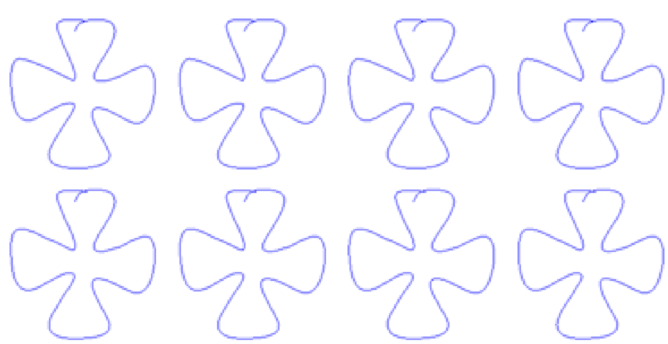


Figura 12: Ejemplo de Grupo de Simetría 1

2) p2: tres simetrías centrales (o giros de 180º).

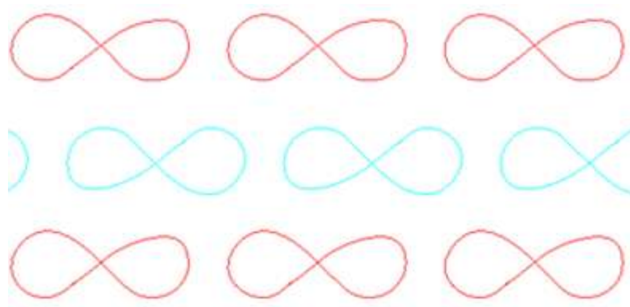


Figura 13: Ejemplo de Grupo de Simetría 2

3) p3: dos giros de 120º.

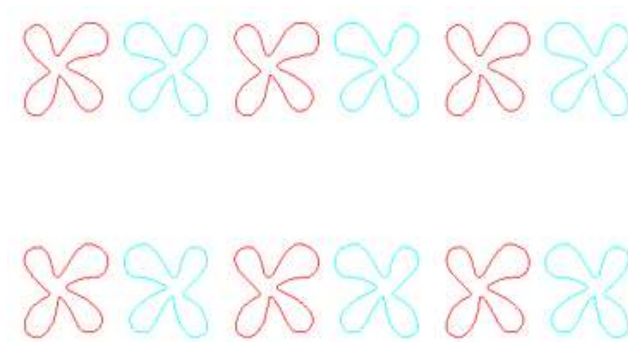


Figura 14: Ejemplo de Grupo de Simetría 3

4) p4: una simetría central (o giro de 180º) y un giro de 90º.

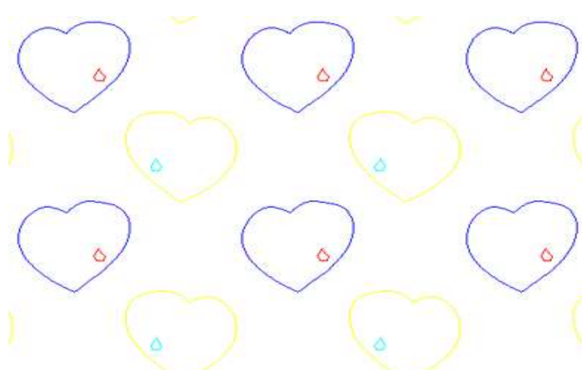


Figura 15: Ejemplo de Grupo de Simetría 4

5) p6: una simetría central y un giro de 120º.

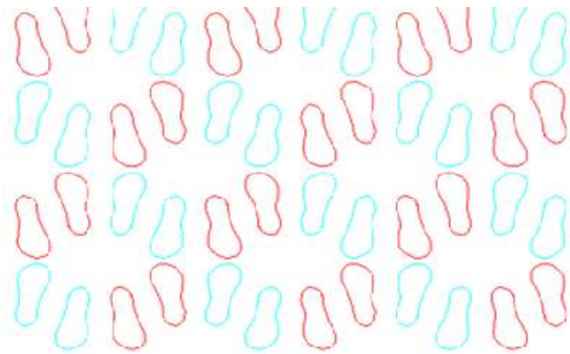


Figura 16: Ejemplo de Grupo de Simetría 5

6) pm: dos simetrías axiales y una traslación.

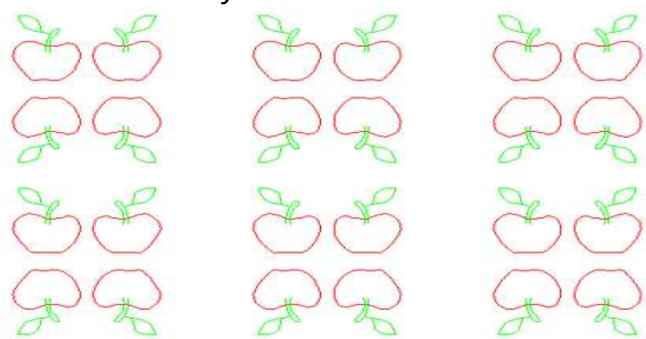


Figura 17: Ejemplo de Grupo de Simetría 6

7) pmm: cuatro simetrías axiales en los lados de un rectángulo (2 horizontales y 2 verticales).

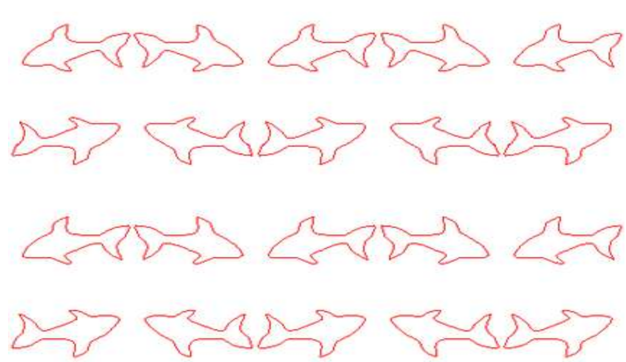


Figura 18: Ejemplo de Grupo de Simetría 7

8) <u>pmg</u>: una simetría axial y dos simetrías centrales.

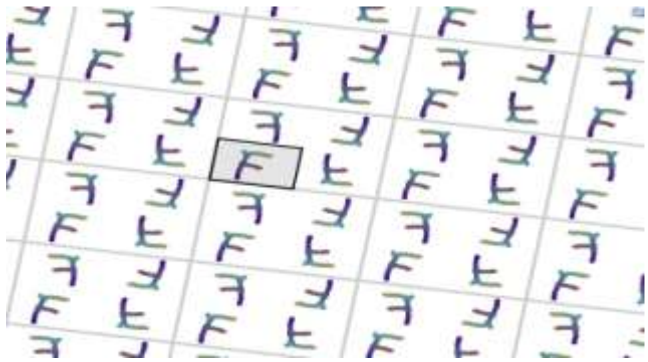


Figura 19: Ejemplo de Grupo de Simetría 8

9) <u>cmm</u>: dos simetrías axiales perpendiculares y una simetría central.

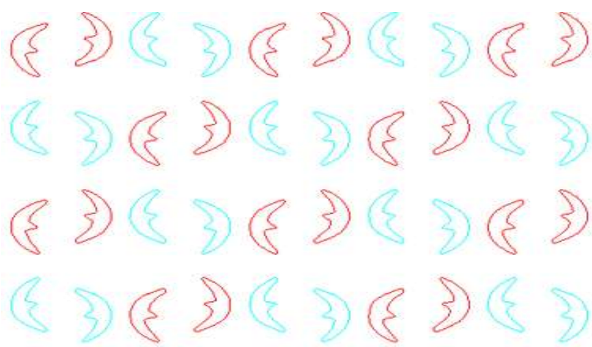


Figura 20: Ejemplo de Grupo de Simetría 9

10) <u>p31m</u>: una simetría axial y un giro de 120º.

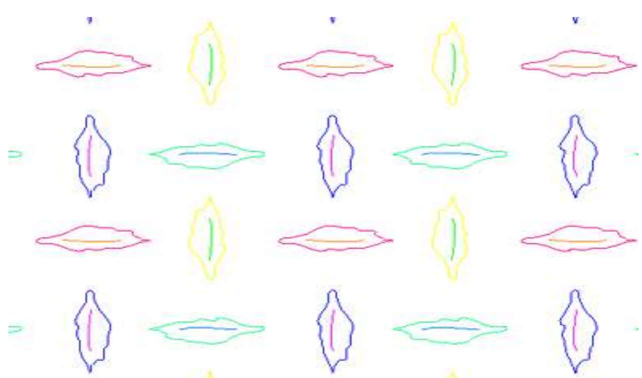


Figura 21: Ejemplo de Grupo de Simetría 10

11) p3m1: tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero (ángulos 60-60-60).

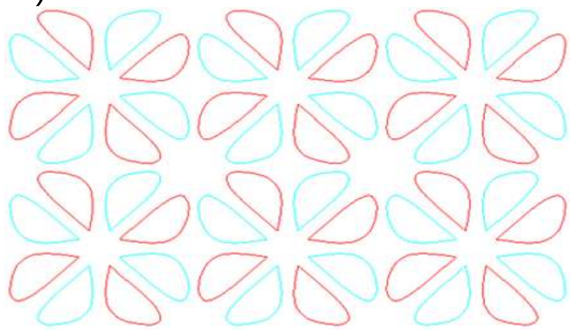


Figura 22: Ejemplo de Grupo de Simetría 11

12) p4g: una simetría axial y un giro de 90º.

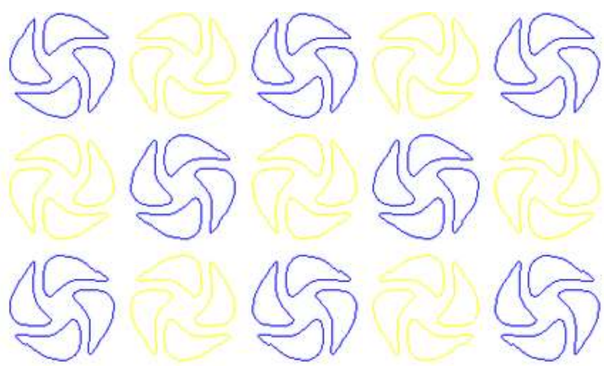


Figura 23: Ejemplo de Grupo de Simetría 12

13) p4m: tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 45-45-90.

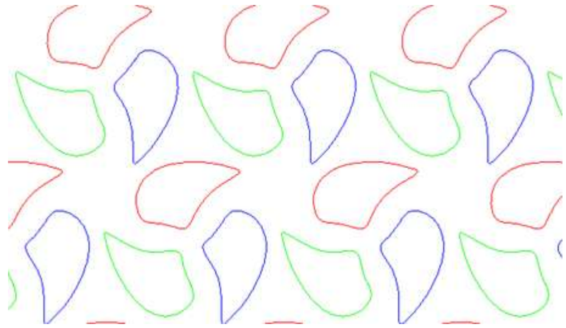


Figura 24: Ejemplo de Grupo de Simetría 13

14) p6m: tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 30-60-90.

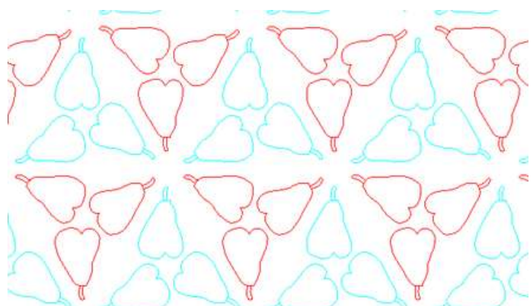


Figura 25: Ejemplo de Grupo de Simetría 14

15) cm: una simetría axial y una simetría con deslizamiento perpendicular.

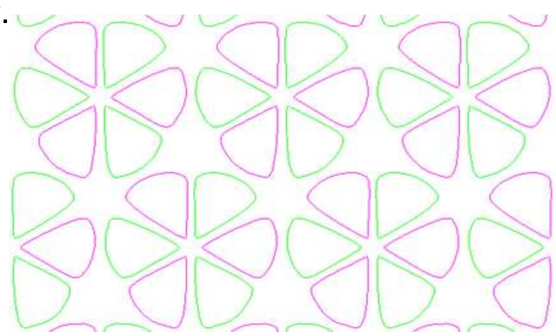


Figura 26: Ejemplo de Grupo de Simetría 15

16) pg: dos simetrías con deslizamiento paralelas.

Figura 27: Ejemplo de Grupo de Simetría 16

17) pgg: dos simetrías con deslizamiento perpendiculares.

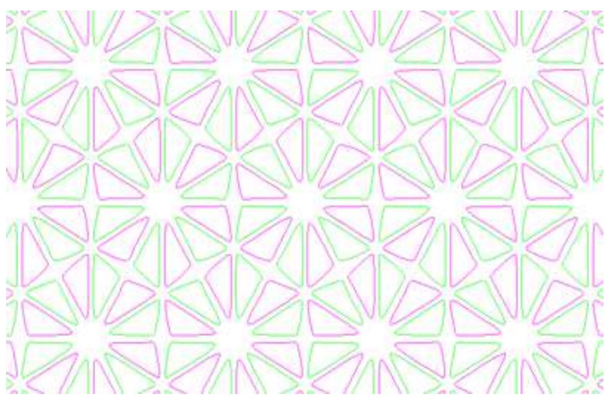


Figura 28: Ejemplo de Grupo de Simetría 17

4.4.- Antecedentes Históricos

El origen de los teselados se remonta al tiempo de los Caldeos (2500-2600 A.C) con un Friso en la ciudad de Ur, en Irak. Todos los pueblos antiguos hicieron luego incursión en el arte de los mosaicos, tanto en la antigüedad clásica como en la Mesoamericana. Inicialmente los primeros mosaicos eran dibujos sencillos realizados con guijarros y arcilla. En la antigüedad clásica estos mosaicos llegaron a ser un producto muy elaborado y de gran lujo, usando como inspiración la cultura helenística, comenzaron a realizar obras cada vez más complicadas con temas complejos y episodios de la vida cotidiana y de la mitología. Los materiales empleados también fueron más ricos (mármol, vidrio, ónice). Este arte adquirió su difusión máxima en época del Imperio Romano.

Desde un punto de vista científico y artístico vale la pena resaltar que:

- Arquímedes en el siglo III a. C. hizo un estudio acerca de los polígonos regulares que pueden cubrir el plano.

- Johannes Kepler (1571-1630), astrónomo alemán, estudió los polígonos regulares que pueden cubrir el plano en su obra "*Harmonice mundi*" de 1619.

- Entre 1869 y 1891, el matemático Camille Jordan (1838-1922) y el cristalógrafo Evgenii Konstantinovitch Fiodorov estudiaron completamente las simetrías del plano, iniciando así el estudio sistemático y profundo de los llamados teselados.

- M. C. Escher (1898-1972), fue uno de los más grandes artistas gráficos del siglo XX, algunas de sus peculiares y fascinantes obras estuvieron basadas en el tema *División Regular del Plano*.

4.5.- Biografía de Maurits Cornelius Escher (1898-1972)

Nació el 17 de junio de 1898 en Leewarden, Holanda. Fue criado por su padre George Escher, ingeniero hidráulico y su segunda esposa Sarah Gleichman Maurits. Asistió tanto a la escuela primaria como al bachillerato en el pueblo de Arnhem entre 1912 y 1918; no fue un alumno particularmente sobresaliente, mostraba, eso sí, bastante interés en la música y la carpintería.

Hay informes que detallan su acercamiento metodológico a la vida matemática, el cual se considera como una reacción inconsciente a su educación en una familia de ingenieros. Maurits y su buen amigo Bas Kitl se interesaron mucho en las técnicas de impresión después de recibir buenas notas del Departamento de Artes en el Instituto donde estudiaron.

En 1918 su familia se mudó a Oosterbeek donde se inscribió en la Escuela Superior Técnica en Delf para culminar su bachillerato, aunque estaba poco dispuesto a ello, por lo que decidió concentrarse en sus dibujos y técnicas de grabado en madera influenciado por el pintor holandés Richard Roland Holst (1868-1938).

En septiembre de 1920 Escher se mudó a Haarlem para estudiar en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas (estudios que poco después abandonó), allí conoció al profesor de Artes Gráficas Samuel Jesserum De Mesquita. Él le enseñó todo lo que sabía sobre técnicas de xilografía, lo animó y le dejó experimentar para que desarrollara sus habilidades.

En su juventud se concentró en dibujar desde perspectivas bastante inusuales, considérese por ejemplo la Ilustración de *San Pedro* (**figura 29**).

Figura 29: San Pedro (1935). Grabado en madera

Durante esta época Escher atacó solo brevemente el tema de “cubrir el plano”. Su primera obra en la que presenta una división regular del plano se llamó *Ocho cabezas* y fue terminada en 1922 (obra que se muestra en la **figura 30**).

Figura 30: Ocho Cabezas. Grabado en madera. Obra terminada en 1922

Visitó España en junio de 1922; recorrió muchos palacios, edificios y paisajes típicos los cuales lo inspiraron, uno que le impresionó particularmente fue el Palacio de la Alhambra en Granada.

En 1923 Escher se fue a vivir a Italia donde conoció a su futura esposa, Jetta Umiker, en la ciudad de Ravello. Se casaron en 1924 quedándose a vivir en Frascati, a las afueras de Roma, donde tendrían tres hijos: George (nacido el 23 de junio de 1926), Arturo (nacido el 8 de diciembre de 1928) y Jan (nacido el 6 de marzo de 1938).

En la década siguiente Escher y su familia vacacionaron frecuentemente por toda Italia. Siguieron años de pintar el paisaje italiano, generalmente desde perspectivas consideradas imposibles, hasta que la familia fue forzada a abandonar Italia debido al alzamiento fascista que se desarrolló en Italia durante el verano de 1925. En julio de 1935 se mudaron a un pueblo montañés en Suiza, pero Jetta extrañaba Italia y los altos precios suizos forzaron a Escher a hacer más grabados para la venta; de esta forma se ganaban la vida.

La familia Escher estaba descontenta con el nuevo rumbo que tomaban sus vidas y, al faltarle inspiración para su trabajo, Maurits y Jetta decidieron iniciar una nueva excursión, esta vez al Mediterráneo, en abril de 1936; durante los siguientes dos meses de este recorrido, Escher realizó varios volúmenes de bocetos con los cuales trabajaría junto a su esposa en la venta de los mismos para resguardar el futuro de su familia.

La fascinación de Escher con el orden y la simetría se apoderó de su vida después de aquella travesía por el Mediterráneo. Después de su segunda visita a la Alhambra. Escher señaló que ésta fue:*[...] "la fuente más* *rica de inspiración de la que he bebido".* Después de este viaje, Escher se obsesionó con el concepto de la división regular del plano. Escribió: "*Sigue siendo una actividad extremadamente absorbente, una verdadera manía a la cual me he vuelto adicto y de la cual muchas veces me es difícil separarme".*

Escher sentía que podía mejorar el trabajo de los artistas Moros y usó sus bocetos como una cuadrícula geométrica sobre la cual diseñar sus propios personajes para llenar el plano.

En octubre de 1937 mostró parte de su nuevo trabajo a su hermano Berend, quien para ese entonces era profesor de Geología de la Universidad de Leiden en Holanda, cuando ambos visitaban el hogar familiar en La Haya. Al reconocer la conexión entre los grabados de su hermano y la cristalografía, Berend le envió una lista de artículos que creía le podrían ayudar. Entre ellos destacaba uno del matemático húngaro George Pólya (1887-1985), sobre la simetría de grupos en el plano y los Diecisiete Grupos de Simetría.

Entre 1937 y 1941 Maurits trabajó sobre posibles teselados. Con un estudio metódico adoptó un acercamiento muy matemático a este problema usando una notación de su propia invención.

A finales de 1937 la familia Escher se mudó a Bélgica, que se convertiría en su hogar hasta el 20 de febrero de 1941 cuando el ejército invasor alemán los obligó a huir hacia Baarn, en Holanda. La Segunda Guerra Mundial, con sus nefastas consecuencias, fue también para Escher un periodo deprimente que le impidió concentrarse en su trabajo.

Escher hizo numerosos grabados en madera utilizando cada uno de los 17 Grupos de Simetría. Con la práctica, sus habilidades mejoraron espectacularmene y como resultado logró diseñar y completar cada pieza mucho más rápido que en años anteriores. Su arte formó parte integral de su vida familiar y Escher podía trabajar en su estudio entre las 8am y las 4pm todos los días. Nuevos conceptos podían tardar meses o incluso años para cuajar antes de que la obra final fuera discutida y explicada a la familia. Uno de sus hijos escribió:

"El final del ciclo, hacer la primera impresión, le daba a papá una mezcla de júbilo y tristeza. Era emocionante y satisfactorio levantar el papel por primera vez de la madera entintada, ver la xilografía terminada, nítida e inmaculada, aparecer gradualmente alrededor de la orilla del papel conforme era cuidadosamente levantado. Pero papá siempre tenía una sensación de decepción, de no haber podido dibujar adecuadamente sus pensamientos. Después de todo su esfuerzo, ¡qué lejos quedaba el resultado respecto a la idea originalmente tan lúcida y engañosamente simple!"

En 1941 culminó su investigación con su primer cuaderno, *División regular del plano con polígonos asimétricos congruentes*. Este cuaderno fue ampliado y mejorado durante el año siguiente, cuando le se incluyeron los resultados obtenidos de sus extensas investigaciones sobre la división basada en el color (estos cuadernos no se hicieron para ser publicados sino como información de fondo que le permitiera continuar como un artista visionario).

Estos cuadernos son evidencia del hecho de que Escher se había convertido en un matemático investigador de primer orden, a pesar de sus sentimientos de inseguridad matemática. Había desarrollado su propio sistema de categorización, el cual cubría todas las posibles combinaciones de forma, color y propiedades simétricas. Como tal, había estudiado, sin saberlo, áreas de la cristalografía. En esa época Escher escribió: "*Hace mucho tiempo, me atreví a entrar en este ámbito (el de la división regular del plano) en uno de mis deambulares... Sin embargo, al otro lado llegué a un área deshabitada... Llegué a la puerta abierta de las matemáticas. A veces pienso que he recorrido toda la zona [...] y después descubro repentinamente una nueva senda y experimento delicias que no había visto antes".*

Hacia 1956 los intereses de Escher cambiaron de nuevo, llevando la división regular del plano a un nivel más alto al representar el infinito sobre un plano bidimensional fijo. Al inicio de su carrera había usado el concepto de un lazo cerrado para tratar de expresar el infinito, como se demuestra en el diseño *Jinetes,* **figura 31**.

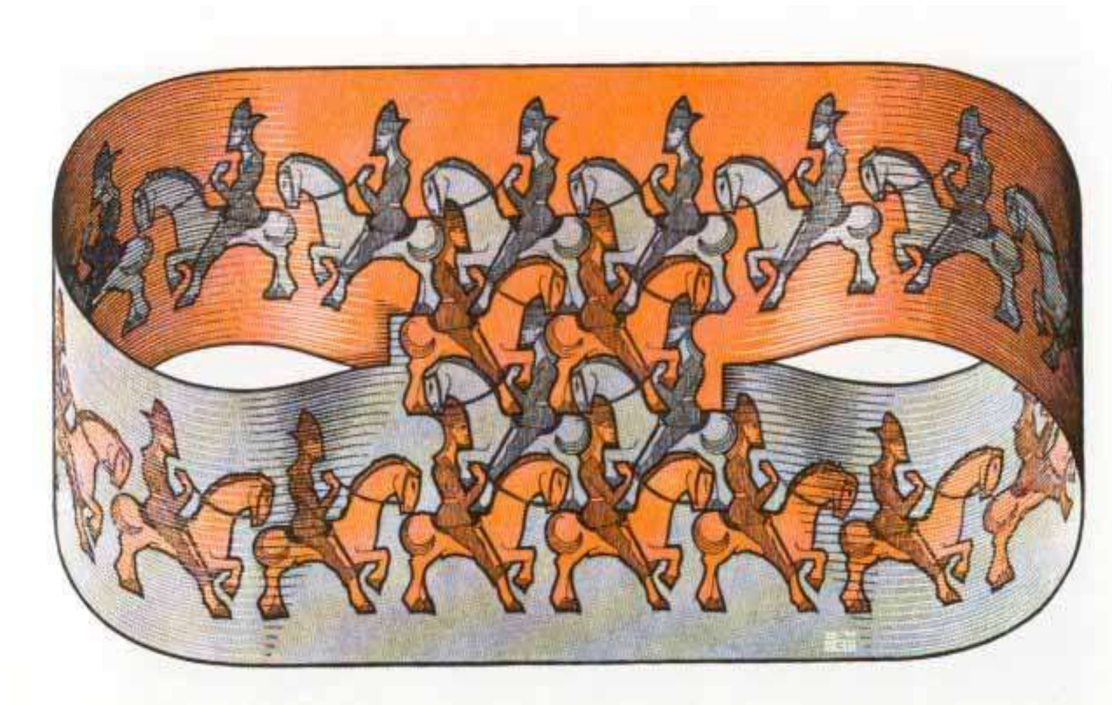


Figura 31: Jinetes (1946). Litografía

En 1958 conoció al matemático británico Harold Coxeter (1907-2003), se convirtieron en amigos de por vida. Un artículo escrito por Coxeter le llamó particularmente la atención y, aunque no logró comprender plenamente el texto, pudo determinar las reglas de los teselados hiperbólicos usando nada más los diagramas insertos en dicho artículo. (*Obra Límite Circular I,* **figura 32**).

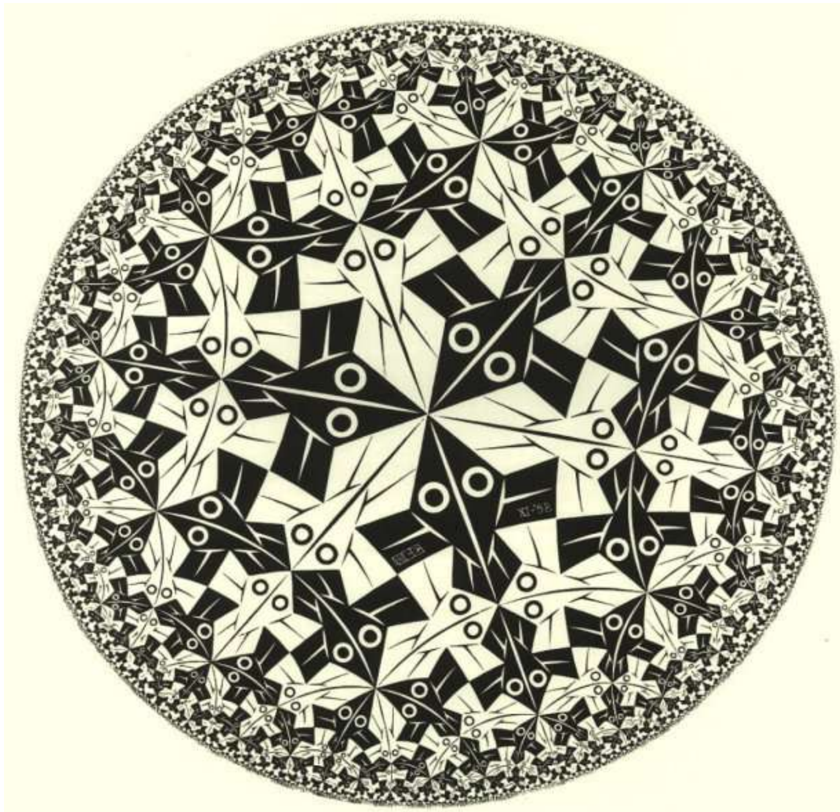


Figura 32: Límite Circular I (1958). Grabado en madera

Este estilo de obra de arte necesitaba enorme dedicación porque requiere una planeación cuidadosa y bocetos preliminares junto con la habilidad y la mano para grabar, pero era una gran fuente de satisfacción para Escher. Escribió: *"Descubrí una vez más que la mano humana es capaz de ejecutar movimientos pequeños pero totalmente controlados siempre y cuando el ojo vea con suficiente claridad lo que hace la mano".*

Tiempo después, en 1995, Coxeter publicó un artículo en el que demostraba que Escher había conseguido la perfección matemática en uno de sus grabados, como se observa en la **figura 33**: *Círculo límite III*, el cual fue creado usando solamente instrumentos simples de dibujo y su gran intuición. Coxeter probó que:*[...] [Escher] lo hizo milimétricamente bien, absolutamente al milímetro [...] Desafortunadamente no vivió lo suficiente para ver su reivindicación matemática.*

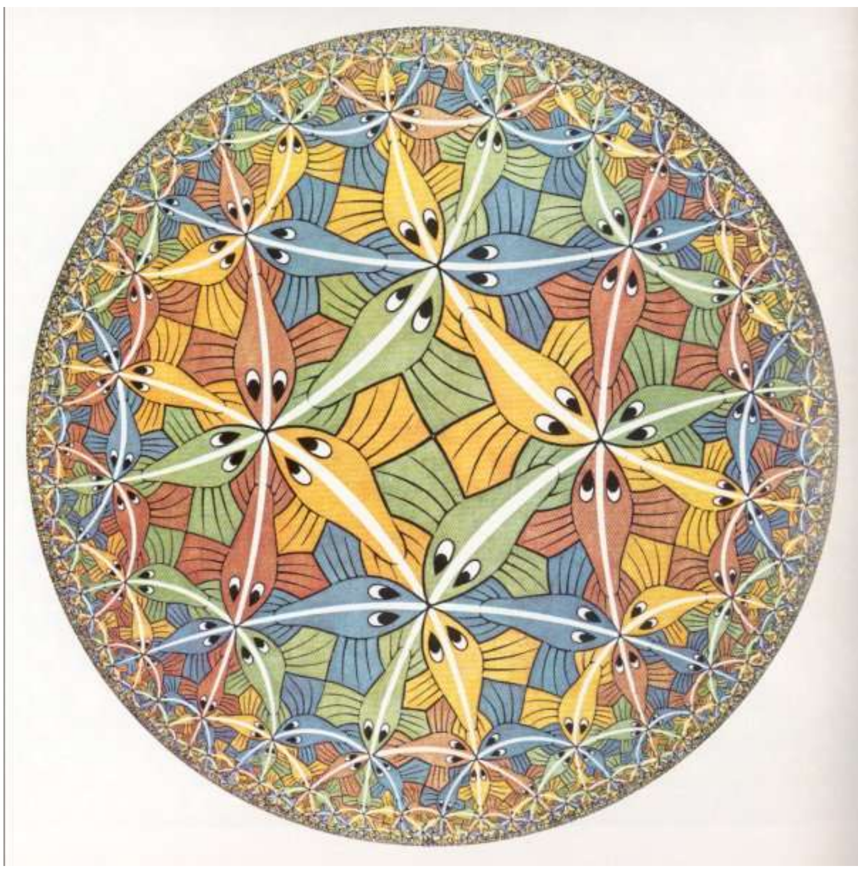


Figura 33: Límite Circular III (1959). Grabado en madera

Esta demostración sirve para ensalzar la maravillosa habilidad natural de Escher para combinar las aptitudes artísticas y técnicas que aprendió de otros para formar diseños matemáticamente perfectos.

Escher recibió numerosos premios durante su vida, incluyendo el título de Caballero de *Oranje Nassau* (1955) y regularmente era comisionado para diseñar arte para dignatarios de todo el mundo.

En 1958 publicó *División Regular del Plano,* en esta obra afirma que: "*Al principio no tenía la menor idea de que fuera posible construir sistemáticamente mis figuras. No sabía [...] que esto era posible para alguien sin entrenamiento matemático y, especialmente, como resultado de desarrollar mi propia teoría inexperta, lo que me forzó a pensar con cuidado en las posibilidades".*

Nuevamente, en *División Regular del Plano*, Escher escribe:

"En los ámbitos matemáticos, la división regular del plano ha sido considerada teóricamente [...] [Los matemáticos] han abierto la puerta que lleva a un extenso dominio pero no han incursionado en él ellos mismos. Por su misma naturaleza, están más interesados en la manera en que se abre la puerta que en el jardín que yace tras ella".

Escher logró capturar la noción de espacio hiperbólico en un plano bidimensional fijo y también trasladar los principios de la división regular a muchos objetos tridimensionales tales como esferas, columnas y cubos. Varias de sus impresiones combinan imágenes bidimensionales y tridimensionales con efectos asombrosos como por ejemplo en *Reptiles,* **figura 34**.

Figura 34: Reptiles (1943). Litografía

Hacia el final de su vida aprendió mucho del matemático británico Roger Penrose (1931-) y usó este conocimiento para diseñar muchos grabados “imposibles” tales como *Catarata* o *Subida y Bajada* (ir a la **figura 35**).

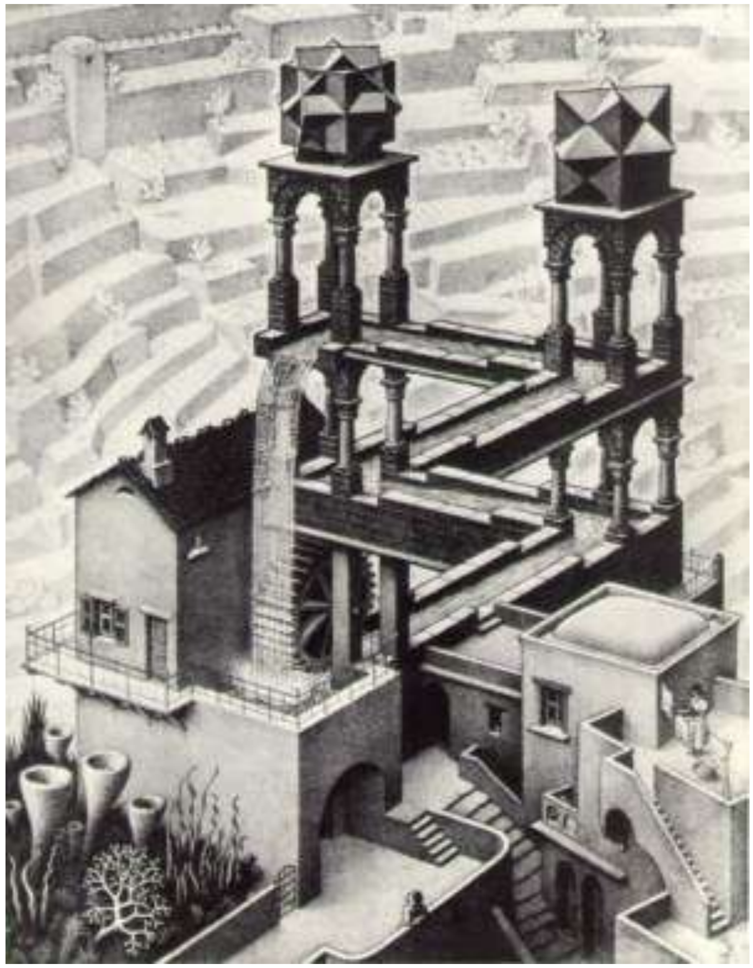


Figura 35: Catarata (1961). Litografía

Escher usó imágenes para narrar su historia en una serie de dibujos denominada *Metamorfosis I* (ver **figura 36**).

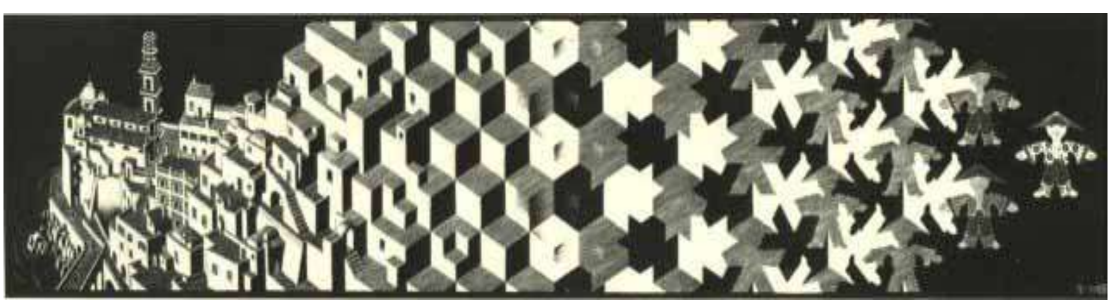


Figura 36: Metamorfosis I (1933). Grabado en madera

Estos diseños reúnen muchas de las habilidades de Escher y muestran la transformación de un objeto bien definido en otro, mediante una serie de pequeños cambios en un patrón regular sobre el plano. *Metamorfosis I* en particular, impresa en 1933, da una visión del cambió de estilo artístico que tuvo lugar en la vida de Escher en ese momento. Una línea de costa italiana se transforma mediante una serie de polígonos convexos en un patrón regular en el plano hasta llegar finalmente a un motivo humano bien definido y colorido, expresando su cambio de perspectiva del paisajismo a la división regular del plano.

Cayó enfermo inicialmente en 1964 mientras daba una serie de pláticas en Norteamérica, dedicando después la mayor parte de su tiempo a la correspondencia con amigos. Su última obra fue *Serpientes* (ver **figura 37**).

Figura 37: Serpientes (1969). Grabado en madera

Después de una prolongada enfermedad, Escher muere el 27 de marzo de 1972.

4.6.- Descripción de algunos Teselados de Escher

4.6.1.- Cielo y Agua I (grabado en madera, 1938), para éste diseño Escher utilizó diversas tonalidades de los colores blanco y negro. Las prototeselas de peces y aves son los patrones que cubren el plano. Ambas se entrelazan, y se transforma en lo que es el cielo y el mar.

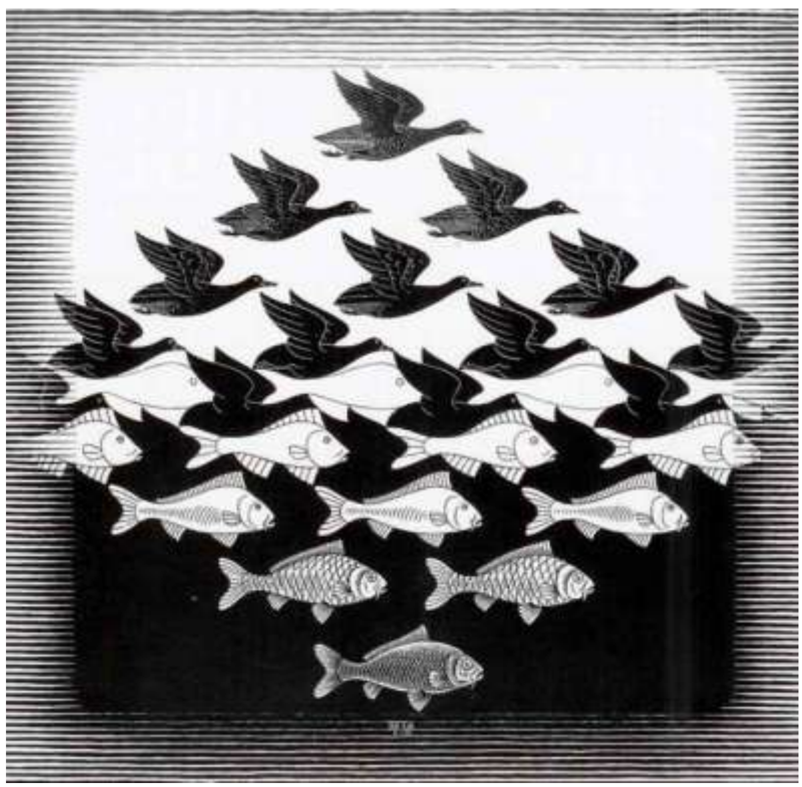


Figura 38: Cielo y Agua I (1938). Grabado en madera

4.6.2.- Día y Noche (grabado en madera, 1939). Éste dibujo es considerado por algunos el más admirado y reproducido en su obra. Combinó en éste diseño la prototesela (pájaros blancos y negros que vuelan en direcciones opuestas y cubren el plano) con la metamorfosis delicada que surge de los sembradíos, a las aves, y también, el hecho de que la zona izquierda y derecha (una de día y la otra de noche), correspondan exactamente al mismo lugar.

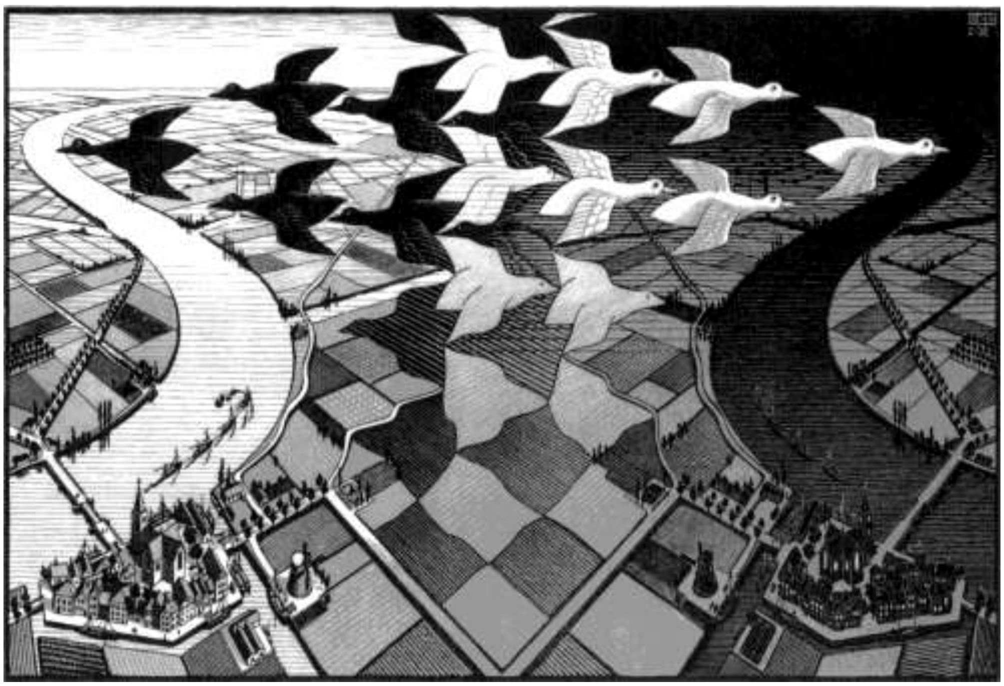


Figura 39: Día y Noche (1939). Grabado en madera

4.6.3.- Reptiles fue una litografía creada en 1943. Ésta es una de las diversas obras en las que Escher se introdujo en el dibujo, pues de su cuaderno (plano bidimensional) en el que estuvo dibujando teselas regulares hexagonales con forma de reptil, surge una figura de tres dimensiones. El reptil hace un recorrido subiendo por un libro, llega hasta un dodecaedro platónico, lanza un soplido y completa el ciclo retornando al plano bidimensional (ir a **figura 34,** pág. 72).

La **figura 40** muestra algunos de los bocetos de la temática de éste estudio, el primero es llamado Reptiles, el segundo Pajaritas y el tercero es denominado Patitas; estos son dibujos que servirán de “modelo” para construir los teselados de los ítems 6.2-4, pág. 111.

Figura 40: Bocetos (Dibujos) de Escher

4.6.4.- Límite Circular IV, Ángeles y Demonios (grabado en madera, 1960). Escher combina dos técnicas, la partición regular del plano usando la prototesela de ángeles y demonios blancos y negros, con el límite infinito de un modelo de disco de Poincaré. Éste disco permite abarcar el infinito en un círculo de tamaño limitado, en la que a medida que un punto se aleja del centro, es cada vez más pequeño, esto gracias al uso de la geometría hiperbólica.

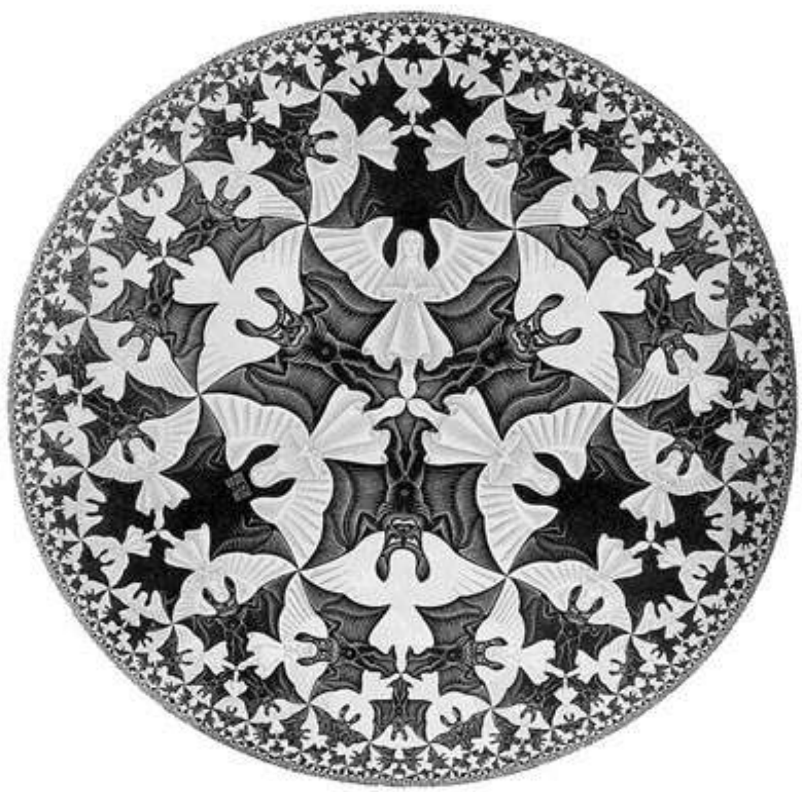


Figura 41: Ángeles y Demonios (1960). Grabado en madera

CAPÍTULO V

Guía para construir teselados “sencillos” empleando GeoGebra 3.2

5.1.- Consideraciones Generales.

Esta guía está dirigida a estudiantes de Educación Básica y Ciclo Diversificado para que se inicien en la elaboración de teselados usando el GeoGebra. Para su uso se consideran *suficientes* los conocimientos previos obtenidos en el área de Geometría, así como también los aportados en el capítulo anterior y, por supuesto, un manejo de los elementos básicos del GeoGebra 3.2; vale la pena resaltar que ésta versión del programa viene con un muy buen *Manual de Ayuda*[3] incluido.

La guía contiene una explicación detallada de la construcción de algunos teselados, de los cuatro desarrollados, tres se corresponden con bocetos de Teselados Nazaríes (Mosaicos que adornan el Palacio La Alhambra de Granada). Al final de las instrucciones correspondientes a cada construcción se presenta la imagen respectiva. Además, se ofrecen algunas sugerencias fruto de la experiencia adquirida por la autora de la investigación que sirven para “pulir” el acabado del teselado, las cuales pueden ser

---

[3] *En el CD anexo se encuentra adjunto el Java (necesario para la instalación del programa), el instalador del GeoGebra 3.2 y su Manual en formato PDF, además de los ejemplos de los teselados expuestos en éste capítulo.*

empleadas (en algunos casos) para construcciones de la guía y algunas del próximo capítulo.

5.1.1.- Ventana principal de GeoGebra 3.2

Antes de proceder a construir los teselados descritos en la guía, es necesario conocer la ubicación y denominación de cada barra de construcción, ya que su totalidad conforma lo que se titula, *Barra Herramientas* del GeoGebra, pues al desplegarse contiene los íconos que se usan como instrumentos para elaborar distintos tipos de construcciones, en nuestro caso, los teselados (observar la **figura 42**).

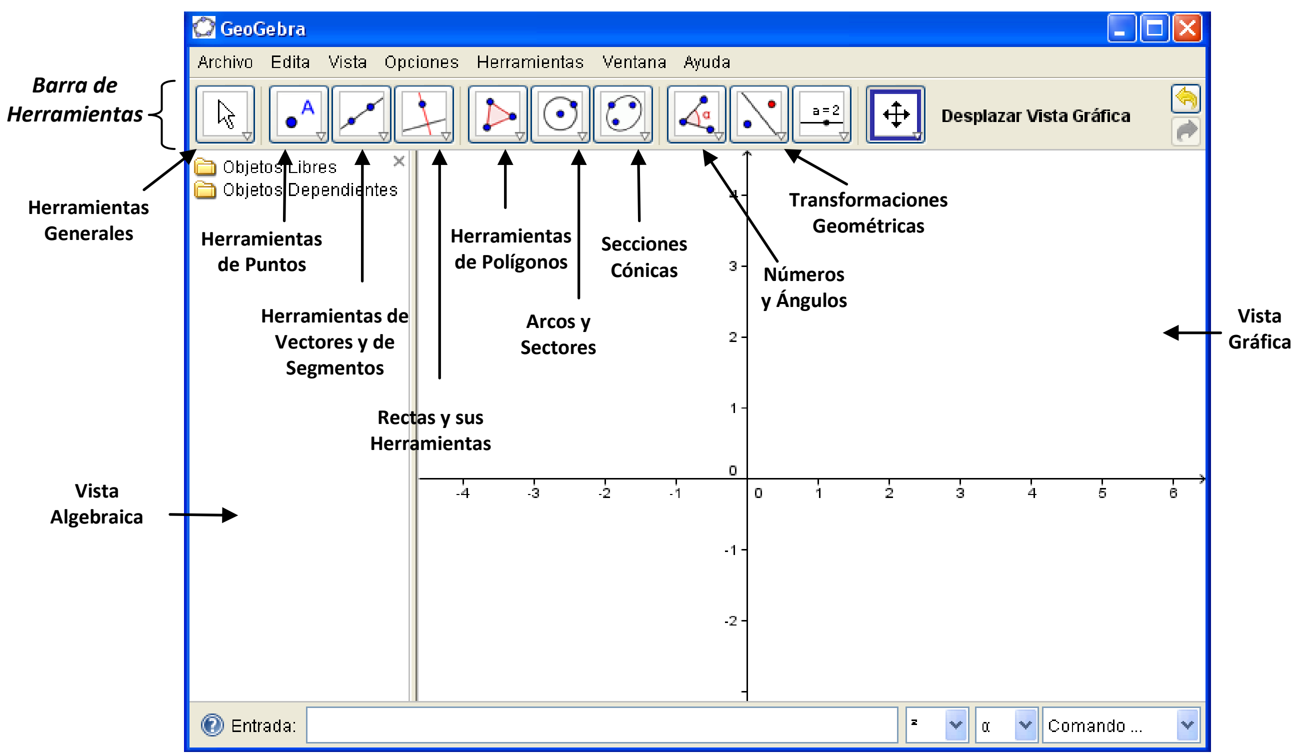


Figura 42: Barras de construcción de la ventana del GeoGebra 3.2

5.2.- Construcción de Teselado a partir de un Triángulo

Previo a la construcción de éste teselado, se debe tener presente que la Vista Gráfica y la Vista Algebraica del programa están expuestas automáticamente, en la primera, se ubican los ejes coordenados, por lo tanto, se recomienda ocultarlos. Para esto, se hace clic en el ícono **Ejes** **,** ubicado en el Menú Vista, también se recomienda ocultar la Vista Algebraica[4].

Ahora bien, se construye un triángulo equilátero usando el ícono, **Polígono Regular** **,** ubicado en la barra de herramientas Polígono (para ubicar dicha barra, ver **figura 42**, pág. 53). Para ello se determinan dos puntos A y B cualesquiera. En la ventana emergente se escribe el número de lados y se hace clic en *OK*. Sobre el segmento[A,B] estará construido el polígono1[A,B,C].

Mediante las Herramientas de Vectores, se emplea el ícono **Vector entre Dos Puntos** para dibujar dos vectores **u** y **v**, donde

---

[4] *En nuestro caso, construcción de teselados, la Vista Algebraica no es necesaria, por lo tanto, se sugiere ocultarla en construcciones posteriores.*

el origen de ellos sea el punto A y el extremo de uno de los dos vectores sea el punto C y el extremo del otro vector sea el punto B.

De la barra de herramientas Transformaciones Geométricas, se emplea el ícono denominado **Traslada Objeto por un Vector**, se selecciona el objeto (el triángulo), se escoge el vector **u** ó el vector **v** y se traslada el objeto hacia donde va dirigido el vector que se haya escogido. De la misma forma se repite el procedimiento con el otro vector.

Los objetos resultantes de las traslaciones son teselas del plano. Se repite la instrucción antes mencionada con dichas teselas las veces que se requiera para cubrirlo. El triángulo sombreado ilustrado en la **figura 42** representa la *Prototesela* de la construcción.

Aún cuando la construcción actual es relativamente sencilla, deberían ocultarse todos los rótulos de cada uno de los objetos, técnica esta usual en procedimientos más complicados en el GeoGebra. Para ello se emplea, de las Herramientas Generales, el ícono **Elige y Mueve** , y se selecciona toda la construcción

(Ctrl+A), clic derecho; de esta forma se muestra la *Caja de Diálogo de Propiedades* [5] del programa y en la pestaña *Básico,* se hace clic en la *Casilla de Control Muestra Rótulos* para ocultarlos (ya que ésta casilla se encuentra activa automáticamente).

Atención**:** "En caso de que se haya copiado 'algo' de más del objeto que se ha trasladado, se selecciona la parte del objeto que está sobrando, luego clic derecho y opción borra. Si es el caso contrario (si se ha dejado de trasladar algún fragmento del objeto), se selecciona el objeto y se traslada usando el vector que corresponda".

[5] *La Caja de Diálogo Propiedades posee la Característica Especial (mencionada así en el Manual Oficial de la Versión 3.2) de cambiar el color de los objetos, basta con hacer clic en la pestaña Color y seleccionar el color que se prefiera.*

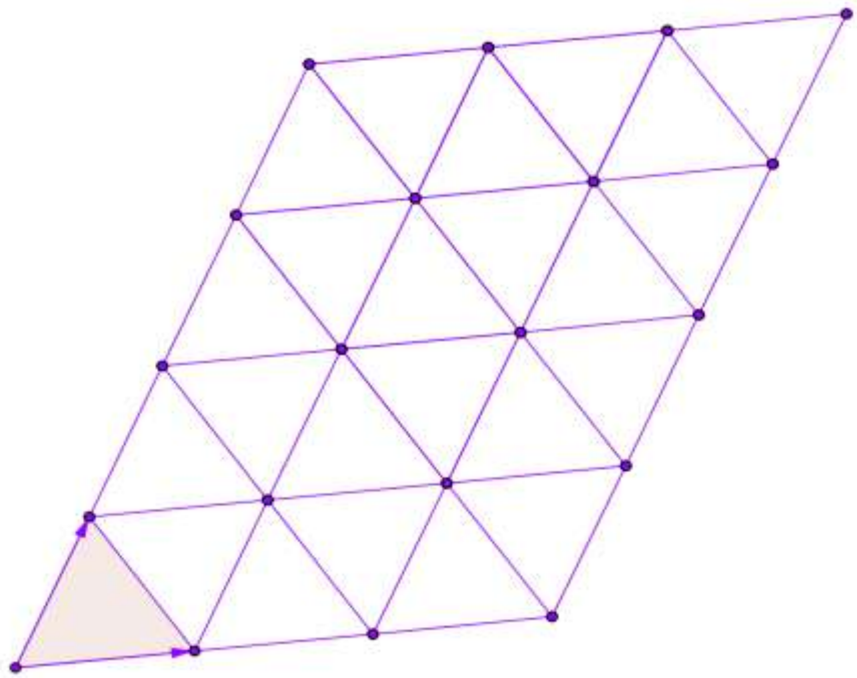
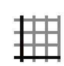


Figura 43: Construcción Final de Teselado a partir de un Triángulo

5.3.- Construcción de Teselado Hueso Nazarí

5.3.1.- Primera construcción del Hueso Nazarí

Para la primera construcción de *éste* teselado en particular es recomendable emplear, del Menú Vista, la opción **Cuadrícula**[6]  para exponer la cuadrícula en la Zona Gráfica (otra manera de activar

[6] *Ésta opción se usa por "comodidad" al usuario para el momento de comenzar a dibujar los puntos para construir el polígono.*

la Cuadrícula, es haciendo clic derecho en la Vista Gráfica, luego clic Cuadrícula).

Del Menú, Herramientas de Puntos, se usa el ícono **Nuevo Punto** y se dibujan los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L (ir a la **Figura 43** y observar la ubicación de dichos puntos, se sugiere mantener la secuencia en la construcción de los mismos). De la barra de herramientas Polígono, se emplea el ícono denominado **Polígono** para unir los puntos anteriormente dibujados (que serán los vértices del polígono), haciendo clic en uno de ellos y, sin soltar el mouse, se dirige el apuntador al *punto siguiente* hasta llegar al *punto inicial* (esto se hace para cerrar la figura). La construcción resultante es la prototesela del *Hueso Nazarí*.

Mediante el Menú, Herramientas de Vectores, se emplea el ícono **Vector entre Dos Puntos** para dibujar cuatro vectores **u**, **v, w** y **x.** El punto inicial del vector **u**[7] es un vértice de la figura (aclarar),

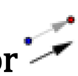
---

[7] *Se toma como ejemplo el vector* ***u****, pudo haber sido cualquiera de los otros vectores.*

es el extremo de una de las dos diagonales que atraviesan el *Hueso*, en consecuencia, el punto final es el otro vértice.

Atención: "Es condición necesaria que el vector debe pasar por cuatro vértices lineales (que estén 2 a 2 sobre una misma recta) de la figura, los cuales deben pertenecer también a la diagonal del *Hueso*, tal cual se muestra en la **figura 44**".

Para dibujar el vector **v** se sigue la instrucción anterior, usando como punto inicial el extremo de la otra diagonal del *Hueso* y como punto final el otro extremo de la misma diagonal (tómese en cuenta lo citado en "Atención"). Los vectores **w** y **x** son los opuestos a los vectores **u** y **v**.

De la barra de herramientas, Transformaciones Geométricas, se emplea el ícono denominado **Traslada Objeto por un Vector**  **,** se selecciona todo el objeto, se escoge uno de los vectores **u, v, w** ó **x** y se traslada el objeto hacia donde va dirigido el vector que se haya escogido. De la misma forma se repite el procedimiento con los vectores restantes.

Con los objetos resultantes de las traslaciones, las teselas del plano, se repite la instrucción antes mencionada las veces que se requiera para cubrirlo.

<u>Atención</u>: “La idea de dibujar cuatro vectores para posteriormente trasladar los objetos, se basa en que de ésta manera son más las teselas que cubrirían el plano”.

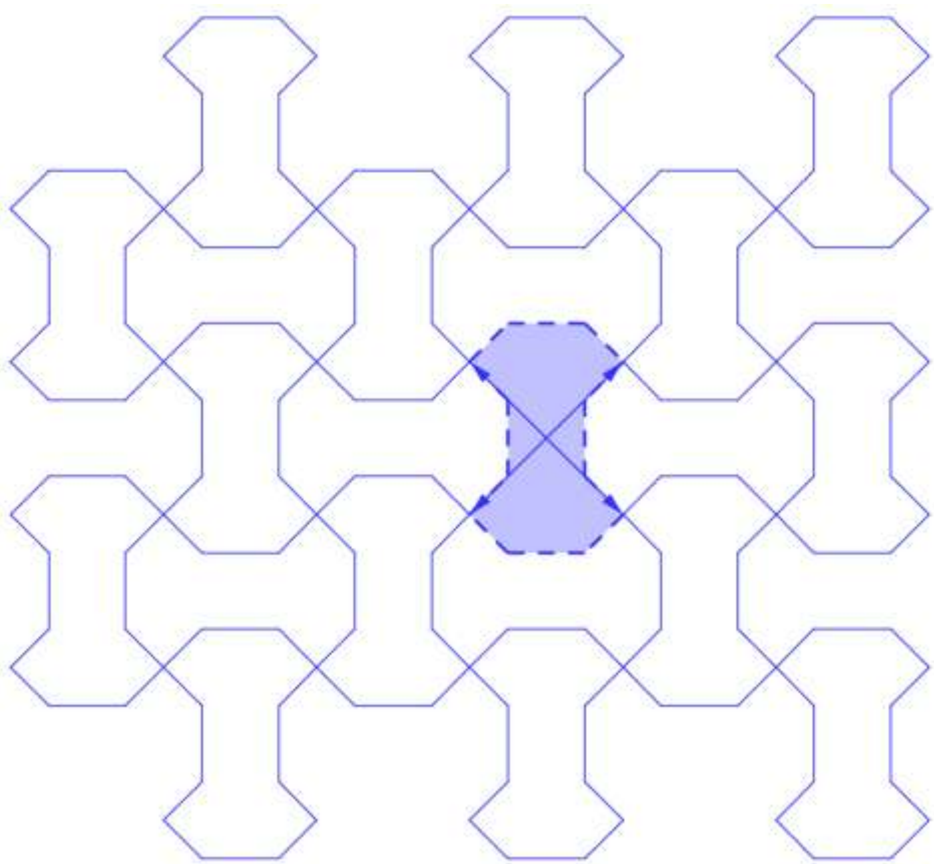


Figura 44: Construcción Final de Teselado Hueso Nazarí

5.3.2.- Segunda construcción del Hueso Nazarí

Antes de comenzar la construcción del teselado, se recomienda ocultar los ejes coordenados, para esto, se hace clic en el ícono **Ejes** **,** ubicado en el Menú Vista.

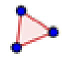
Se construye un cuadrado usando el ícono, **Polígono Regular** **,** ubicado en la barra de herramientas Polígono. Para ello se determinan dos puntos A y B cualesquiera (se recomienda que los puntos sean dibujados de izquierda a derecha). Sobre el segmento[A,B] estará construido el polígono1[A,B,C,D].

Mediante el Menú, Herramientas de Vectores, se emplea el ícono **Vector entre Dos Puntos** para dibujar dos vectores **u** y **v**, donde el punto inicial de ellos sea el punto D y el extremo de uno de los dos vectores sea el punto C y el extremo del otro sea el punto A.

De la barra de herramientas Transformaciones Geométricas, se emplea el ícono denominado **Traslada Objeto por un Vector** **,** se selecciona el cuadrado, se escoge el vector **u** ó **v** y de esa manera se traslada el objeto hacia donde va dirigido el vector que se haya escogido. Éste procedimiento se realiza *tres* veces con cada vector tomando en cuenta que es a los objetos resultantes de cada traslación a los que se les repite el procedimiento antes mencionado. A continuación se completa el "cuadrado de cuadrados" (cuadrado "macro") usando los cuadrados de las esquinas y un procedimiento similar al anterior[8].

Se ocultan todos los rótulos empleando, de las Herramientas Generales, el ícono **Elige y Mueve** **,** y se selecciona toda la construcción (Ctrl+A), clic derecho; de esta forma se muestra la *Caja de Diálogo de Propiedades* del programa y en la pestaña *Básico,* se hace clic en la *Casilla de Control Muestra Rótulos* para ocultarlos (ya que ésta casilla se encuentra activa automáticamente).

[8] *En caso de que el tamaño del cuadrado "macro" no sea el más cómodo para continuar con la construcción, el GeoGebra tiene la ventaja de cambiar el tamaño del objeto construido, se hace clic en el ícono* ***Elige y Mueve*** ***,*** *se selecciona el punto A ó B y se mueve el objeto hasta el lugar que se prefiera y se deja de hacer clic.*

Se usa el ícono **Polígono** , para dibujar dos trapecios, observar y tomar como modelo los trapecios sombreados del ejemplo que muestra la **figura 45.** Para dibujarlo se hace clic sobre cada uno de los vértices del trapecio y para cerrarlo se suelta el clic en el punto en la que se comenzó la construcción. Del mismo modo se realiza con los vértices del otro trapecio.

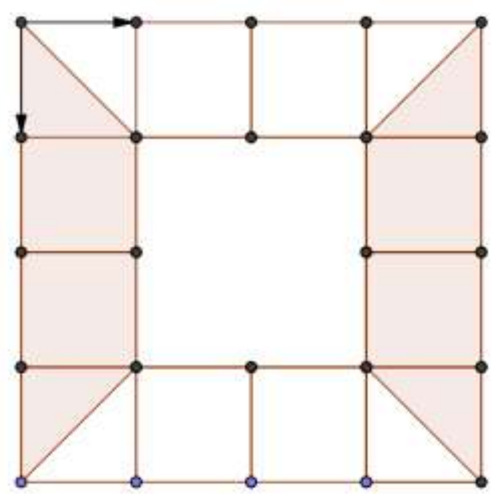


Figura 45: Ejemplo de la construcción de los trapecios

De la barra de herramientas, Transformaciones Geométricas, se emplea el ícono denominado **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo Indicado** , se selecciona uno de los trapecios, se elige un punto (llamado centro de rotación, ver nota siguiente) y en la ventana emergente se escribe el ángulo de rotación, 270°, luego se elige la opción *Sentido Horario* y finalmente se hace clic en *OK*.

<u>Atención</u>: "Como centro de rotación del primer trapecio se selecciona el punto de origen de los vectores **u** y **v** (observar la **figura 45**), y el centro de giro del segundo trapecio es el punto inferior derecho del cuadrado 'macro'.

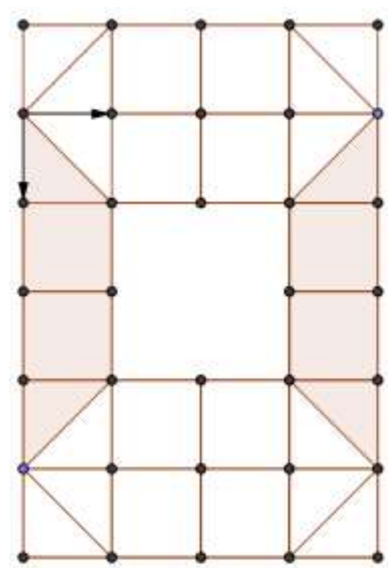


Figura 46: Trapecios rotados 270º

Se siguen las instrucciones dadas a partir del tercer párrafo de la construcción del ítem 5.3.1 para concluir el Teselado Hueso Nazarí.

El acabado final se muestra en la **figura 44** de la pág. 59.

5.4.- Construcción de Teselado Pajarita Nazarí

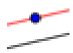
Igual que en las construcciones anteriores, ocultar la vista algebraica y los ejes coordenados. Se construye un triángulo equilátero usando el ícono, **Polígono Regular**. Para ello se determinan dos puntos A y B cualesquiera. Sobre el segmento[A,B] estará construido el polígono1[A,B,C], esta denominación es automática por el programa y se muestra en la vista algebraica (de estar habilitada). Los segmentos del triángulo estarán dados como segmento[A,B], segmento[C,B], segmento[A,C] del polígono1[A,B,C].

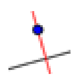
A cada segmento del polígono1 se le encuentra su punto medio usando, de las Herramientas de Puntos, el ícono **Punto Medio o Centro**, para esto se selecciona el segmento y de esta manera se grafica el punto medio del segmento seleccionado. De igual forma se realiza el mismo procedimiento para los dos segmentos restantes.

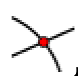
De las Herramientas de Construcción se emplea, de Arcos y Sectores, el ícono **Semicircunferencia dados Dos Puntos**. Los puntos medios encontrados en los segmentos serán los extremos de las semicircunferencias. Sabiendo esto, las semicircunferencias serán graficadas de la siguiente manera:

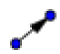
- *Modo 1:* El punto medio del segmento[A,C] será el Extremo1 de la semicircunferencia, por lo tanto al graficar este arco quedará dibujado fuera del triángulo. El Extremo2 estará ubicado en el punto C.
- *Modo 2:* Si al graficar la semicircunferencia, el punto C se hubiese tomado como Extremo1 y el punto medio del segmento[A,C] como Extremo2, entonces éste arco estaría dibujado dentro del triángulo.

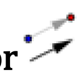
Para graficar la primera semicircunferencia se puede comenzar empleando cualquiera de los dos *Modos* anteriores. Si se empieza con el *Modo1*, el siguiente paso es usar *Modo2*, seguido luego del *Modo1, Modo2*, etc.; o hacerlo al contrario, comenzando con *Modo2*, luego *Modo 1*, etc... De tal manera que el triángulo tendrá dibujadas seis semicircunferencias alternadas (tres de ellas en el interior del polígono1 y las otras tres fuera de él).

Se construye una recta *i* paralela al segmento[A,B] que pase por C, para esto se usa de Recta y sus Herramientas, el ícono **Recta Paralela**  y se selecciona el punto C y el segmento[A,B].

Se dibuja una recta *j* perpendicular al segmento[A,B] empleando de Rectas y sus Herramientas, el ícono **Recta Perpendicular**  , se selecciona el punto A y el segmento[A,B]. Se repite este procedimiento usando el punto B (la recta construida es denominada *k*).

Ahora bien, se utiliza de Herramientas de Puntos, el ícono **Intersección de Dos Objetos** **,** para intersecar las rectas anteriormente construidas (*i* y *j*), teniendo presente que, al situar con el mouse los objetos a intersecar, estos deben estar sombreados, y se hace clic, lo que permite dibujar la intersección en un punto llamado G. Se repite de la misma manera para la recta k que pasa por el punto B (el punto de intersección es denominado H).

Mediante las Herramientas de Vectores, se emplea el ícono **Vector entre Dos Puntos**  para dibujar dos vectores[9] **u** y **v**, donde el origen de ellos sea el punto G y el extremo de uno de los dos vectores sea el punto H y el extremo del otro vector sea el PuntoMedio entre el segmento[A,B].

De la barra de herramientas, Transformaciones Geométricas, se emplea el ícono denominado **Traslada Objeto por un Vector** **,** se selecciona el objeto, se escoge el vector **u** ó **v** y se traslada el objeto hacia donde va dirigido el vector que se haya escogido. De la misma forma se repite el procedimiento con el otro vector.

Los objetos resultantes de las traslaciones representan las teselas del plano; el método anterior se repite las veces que se

[9] *Para la construcción de este teselado los vectores **u** y **v** se pueden dibujar tomando como origen el punto A, y como extremo del vector **u** (punto final del vector) el punto C, y para el vector **v** el punto B como punto final. Hágase referencia en la construcción del teselado del ítem 5.2.*

requiera para cubrir el plano, de manera que se trasladan las teselas mediante los vectores **u** y **v**.

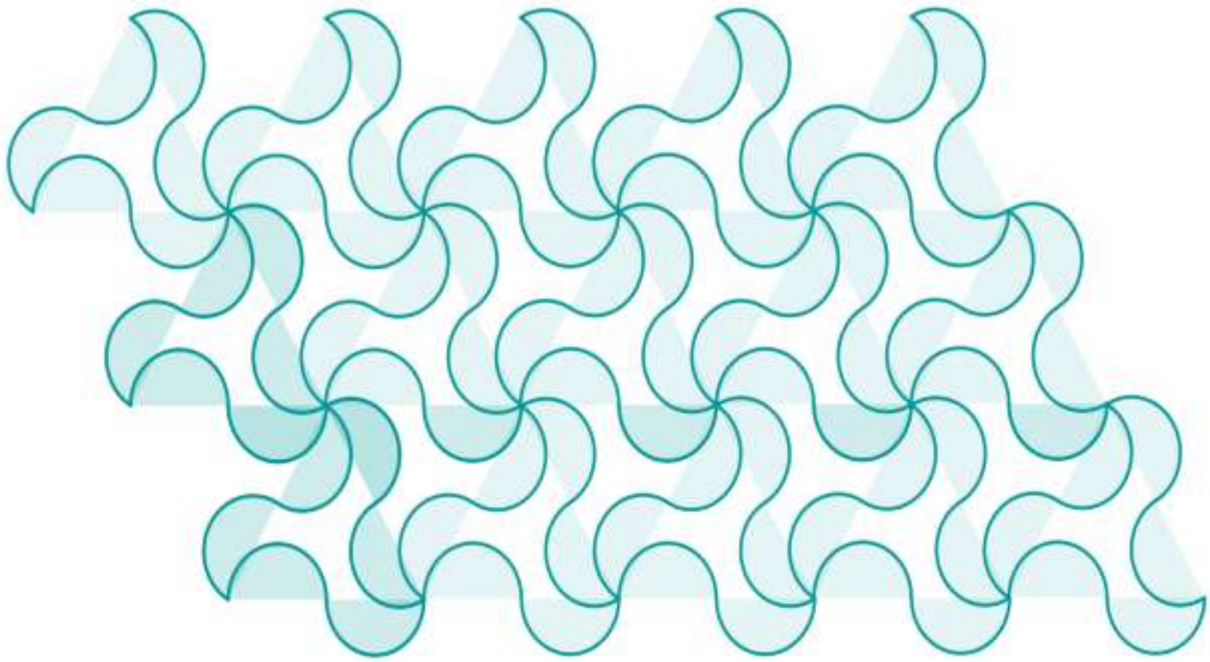
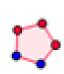
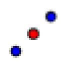
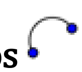


Figura 47: Construcción Final de Teselado Pajarita Nazarí

5.5.- Construcción de Teselado a partir de un Hexágono

En zona gráfica se construye un hexágono, usando el ícono **Polígono Regular**  ubicado en la barra de herramientas. Para ello se determinan dos puntos A y B cualesquiera. Sobre el segmento[A,B] estará construido el polígono1[A,B,C,D,E,F]. Los segmentos del triángulo estarán dados como segmento[A,B], segmento[B,C], segmento[CD], segmento[DE], segmento[E,F], segmento[F,A] del polígono1[A,B,C,D,E,F].

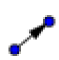
A cada segmento del polígono1 se le encuentra su punto medio usando, de las Herramientas de Puntos, el ícono **Punto Medio o Centro** , para esto se selecciona el segmento y de esta manera se grafica el punto medio del segmento seleccionado. De igual forma se realiza el mismo procedimiento para los segmentos restantes.

De las Herramientas de Construcción se emplea, de Arcos y Sectores, el ícono **Semicircunferencia dados Dos Puntos** . Los puntos medios encontrados en los segmentos serán los extremos de las semicircunferencias. Sabiendo esto, las semicircunferencias serán graficadas de la siguiente manera:

- *Modo 1:* El punto medio del segmento[A,B] será el Extremo1 de la semicircunferencia, por lo tanto al graficar este arco quedará dibujado fuera del polígono. El Extremo2 estará ubicado en el punto B.

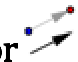
- *Modo 2:* Si al graficar la semicircunferencia, el punto B se hubiese tomado como Extremo1 y el punto medio del segmento[A,B] como Extremo2, entonces éste arco estaría dibujado dentro del polígono.

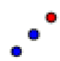
Para graficar la primera semicircunferencia se puede comenzar empleando cualquiera de los dos *Modos (Modo1 o Modo2).* Si se empieza con el *Modo1*, el siguiente paso es usar *Modo2*, seguido luego del *Modo1, Modo2*, etc. o hacerlo al contrario. De tal manera que el polígono tendrá dibujadas doce semicircunferencias alternadas (seis de ellas en el interior del polígono1 y las otras seis fuera de él).

De Herramientas de Vectores, se emplea el ícono **Vector entre Dos Puntos**  para construir tres vectores (**u**, **v** y **w**), donde el punto inicial del vector **u** es el punto medio del segmento[A,F] y el punto final es punto medio del segmento[C,D]; para el vector **v**, el punto inicial estará dado por el punto medio del segmento[B,C] y el punto final será el punto medio del segmento[E,F]; en caso del vector **w**, el punto inicial quedará determinado por el punto medio del segmento[A,B] y el punto final será el punto medio del segmento[D,E] (cada punto final indica el sentido del vector).

En la Barra de Entrada se escribe el comando **PuntoMedio [,]** y entre corchetes la notación arrojada por el programa del punto inicial y final de cualquiera de los vectores (**u**, **v** y **w**), éste será el punto de intersección de los vectores **u**, **v** y **w.**

Aún cuando la construcción actual es relativamente sencilla, como antes se ocultarán todos los rótulos de cada uno de los objetos. Para ello se emplea del Menú, Herramientas Generales, el ícono Elige y Mueve  , se selecciona toda la construcción (Ctrl+A), clic derecho; de esta forma se muestra la ventana de *Propiedades* del programa y en la pestaña *Básico,* se hace clic en la *Casilla de Control Muestra Rótulos* para ocultarlos (ya que ésta se encuentra elegida automáticamente).

Se ha construido la prototesela y los requerimientos para proceder a teselar. Ahora bien, de Transformaciones Geométricas se emplea el ícono **Traslada Objeto por un Vector**  **,** se selecciona la prototesela y en principio se hace clic en cualquiera de los vectores graficados. De la misma forma se repite el procedimiento con los dos vectores restantes.

Para completar el teselado, se copia el objeto resultante de la primera traslación realizada por el vector correspondiente y se emplea del Menú, Transformaciones Geométricas, el ícono **Refleja Objeto por Punto**  y se selecciona el punto de intersección de los vectores lo cual permite reflejar el objeto. Seguidamente se repite el mismo procedimiento para los otros objetos restantes.

Si se desea seguir reflejando y/o trasladando teselas se toma en cuenta que los patrones a copiar serán los resultantes de los primeros y así sucesivamente.

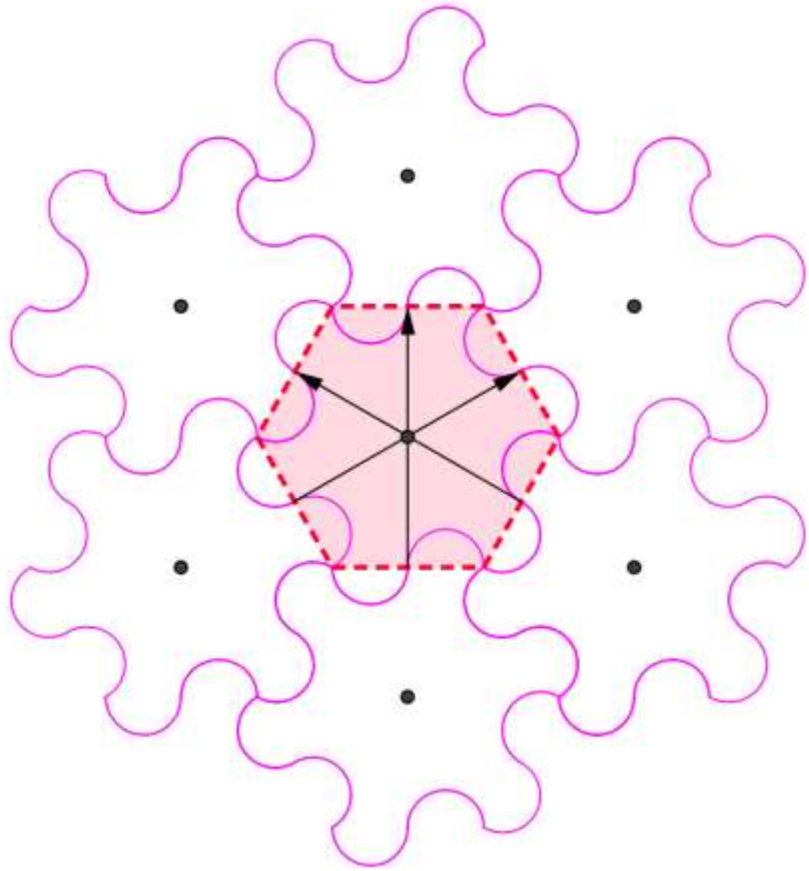


Figura 48: Construcción Final de Teselado a partir de un Hexágono

CAPÍTULO VI

Manual para construir Teselados Escherianos usando el GeoGebra

6.1.- Consideraciones Generales.

Este manual está destinado a todos aquellos estudiantes de bachillerato que se interesen en "realizar" bosquejos de algunas Obras de Escher empleando el GeoGebra. Su contenido está orientado a presentar las instrucciones a seguir para la construcción de bocetos de *Teselados Escherianos,* haciendo referencia a las indicaciones y sugerencias ofrecidas por la *Guía* expuesta en el capítulo anterior.

Cabe resaltar, que en caso de usar algún ícono cuyo uso haya sido detallado anteriormente, en esta oportunidad sólo se mencionará su aplicación directa. Si por el contrario, es necesario utilizar un ícono o comando que no fue empleado anteriormente, se realizará su respectiva explicación de manera meticulosa. Al final de las instrucciones se muestra la ilustración de la construcción del Teselado de Escher ya finalizado[10]. Consideramos prudente aclarar, que el manual posee las instrucciones de una de las *distintas opciones* que existen para abordar este tipo de

[10] *Por medio del CD anexo el usuario podrá acceder a los ejemplos de los Teselados de Escher construidos usando el manual.*

construcción usando el GeoGebra. Queda a disposición del usuario encontrar otra(s) alternativa(s) que genere(n) el mismo resultado.

6.2.- Construcción de Teselado Reptiles de Escher

Se sugiere emplear del Menú Vista la opción **Cuadrícula** y mostrar los **Ejes Coordenados** en la Vista Gráfica. Ahora bien, se construye un hexágono regular usando de la barra de herramientas Polígono el ícono, **Polígono Regular** .

Luego, empleando el ícono **Polígono** , se dibujan tres figuras[11] como las que se muestran en el ejemplo de la **figura 49.**

[11] *El punto K del polígono[H,I,J,K,A,H] debe estar sobre la recta que contiene al segmento[A,B], en nuestro caso se usó el Eje X.*

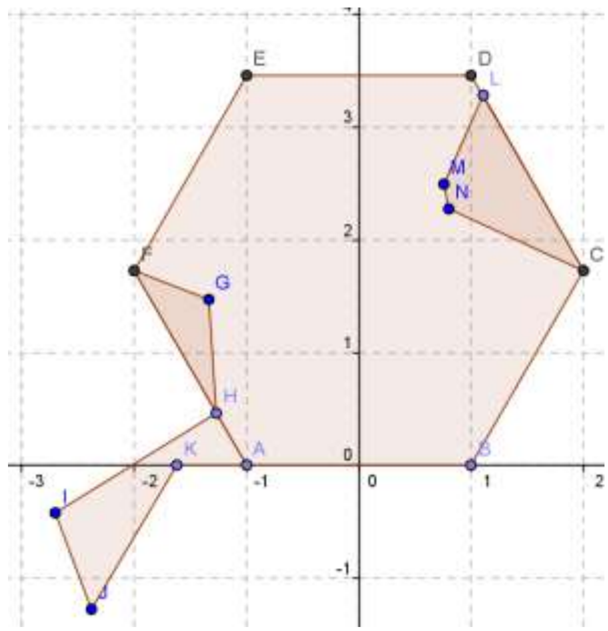
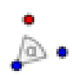


Figura 49: Ejemplo de los polígonos

Se selecciona el polígono[C,L,M,N,C] (o el correspondiente en su caso…)y mediante el ícono, **Rota Objeto en torno a un Punto, el Ángulo indicado** **,** se gira 120^0 en torno a C en *Sentido Antihorario.* Se elige el polígono[H,I,J,K,A,H], tomando al punto A como centro de rotación para rotarlo 240^0 en *Sentido Antihorario*. Se elige el polígono[F,G,H,F] y se gira 240^0 en *Sentido Antihorario* en torno a G. Los objetos resultantes (los polígonos rotados) se muestran en el ejemplo de la **figura 50.**

Atención: “Es oportuno ocultar algunos rótulos de los puntos empleando *La Caja de Diálogo Propiedades*, en caso de que estén expuestas las etiquetas de los segmentos, también se deberán ocultar; a excepción de los rótulos de los vértices del hexágono regular y también el de los polígonos resultantes de las rotaciones, ya que sirven de identificación para instrucciones posteriores en la construcción del teselado”.

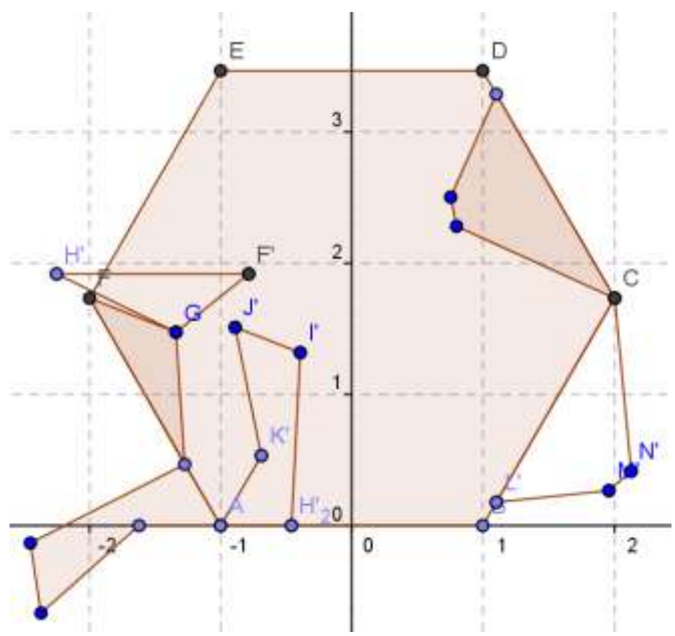


Figura 50: Ejemplo de los polígonos rotados

Compare la figura anterior y la presentada, observe que no son idénticamente iguales, esto es porque los puntos se pueden mover a disposición del usuario. Tome como ejemplo la ubicación de los polígonos rotados que muestra la **figura 50.**

Se dibuja un vector **u** que esté contenido en el hexágono regular, en el que su extremo inicial sea el punto E y el final sea un punto O cualquiera que esté dentro del hexágono regular. Este vector se dibuja con la finalidad de luego trasladar el polígono[F',G,H',F'] resultante de la rotación.

Atención: "El segmento[H"$_2$,S] del polígono trasladado debe estar contenido en el segmento[A,B] y el punto B debe coincidir con el punto S. En caso de que no coincidan dichos puntos, el extremo O del vector **u** debe moverse hasta que se obtenga tal coincidencia (observe la **figura 51**). Para una mejor visibilidad y exactitud al realizar éste procedimiento, se recomienda aumentar el *Zoom de Acercamiento* de la Vista Gráfica.

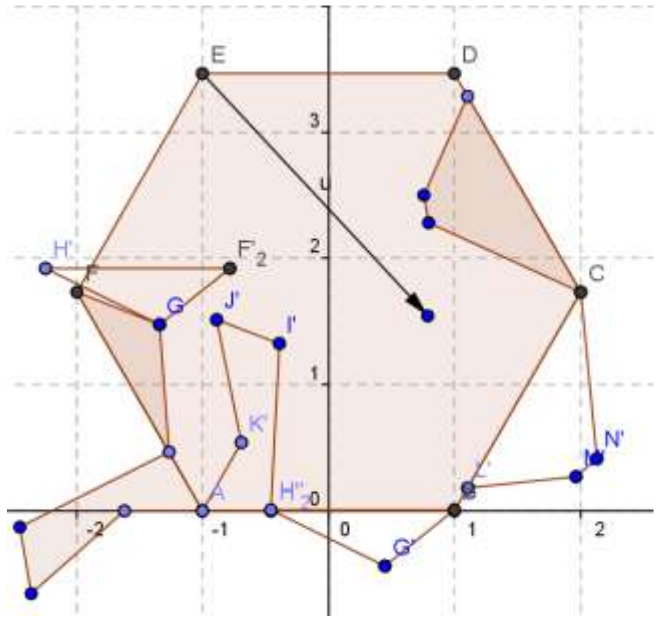


Figura 51: Vector 'u' y traslación del polígono[F',G,H',F']

Se dibuja una recta t que pase por el segmento[F,A] del hexágono regular, luego se grafica un punto V que pertenezca a la recta t para en seguida construir el polígono[V,W,Z,A_1,F,V]. Observar la **figura 52.**

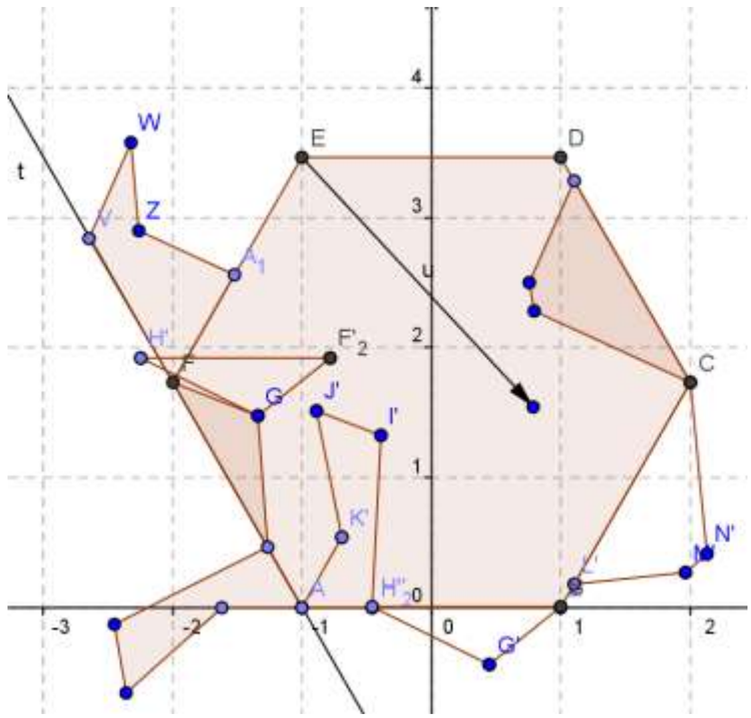


Figura 52: Ejemplo de recta t y polígono[V,W,Z,A_1,F,V]

El polígono recientemente dibujado se gira 120^0 en torno al punto F con *Sentido Antihorario*. Se dibuja un vector **w** para trasladar el polígono que se acaba de rotar (**w** debe tener su punto de origen fuera del hexágono regular y el punto final dentro de él, ver **figura 53**). El segmento[B_1,F'_4] de la figura trasladada debe pertenecer al segmento[E,D] y el punto D debe coincidir con el punto

F'4, en caso de que no ser así, tome en cuenta lo citado en "Atención" de la **pág. 3**.

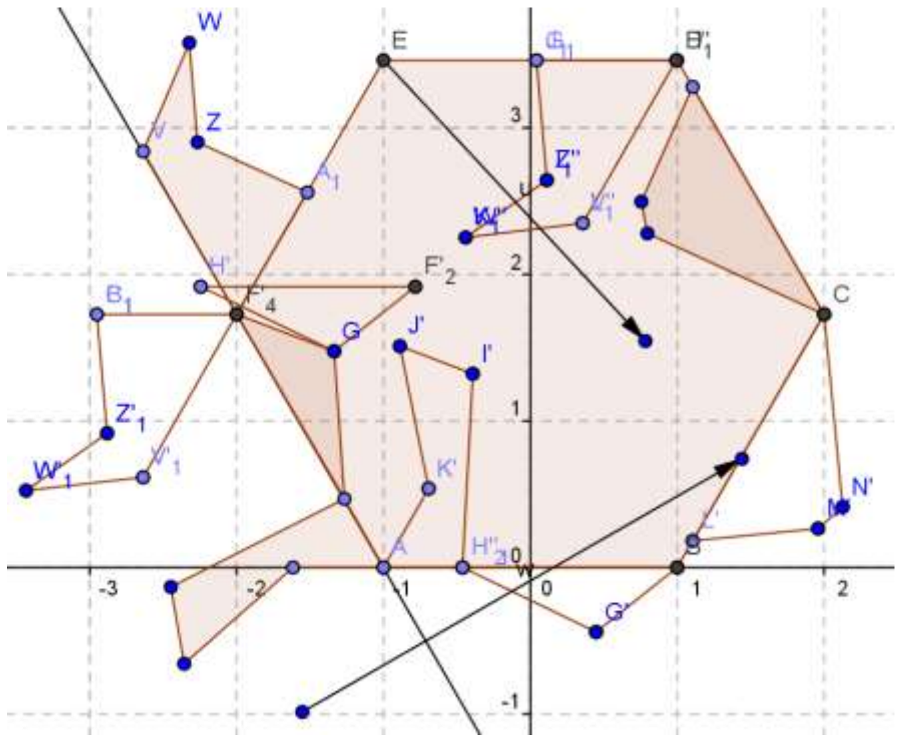


Figura 53: Polígono trasladado por el vector w

Se dibuja un polígono, tal como se muestra en la **figura 54**. Observe que el punto A_1 y E deben ser vértices del polígono a construir. Luego se rota 120^0 con *Sentido Antihorario* tomándose como centro de rotación el punto E.

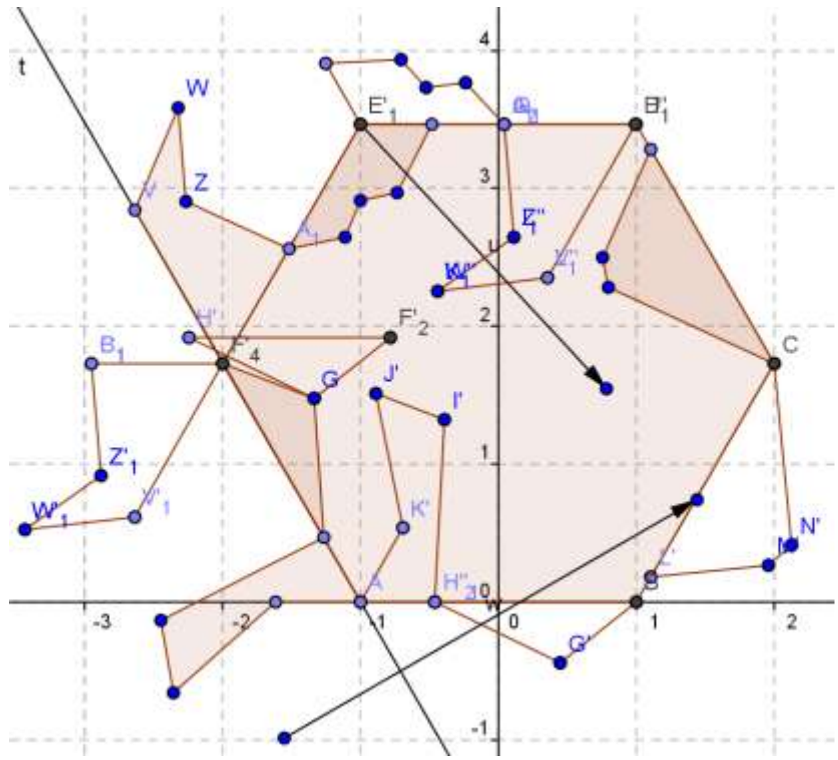
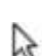


Figura 54: Rotación a 120° del polígono construido

Se grafica una recta *s* que pase por el segmento[E,D] del hexágono regular. Luego se grafica un polígono[D,C_2,D_2,E_2,F_2,L,D]. El punto C_2 debe pertenecer a la recta *s*, en caso de que no lo contenga, se usa el ícono **Elige y Mueve**  **,** para mover dicho punto hasta *s*. Tome como modelo la **figura 55** mostrada a continuación:

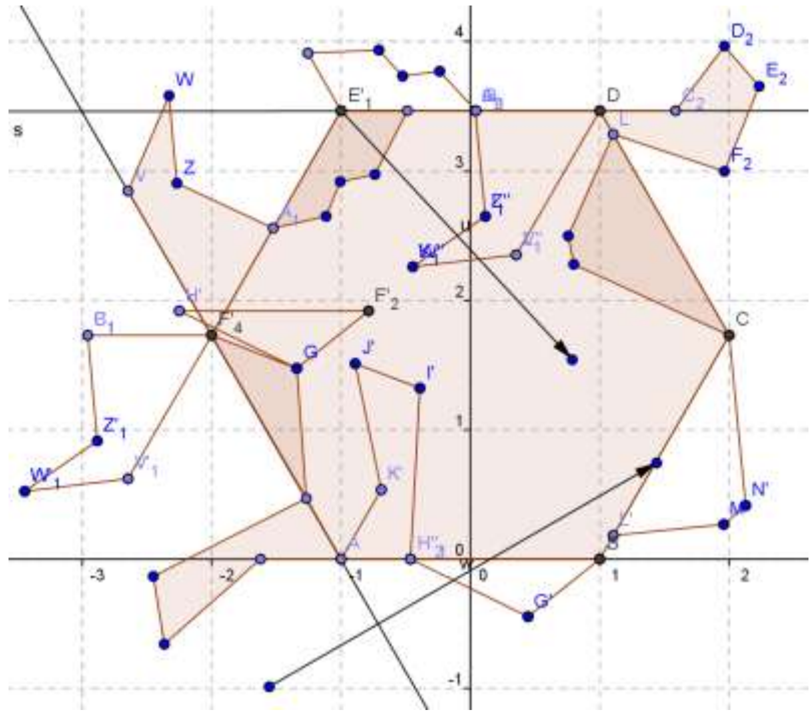


Figura 55: Polígono[D,C_2,D_2,E_2,F_2,L,D]

El polígono[D,C_2,D_2,E_2,F_2,L,D] se gira 120º con *Sentido Antihorario*, tomando el punto E_2, centro de rotación. Se grafica un vector **v** donde su origen sea el punto D y su extremo final sea un punto que esté contenido en el hexágono regular. Se traslada el polígono[D,C_2,D_2,E_2,F_2,L,D] usando el vector **v**. La figura trasladada debe “encajar” exactamente en el trozo de segmento[B,L'_2] que pertenece al segmento[B,C], como se observa en la **figura 56** [12].

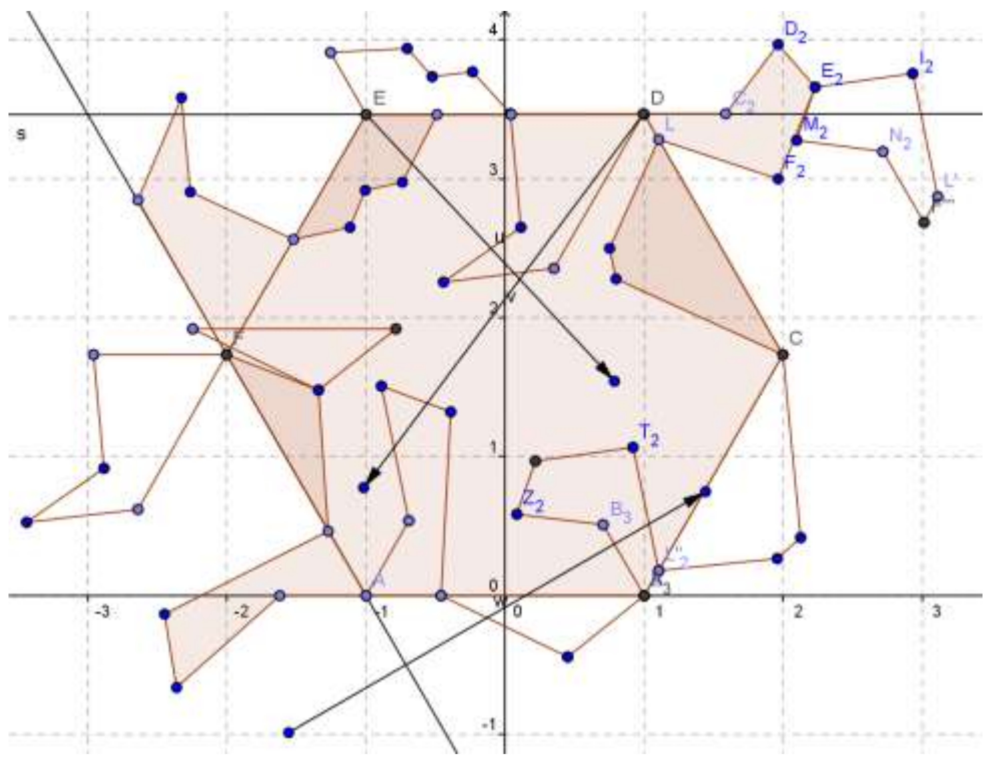


Figura 56: Polígono[D,P,Q,R,S,K,D] rotado y trasladado

[12] *Observe que gran parte de la figura ya no está rotulada (los objetos que aún siguen etiquetados fueron los que se emplearon para guiar al usuario al momento de realizar las respectivas isometrías). Después de hacer este procedimiento es oportuno que el usuario los oculte.*

Se ocultan las rectas, los vectores y los rótulos de los objetos que aún siguen etiquetados, también se ocultan los polígonos que se usaron para efectuar las traslaciones; esto se realiza para despejar la construcción del *Reptil*[13], tal como se muestra en la **figura 57.**

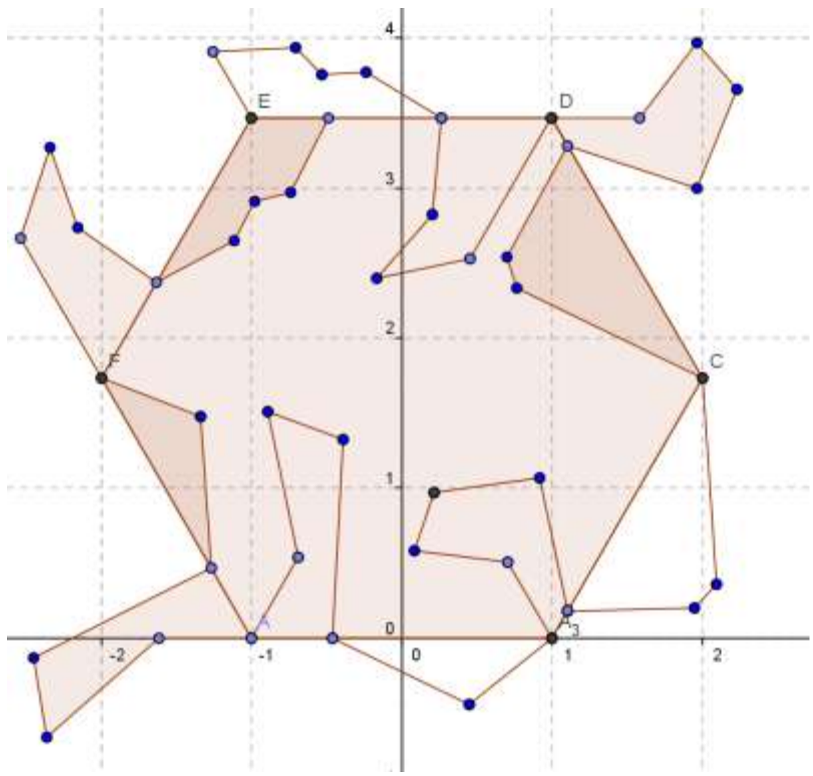


Figura 57: Objetos con rótulos ocultos. Reptil

[13] *El GeoGebra por medio del ícono* ***Elige y Mueve*** *tiene la opción de mover los puntos que dan forma al Reptil construido. El argumento es simple, tener una aproximación a la imagen real de la Obra de Escher.*

Se rota la figura del *Reptil* 120⁰ en torno al punto C, con *Sentido Antihorario*. Luego se vuelve a rotar, pero 240⁰ usando el mismo *Sentido* y centro de giro. La imagen resultante se muestra en la **figura 58** [14]**.** La ilustración representa la *Prototesela* de la construcción.

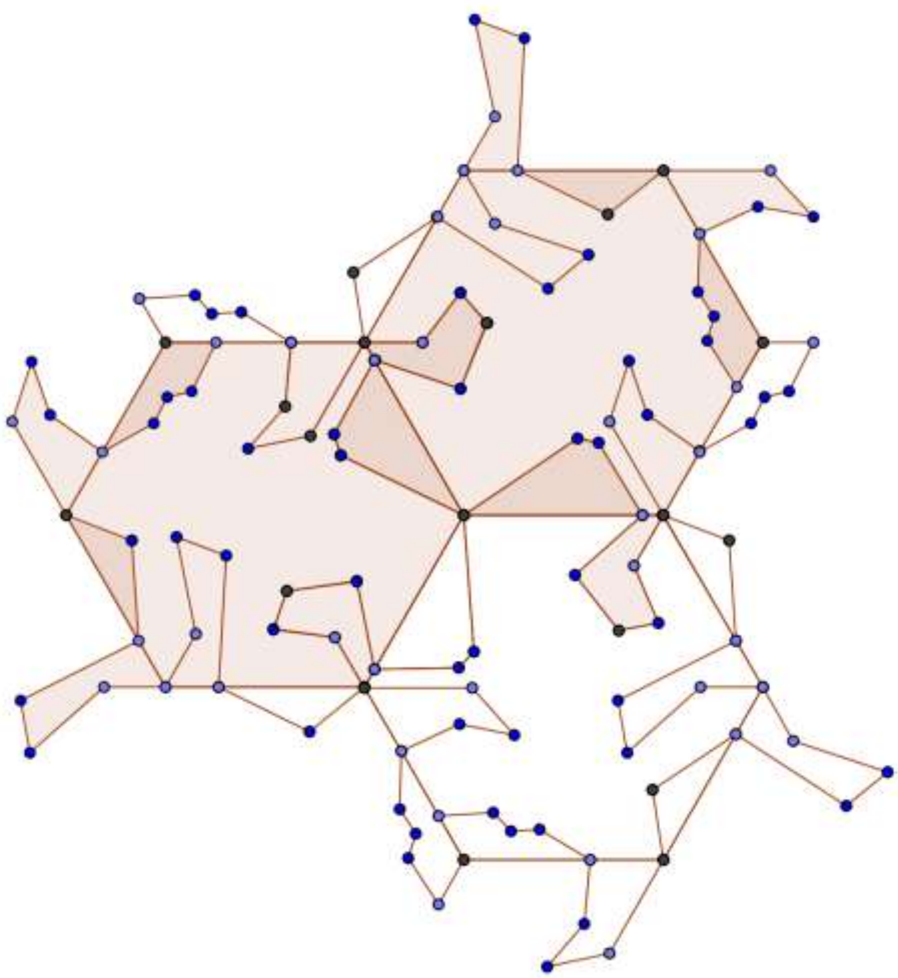


Figura 58: Prototesela de Reptiles de Escher

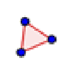
[14] *Se sugiere ocultar los Ejes Coordenados y la Vista Cuadrícula.*

6.2.1.- Procedimiento para colorear la Prototesela

Se recomienda que el color de los *Reptiles* sea diferente, esto es para generar tonalidades distintas y llamativas en la construcción final del *Teselado.*

Se usa *La Caja de Diálogo Propiedades* para "pintar" la silueta del *Reptil*, primero se debe colorear cada segmento que forma la figura, teniendo presente que la silueta sea de color blanco, para facilitar la instrucción siguiente.

Atención: "No se debe emplear la opción *Borra* puesto que si se elige, entonces el objeto dependiente (figura que forma parte del Reptil), también se borrará".

Es necesario que la silueta del *Reptil* sea un *Polígono,* para poderla colorear, por lo tanto, se emplea el ícono **Polígono** **,** y se dibuja la figura del *Reptil* sobre los segmentos "pintados" anteriormente, luego se usa *La Caja de Diálogo de Propiedades*, opción *Color*, y se elige el tono que se prefiera para la figura.

La **figura 59** muestra un ejemplo del resultado de los *Reptiles* coloreados.

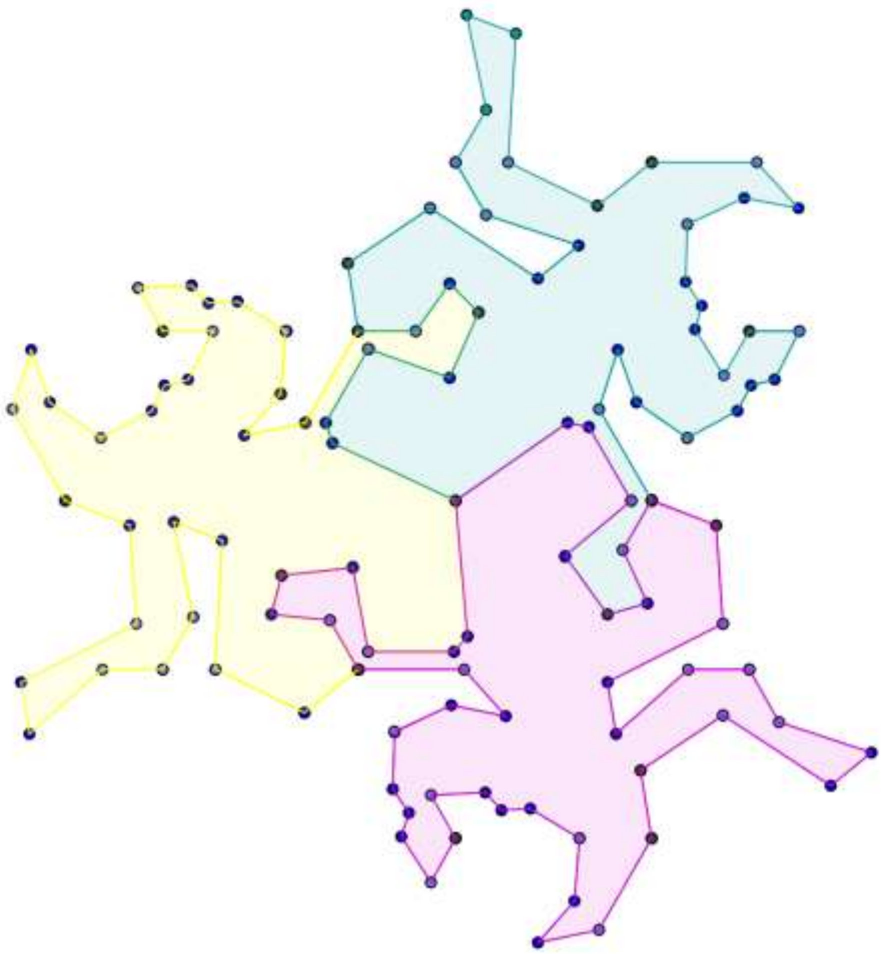


Figura 59: Prototesela de Reptiles coloreada

6.2.2.- Procedimiento para Teselar

Se cambia el color de la **Vista Gráfica**, haciendo clic derecho en ella, luego se hace clic en la opción Vista Gráfica y en la ventana emergente, se selecciona el color de fondo de preferiblemente claro, este procedimiento se realiza para visualizar el hexágono patrón de la figura.

Se selecciona la *Prototesela* y haciendo uso del ícono, **Rota Objeto en torno a un Punto, el Ángulo indicado ,** se gira 120^0 en *Sentido Antihorario* en torno al *punto* que señala la flecha de la **figura 60** [15].

Atención: "Después de rotada la *Prototesela,* se vuelven a colorear las siluetas de los *Reptiles* resultantes. Tome en cuenta lo mencionado en el cuarto párrafo del ítem 6.2.1, pág. 13".

[15] *La Vista Gráfica de la* ***figura 58*** *también muestra el color de fondo empleado para proceder a girar la Prototesela de los Reptiles.*

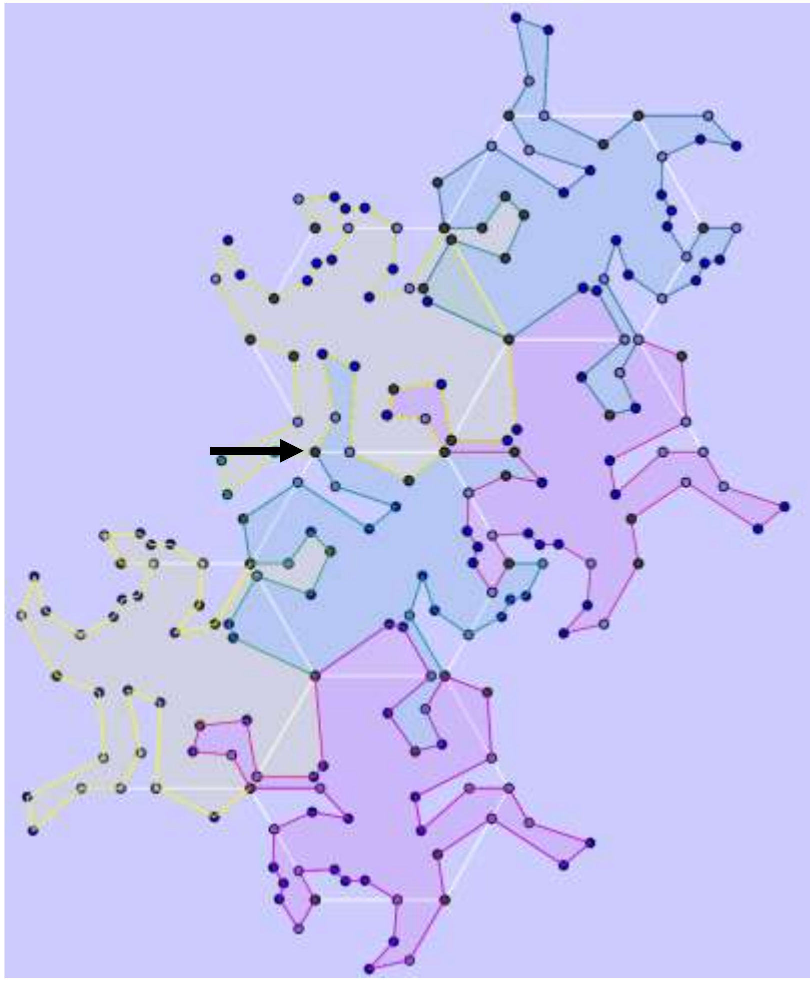


Figura 60: Prototesela rotada 120^{O} con Sentido Antihorario en torno al 'punto señalado'

Se selecciona la *Prototesela* y se rota 240^{0} en *Sentido Antihorario* en torno al *punto* que muestra la flecha en la **figura 61**.

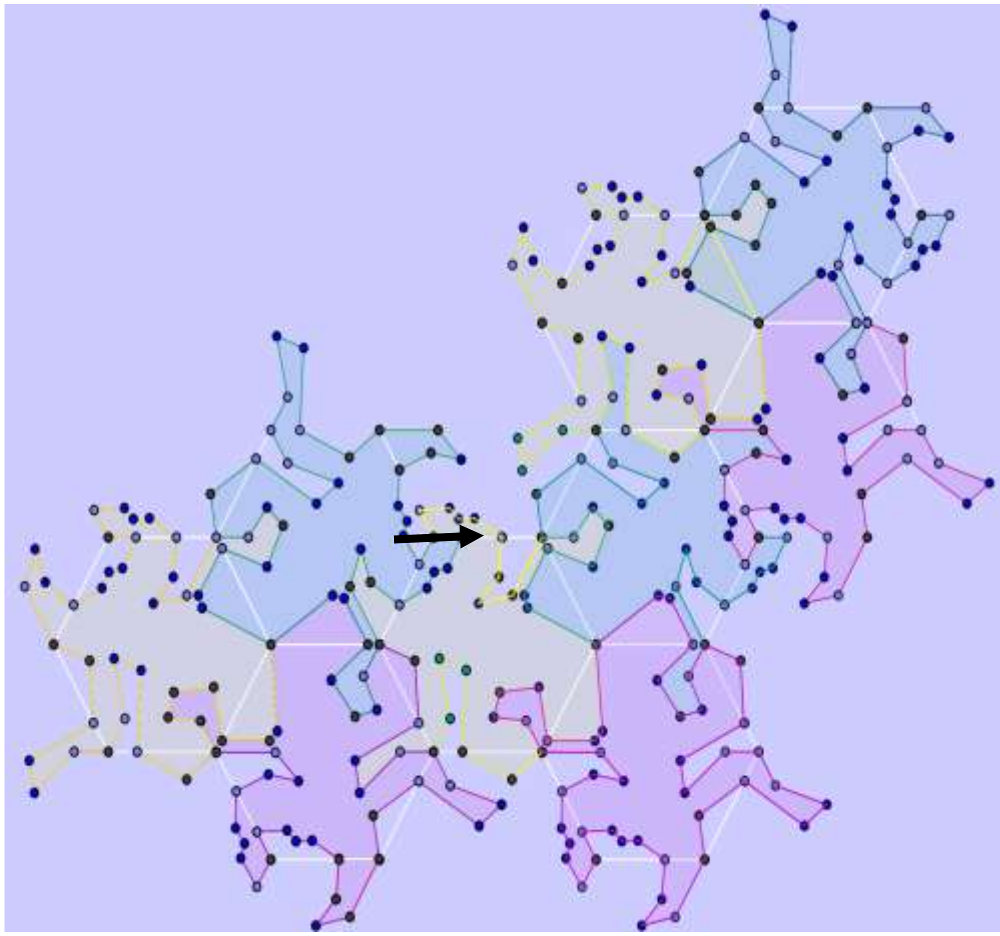


Figura 61: Prototesela rotada con Sentido Antihorario en torno al 'punto señalado'

Si el usuario dispone, puede volver a repetir el procedimiento anterior, elige la *Prototesela* y la rota 240^0 con *Sentido Antihorario*.

Atención: "Para obtener un *acabado delicado* en el Teselado, es apropiado ocultar todos los puntos u objetos reflejados en la construcción. El diseño resulta tal cual se observa en la **figura 62**".

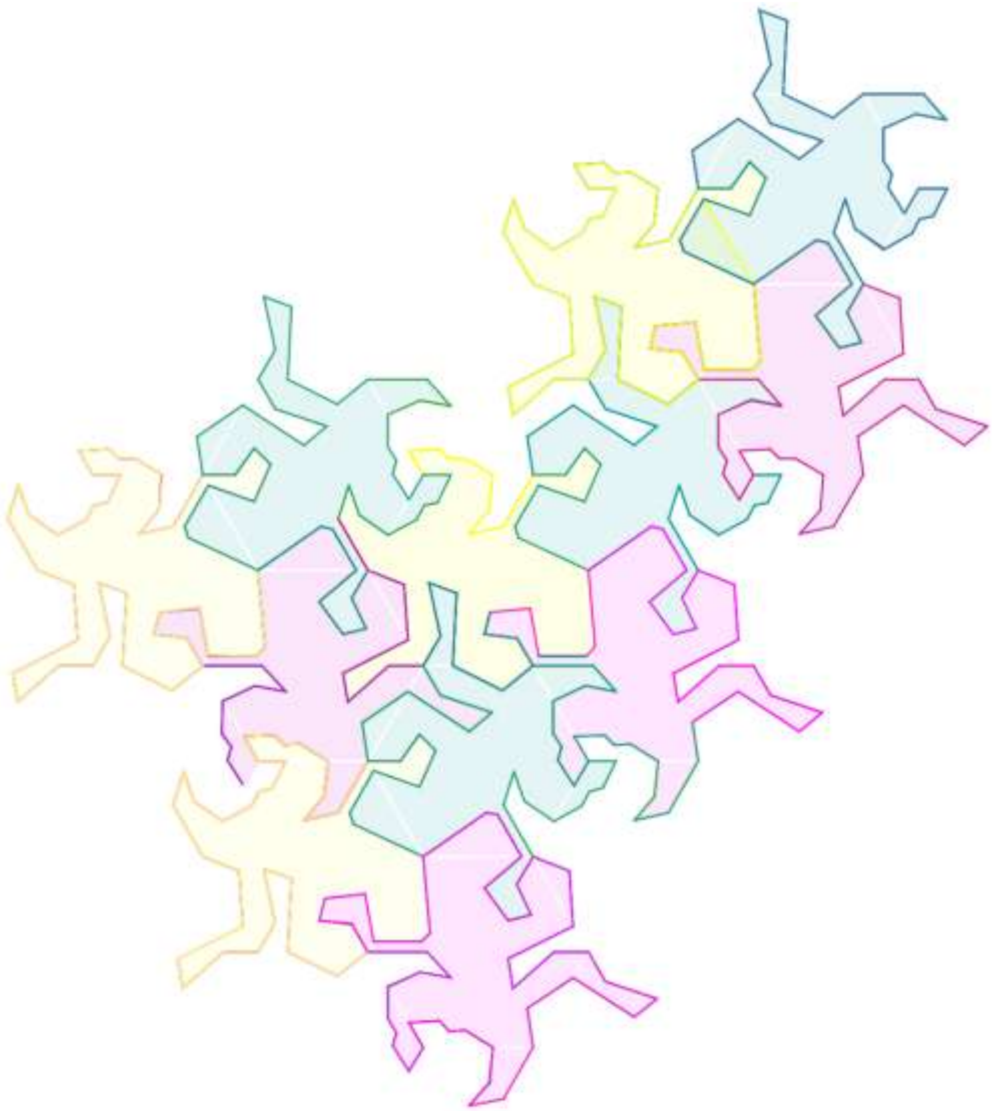
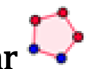
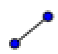


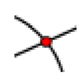
Figura 62: Construcción final de Teselado Reptiles

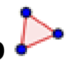
6.3.- Construcción de Teselado Pajaritas de Escher

Antes de comenzar a elaborar éste teselado, se oculta la Vista Algebraica y los Ejes Coordenados.

Se usa el ícono, **Polígono Regular** **,** para dibujar un hexágono regular. Al determinarse los puntos A y B la figura quedará denotada como polígono[A,B,C,D,E,F].

Ahora bien, de Herramientas de Segmentos, se emplea el ícono, **Segmento entre Dos Puntos** , y se traza un segmento con extremos [F,C]. Nuevamente se usa ése ícono y se dibuja un segmento con extremos en los puntos D y A (éste segmento es una de las diagonales del hexágono regular).

Luego se halla el punto de intersección entre los dos segmentos dibujados, usando el ícono **Intersección de Dos Objetos** , la intersección es un punto llamado G.

Se dibuja un triángulo con los puntos E, F y G, usando de la barra de herramientas el ícono **Polígono** . Dentro del triángulo construido se dibujan cuatro figuras como las mostradas en la **figura 63**(observe los polígonos que tienen tonalidad más oscura que el del hexágono)**.**

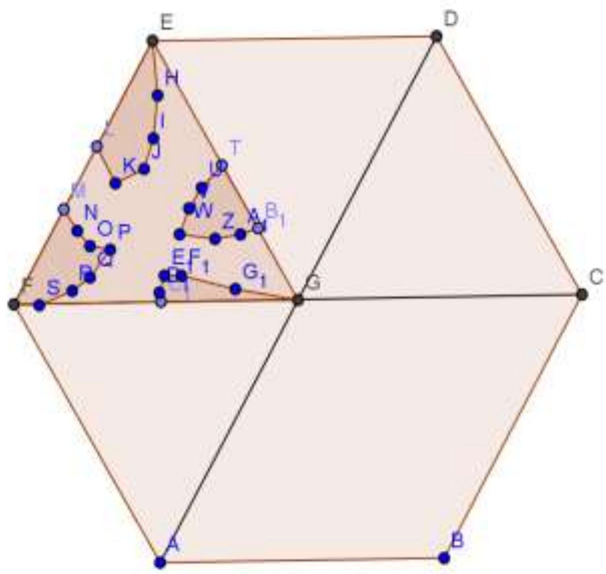


Figura 63: Cuatro polígonos dibujados dentro del triángulo

Se sugiere eliminar los rótulos de los segmentos del hexágono y del triángulo y queda como se muestra en la **figura 64.**

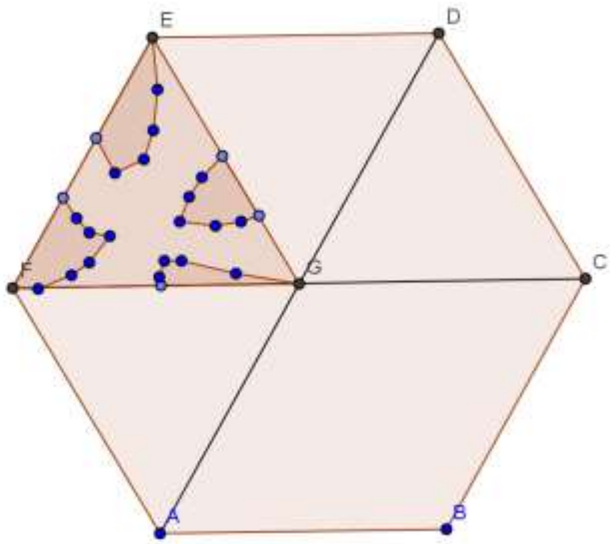


Figura 64: Polígonos construidos dentro del triángulo[E,F,G,E] sin rótulos

Se rota el triángulo[E,F,G] 60^{0} en *Sentido Antihorario* en torno a E, ésta operación moverá las figuras dibujadas que están dentro del triángulo.

Al rotarse estas figuras los puntos de los polígonos contenidos en el triángulo deben coincidir. En caso de que esto no suceda, se mueven los puntos de las figuras aquellas de las cuales se hizo la rotación, usando el ícono, **Elige y Mueve** , de modo que exista tal coincidencia. La figura debe resultar como la que se muestra en el gráfico siguiente:

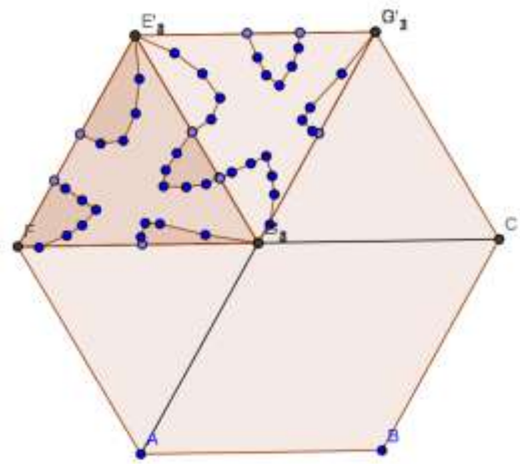


Figura 65: Triángulo[E,F,G] rotado 60^{O} en torno a E

Se selecciona tanto el triángulo[E,F,G] como la figura resultante de la rotación, para girarla 120^{0} en *Sentido Antihorario* y se toma como centro de giro al punto G. Observe la **figura 66.**

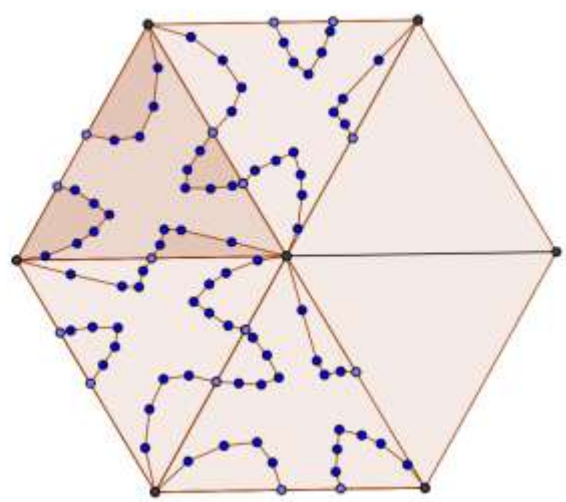


Figura 66: Polígonos rotados 120^{O} en *Sentido Antihorario* en torno a G

Luego se procede a girar 240º en *Sentido Antihorario* en torno a G, usando la misma figura que fue seleccionada para realizar la rotación anterior. La **figura 67** muestra el resultado del giro.

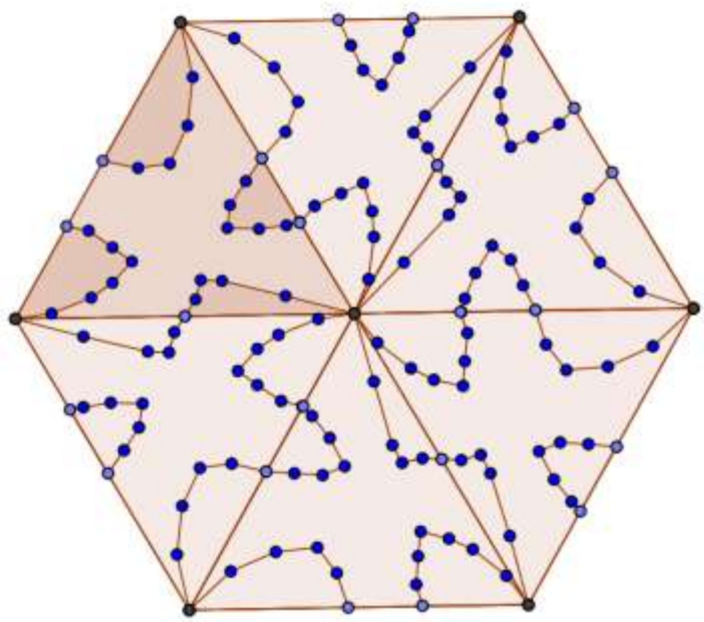


Figura 67: Polígonos rotados 240º en *Sentido Antihorario* en torno a G

La ilustración antes mostrada representa la *Prototesela* del Teselado. Se recomienda (por preferencia) ocultar los puntos usando *La Caja de Diálogo de Propiedades.* La **figura 68** muestra el ejemplo de este procedimiento.

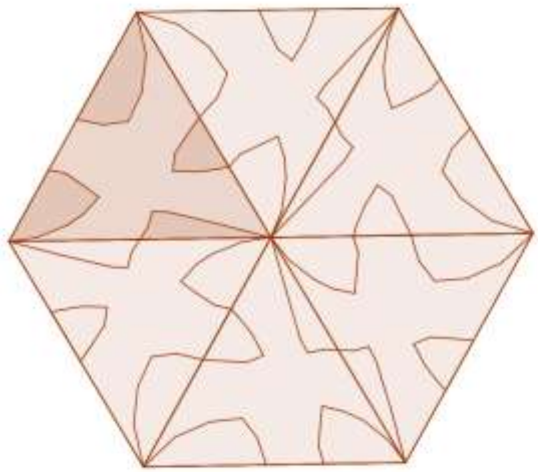
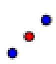
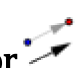


Figura 68: Prototesela del Teselado de las Pajaritas de Escher

Para el siguiente paso, se toma como referencia la construcción del ítem 5.5 pág. 70, es decir, se usa el ícono **Punto Medio o Centro** , para graficar los puntos medios de los segmentos que conforman al hexágono regular. En seguida (usando dichos puntos medios), se dibujan tres vectores (**u**, **v** y **w**) empleando el ícono **Vector entre Dos Puntos** . Luego se traslada la *Prototesela* utilizando el ícono **Traslada Objeto por un Vector** **.** Observar la **figura 67**, la cual ilustra las traslaciones de la *Prototesela* ejecutadas por los vectores **u**, **v** y **w.**

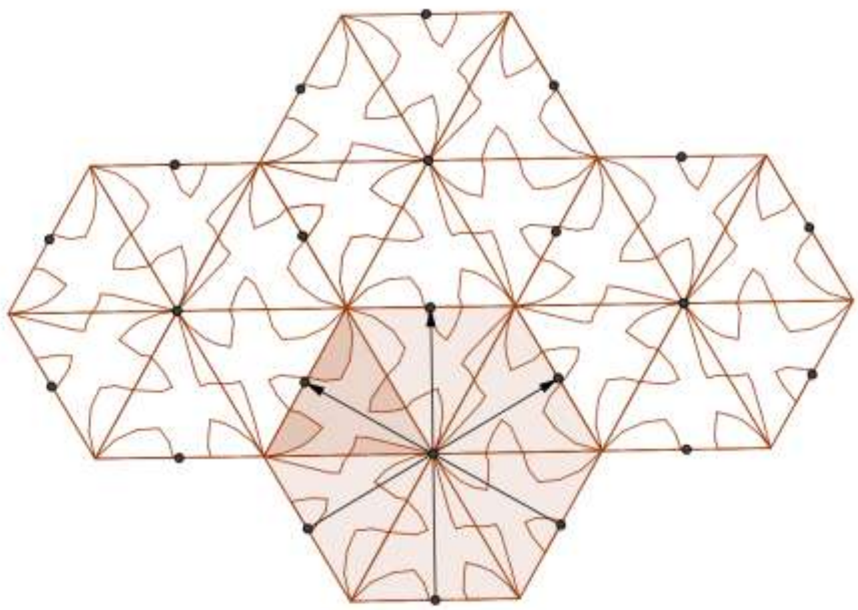


Figura 69: Prototesela trasladada mediante los vectores u, v y w.

Si se desea seguir trasladando el patrón (Prototesela) para dibujar más teselas, se toma en cuenta que los objetos a copiar serán los resultantes de los primeros y así sucesivamente. Observe la **figura 70.** La primera figura ilustra los patrones trasladados. En la segunda se empleó *La Caja de Diálogo Propiedades* para cambiar el color de la construcción.

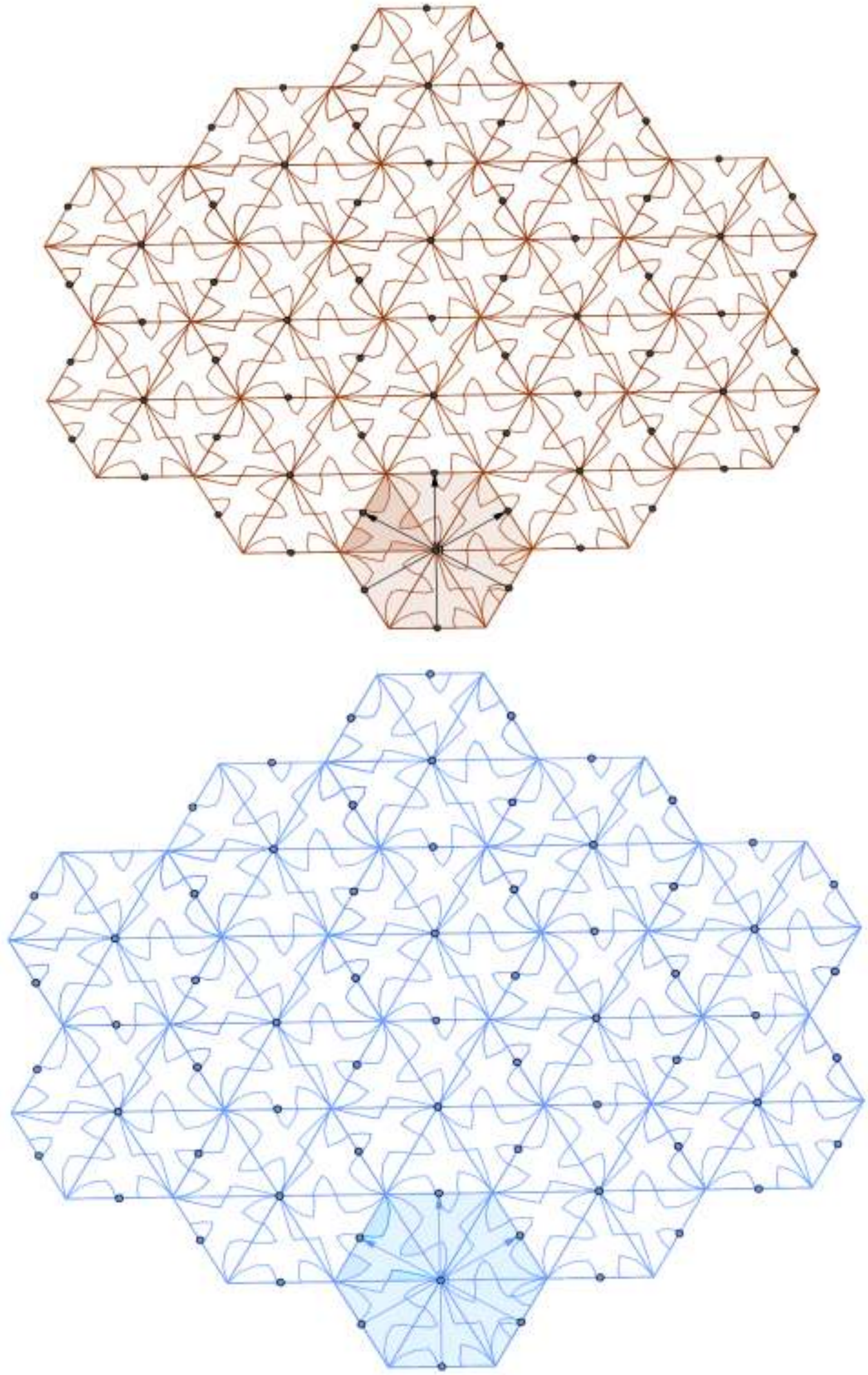
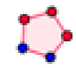
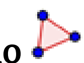


Figura 70: Construcción Final de Teselado Pajaritas de Escher

6.4.- Construcción de Teselado Patitas de Escher

Se dibuja un cuadrado usando el ícono **Polígono Regular** . Al igual que la construcción del ítem 6.3 se ocultan los Ejes coordenados y la Vista Algebraica. Se determinan los puntos A y B, la figura quedará denotada como polígono[A,B,C,D].

Usando el ícono **Polígono** , se dibujan en principio dos figuras como las mostradas en el gráfico a continuación[16]:

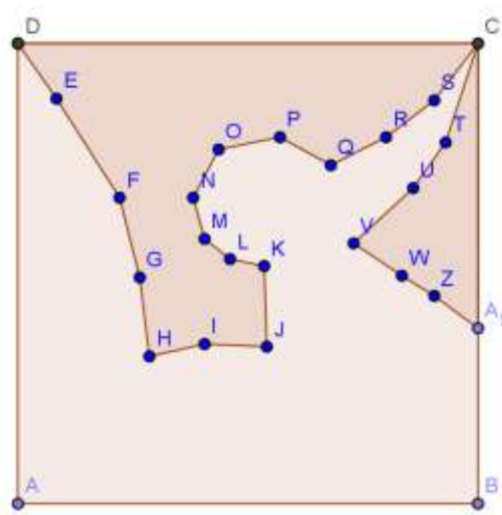


Figura 71: Modelo de los dos polígonos dibujados dentro del cuadrado

[16] *Los polígonos que se tomarán como modelo para realizar la construcción son los que están sombreados con la tonalidad más oscura que la del cuadrado.*

Ahora bien, de Recta y sus Herramientas, se emplea el ícono, **Recta Paralela** **,** para dibujar una recta *l* que sea paralela al segmento[A,B] y pase por el punto A_1.

Se usa el ícono **Intersección de Dos Objetos** **,** para encontrar el punto de intersección entre la recta *l* y el segmento[A,D]. La concurrencia de dichos objetos es un punto llamado B_1.

Se construye un polígono en la que el punto B_1 sea uno de los vértices de dicho polígono, tal como se muestra en la **figura 72.**

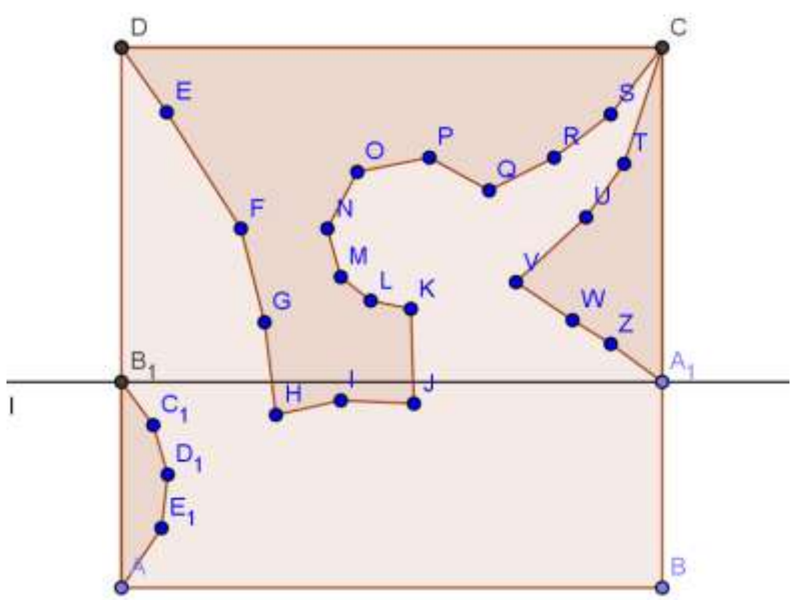


Figura 72: Recta l y polígono con vértice B_1

Se usa el ícono **Vector entre Dos Puntos**  , para dibujar tres vectores **u**, **v** y **w**, uno con dirección vertical y sentido hacia abajo, en la que su origen sea el punto C y su extremo final sea el punto B. Los vectores restantes deben tener dirección horizontal y deben ser opuestos, el extremo inicial de uno debe ser el punto B, y el final el punto A. Observe la **figura 73.**

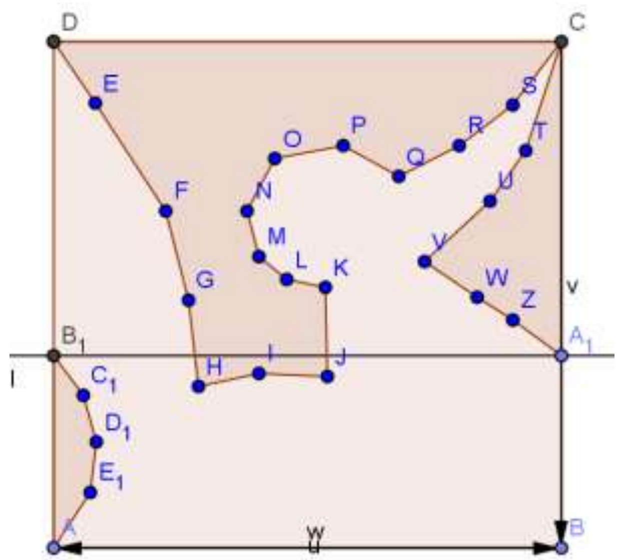


Figura 73: Vectores u, v, w

Se traslada el polígono[C,T,U,V,W,Z,A_1,C] usando el vector que está orientado hacia la *izquierda*. Seguidamente se traslada el polígono[B_1,C_1,D_1,E_1,A,B_1] usando el vector que tiene sentido hacia la *derecha.* Se usa el vector restante para trasladar el polígono[D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,C,D]. En la **figura 74** se ilustra el ejemplo[17] de las traslaciones usando los vectores **u**, **v** y **w y** se distingue la *Prototesela*.

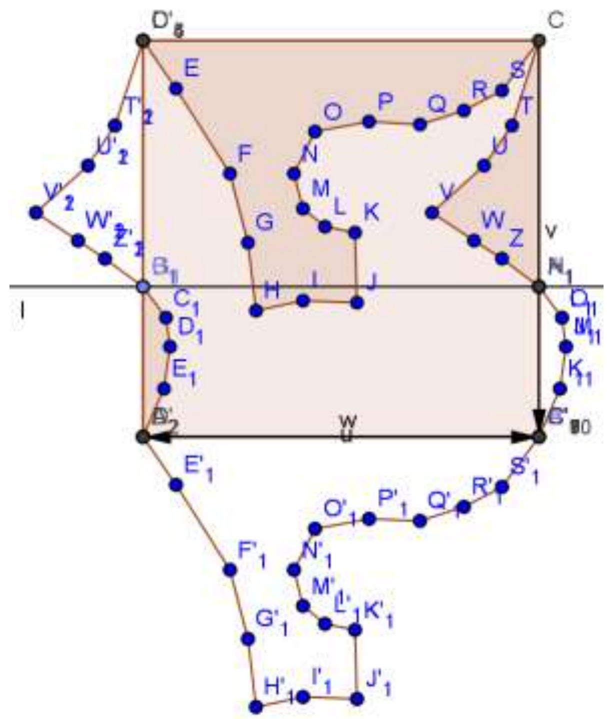


Figura 74: Objeto resultante de las traslaciones

Se oculta la recta *l* y todos los rótulos a excepción los vectores. La **figura 75** ilustra este procedimiento.

---

[17] *Tenga presente la observación realizada en el ítem 5.2 de la pág. 55 acerca de traslación de objetos.*

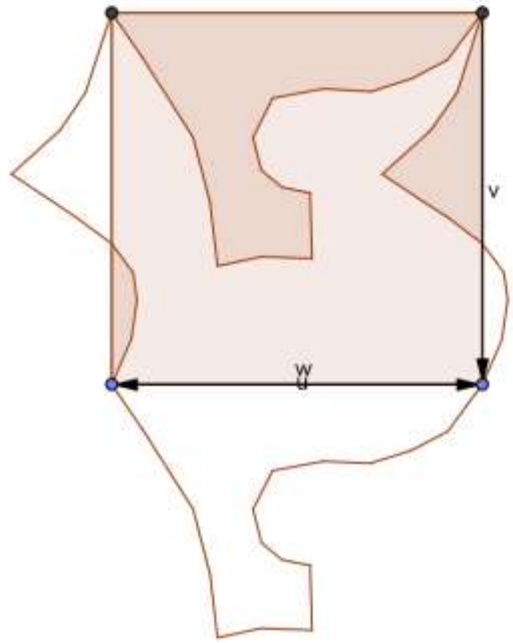


Figura 75: Prototesela de Teselado Patitas de Escher

Se comienza a teselar usando los vectores antes dibujados[18]. La construcción final se presenta en la **figura 76** de la página siguiente**.**

[18] *Si se desea cubrir el plano con más teselas, se dibuja un vector **z** opuesto al vector **v**.*

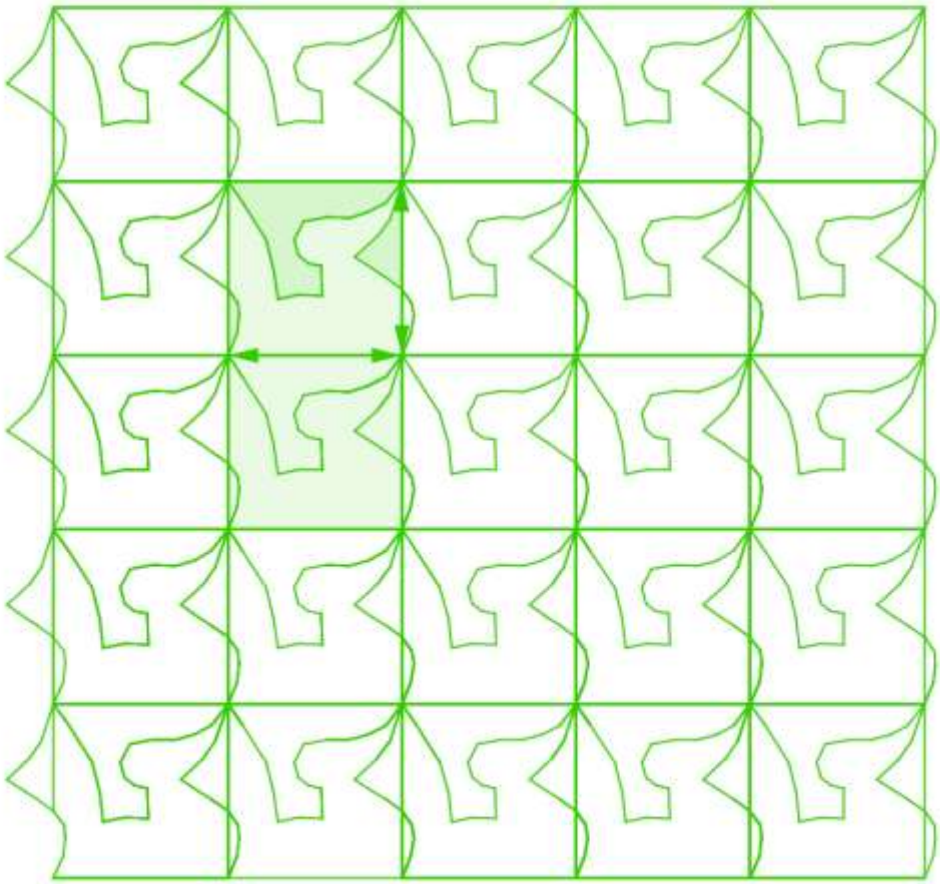


Figura 76: Construcción Final Teselado Patitas de Escher

6.5.- Consideraciones Finales

En caso de que se desee colorear los teselados (*Pajaritas y Patitas de Escher*) se procede a utilizar las instrucciones del ítem 6.2.1 de la pág. 13.

Cabe enfatizar por una parte, que el GeoGebra tiene la ventaja de revisar los pasos de la construcción al usar del Menú Vista la opción

Protocolo de la Construcción  , éste presenta paso a paso, todos y cada uno de los procedimientos ejecutados. Por otra, que a través del Menú Vista, se puede activar la opción denominada *Barra de Navegación*, ésta emerge en la parte inferior de la ventana de la Vista Gráfica del GeoGebra y permite efectuar todos los pasos que aparecen en el **Protocolo de la Construcción.**

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1.- Conclusiones

El propósito fundamental de este estudio se basó en diseñar un manual para la construcción de Teselados Escherianos empleando GeoGebra 3.2, el cual puede ser usado como una TIC para la enseñanza de la Geometría. Se concluyó afirmando que el estudio realizado con GeoGebra se convierte en una contribución importante para la buena utilización de las nuevas tecnologías, puesto que ayuda a estimular el interés en las Matemáticas, por su empleo como una de las herramientas tecnológicas que brinda actualmente nuestro 'mundo virtual'.

Por ello se asevera que al hacer 'buen uso' de los medios informáticos de los cuales se pueden disponer hoy en día, por ejemplo, los espacios de los Centros Bolivarianos de Informática y Telemática (CEBIT), no se corre el riesgo de ser desaprovechadas o inutilizadas estas aulas virtuales, por lo que no existe excusa alguna por parte de los docentes para no darle uso a estos recursos tecnológicos.

Finalmente, ésta ha sido una experiencia innovadora para la *muestra en cuestión* y se convirtió en un reto, puesto que construir teselados de Escher usando el GeoGebra no se percibía tarea 'fácil', pero sí bastante interesante; su culminación fue muy satisfactoria en todos los aspectos, y, es pertinente resaltar, que no se necesita ser un ‘experto’ en Matemáticas para realizar construcciones como las ejecutadas en este estudio; con empeño, constancia, dedicación y teniendo un ‘poco’ de perspicacia en los conocimientos adquiridos en Matemáticas se pueden realizar.

Cabe destacar que el GeoGebra se empleó dado el hecho de que cuenta con una interfaz muy clara y fácil de usar, por lo que el usuario no necesita un prolongado tiempo de interacción con él para aprender a utilizarlo.

Se debe tener presente, en primer lugar, que día a día nos encontramos en un mundo de tipo cada vez más virtual, comparado a lo que aún se observa y se vive dentro del sistema escolar, en donde prevalece notablemente la educación tradicional; por lo tanto, no debería desligarse el uso de las nuevas técnicas con la enseñanza de la Geometría, en segundo lugar, la educación como tal, en especial la de Matemáticas debería estar ligada y a la par, con todos estos cambios tecnológicos que acontecen en el mundo. La tecnología actualmente juega un papel muy importante en el aprendizaje de las Matemáticas, utilizarla para aprender, experimentar y *hacer* Matemáticas, podría permitir posibilitar un aprendizaje significativo.

Con esta investigación no se pretende hacer hincapié sobre el hecho de que al disponer de nuevas técnicas resolvería todos los problemas de la educación, pues las tecnologías son útiles pero no bastan, éstas son cada vez más una condición necesaria para la evolución educativa, pero no son una condición suficiente, lo que sí se quiere afirmar es que al emplear inteligentemente las nuevas técnicas en el ámbito educativo, serviría para mejorar nuestras prácticas pedagógicas, dejando claro que las TIC's generan nuevos escenarios didácticos para los estudiantes y que de esta manera las actividades pautadas resultan más amenas, creativas y dinámicas.

De acuerdo con esto, las TIC's valen como herramienta de apoyo a la práctica docente en la aplicación de actividades didácticas-interactivas y con fines realmente educativos, tomando siempre en cuenta, que somos nosotros quienes con dedicación y esfuerzo debemos cumplir y asumir el rol de educador, debido a la gran tarea que tenemos para lograr mediar y orientar a un aprendizaje contundente en nuestros alumnos.

7.2.- Recomendaciones

Conforme al estudio realizado, se considera necesario sugerir las siguientes recomendaciones dirigidas a los entes gubernamentales, instituciones educativas y comunidad universitaria en general:

- El Ministerio del Poder Popular para la Educación debería incentivar al “buen uso” de los equipos computacionales que corresponden a los Centros Bolivarianos de Informática y Telemática de las instituciones educativas del país, con el fin de motivar a los docentes a emplear de manera inteligente las TIC’s para sus prácticas en la enseñanza. Asimismo, las autoridades educativas deberían sondear periódicamente a los CEBIT para corroborar si los responsables de estos centros están cumpliendo a cabalidad con sus funciones.

- Integrar programas educativos en los que se incluya, por ejemplo, el GeoGebra en el área de Matemáticas, ya que es un tipo de software muy versátil al momento de que el usuario se acople a él, con la finalidad de que al aplicarse a las diversas actividades didácticas ya planificadas, cree un ambiente ameno y permita captar la atención e interés del estudiantado, para así promover su participación activa y propiciar un aprendizaje que sea meritorio de ese nombre.

- A quienes corresponda, en el Núcleo Universitario “Rafael Rangel” de La Universidad de Los Andes, deberían motivar al profesorado en general en la inclusión de actividades interactivas en su práctica docente, de modo que empleen las TIC’s como técnicas y recursos para la formación de aprendizajes.

- A quienes concierne dictar la materia Introducción a la Informática de la Carrera Educación, deberían, por ejemplo, desarrollar un estudio profundo de al menos un software afín al área específica de estudios, para que así exista una mejor formación tecnológica en los futuros egresados, puesto que la ‘mayoría’ de los estudiantes ya poseen el dominio sobre los principios básicos de la computación, los cuales son los temas dictados actualmente en esta asignatura.

- Conviene, por ejemplo, que el Taller de Matemáticas de la Carrera Educación, Mención Matemáticas y Física, que corresponde al 8vo. Semestre de éste plan, incluya el estudio de programas para *hacer* Matemáticas, ya que esto serviría, en parte, de base para un tipo de *ejercicio moderno* de su profesión en el cual se utilicen fehacientemente las más recientes técnicas informáticas, y de esta manera, los egresados estarían más capacitados para enfrentar las distintas situaciones de cambios educativos y tecnológicos por venir.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexandrov, A. (2002): *En Geometría. Matemática y Escuela*. UNESCO. (Volumen 5). pág. 127. México.

Ausubel, D. (1976): *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Ed. Trillas. México.

Balestrini, M. (2002): *Cómo se elabora el proyecto de investigación.* (6ª ed.) Caracas-Venezuela. BL Consultores Asociados. Servicio Editorial.

Brenes, R. (1997): *Manipulaciones Geométricas.* [Versión Electrónica]. Extraída el 06 de diciembre de 2010 de: http://es.scribd.com/doc/30998128/Ideario-Costarricense-Siglo-XXI-UNA

Catálogo de Software de Matemáticas (2007). [Versión Electrónica]. Extraída el 11 de febrero de 2011 de: http://platea.pntic.mec.es/aperez4/catalogo/Catalogo-software.htm

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999). Caracas-Venezuela.

Echeverría, J. (2001): *Las TIC en Educación*. Revista Iberoamericana, 24.

Escandón, C. (2011): *Biografía de Maurits Cornelius Escher* [Versión Electrónica]. Extraída el 22 de Febrero de 2011 de:

http://www.astroseti.org/articulo/4367/biografia-de-maurits-cornelius-escher.

Fouz, F. (1999): *Modelo de Van Hiele para la Didáctica de la Geometría*. [Versión Electrónica]. Extraída el 26 de enero de 2011 de: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf.

Hernández, V. (2001): *Perspectivas en la Educación de la Geometría para el siglo XXI.* [Versión Electrónica]. Extraída el 13 de diciembre de 2010 de: http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm.

Hernán, F. y Carrillo, E. (1999): *Recursos en el Aula de Matemática.* Editorial Síntesis. Venezuela.

Hernández, A. y Mamo, J. (2010): El Lenguaje de Programación Logo, una alternativa tecnológica para construir Geometría.

Hernández, F. y Sánchez, J. (2010): GeoGebra, Una Propuesta para su Autoaprendizaje y Utilización como Herramienta Tecnológica por parte de Estudiantes de Educación Mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario “Rafael Rangel”.

Hernández, R., Fernández, y Baptista, P. (2003): *Metodología de la Investigación.* (3ª ed.). Bogotá-Colombia: McGraw-Hill.

Hohenwarter Markus. *Ayuda en GeoGebra 3.2* [Archivo HTML]: Adjunto al Software GeoGebra 3.2. Florida. Septiembre de 2009.

Hurtado, J. (2000): *Metodología de la Investigación Holística.* (3ª ed.). Caracas-Venezuela: Fundación Sypal.

Hurtado, J. (2003): *El Proyecto de Investigación. (3ª ed.).* Caracas-Venezuela: Fundación Sypal.

Landart, J. (2003): *La Alhambra y el Teorema de Fiorodov* [Versión Electrónica]. Extraída en: http://tiopetrus.blogia.com/2003/092601-la-alhambra-y-el-teorema-de-fedorov.php

Ley Orgánica de Educación (2009). Gaceta Oficial Nº 2.635. Caracas-Venezuela.

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2009): *Fundabit conmemora 8 años incorporando las tecnologías en la Educación Bolivariana.* [Versión Electrónica]. Extraída el 10 de febrero de 2011 de: http://www.portaleducativo.edu.ve/index.php?option=com_content&task=view&id=369&Itemid=178.

Monera, E. (1991): *Las Matemáticas en Educación Básica, el enfoque de la Modernización Educativa.* Educación Matemática. Editorial Kapeluz. Venezuela.

Vygotsky, L. (1979): *El Desarrollo de los procesos Psicológicos Superiores*. Barcelona. Editorial Grijalbo.

Tamayo, M. (2001): *El Proceso de la Investigación Científica,* (4ª ed.). Ciudad de México-México: Limusa.

The M.C. Escher Company B.V. *Picture Gallery* [Versión Electrónica]. Extraída el 01 de Abril de 2011 de: http://www.mcescher.com

Anexos

“Al reverso del tomo se encuentra adjunto el CD que contiene los instaladores del GeoGebra 3.2, su Manual en formato PDF y los teselados construidos en los capítulos V y VI”.