

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Postgrado en Matemáticas



**ESTUDIO CUALITATIVO DE LA DINÁMICA
DE MODELOS DE PREDADOR-PRESA CON
DIFUSIÓN Y RESPUESTAS FUNCIONALES
DEL TIPO HOLLING II Y COCIENTE
DEPENDIENTE**

MSc. Cosme Duque

Trabajo de Tesis
para optar al título de
Doctor en Matemáticas

Tutor: Dr. Marcos Lizana.

Mérida - Venezuela
- 2009 -

El objetivo fundamental de este trabajo es el de describir, analizar, valorar y discutir la dinámica de modelos depredador-presa con difusión; el primero de ellos a considerar, se caracteriza por poseer tasa de mortalidad variable en el depredador y respuesta funcional del tipo Holling II, el segundo posee retardo distribuido y respuesta funcional del tipo Cociente-Dependiente, en ambos modelos se asume que las especies viven en un subconjunto abierto, acotado y conexo de \mathbb{R}^n con frontera suave, y se consideran condiciones iniciales no negativas así como condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneas, es decir, las especies no presentan intercambio de flujo con el exterior de la región donde viven.

Entre las propiedades dinámicas más relevantes y fundamentales a estudiar caben destacar la disipatividad y permanencia de las especies, la existencia del atractor global, la estabilidad local y global de los sistemas y la no existencia de soluciones estacionarias, así como también la existencia de órbitas periódicas de amplitud pequeña para el primer modelo sin difusión.

Dedicado a:

Mi esposa Jahnett, por su amor y fortaleza.

A mi hija Andrea Nataly, por iluminar cada uno de mis días.

www.bdigital.ula.ve

Agradecimiento

Deseo dedicar estas líneas para agradecer a todas aquellas personas que hicieron posible que este trabajo se culminara con éxito. En primer lugar quiero expresar mi más profunda y sincera gratitud a mi Tutor, Maestro y Amigo Dr. Marcos Lizana, quien con sus sabios consejos, sus comentarios críticos, su entusiasmo, sus emotivas conversaciones, motivaron, inspiraron e hicieron fascinante el desarrollo de esta investigación.

A mi querida Jahnett, gracias por tu apoyo, comprensión y compañía, cada momento que pasamos juntos, cada conversación que tuvimos fue un paso adelante para la culminación de este trabajo; este logro es tuyo también.

A mi Pequeña Damita Andrea Nataly, por haber llegado en el momento justo para alegrar e iluminar nuestras vidas, junto a tu madre inspiras cada uno de mis pasos.

A mis padres Irma y Cosme, por ser ejemplo de trabajo constante, amor y entrega.

A los Profesores Derwis Rivas y Cecilia Nava por su apoyo incondicional para que este proyecto se realizara.

A la Oficina de Planificación del Sector Universitario a través del Programa Alma Mater para la Formación de Doctores, así como también al Grupo de Ecuaciones Diferenciales del Dpto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes por su apoyo en el financiamiento de este proyecto.

A mi Ilustre Universidad de Los Andes, por abrirme sus puertas para mi formación académica y permitirme formar parte de las nuevas generaciones de investigadores de esta casa de estudios.

*I do not want to teach biology here;
I try to present and treat those mathematical methods that are used to describe
dynamical phenomena in biology.*

Miklós Farkas

1932-2007

www.bdigital.ula.ve

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. Marco Teórico	7
1.1. Permanencia	7
1.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales parabólicas	11
1.2.1. Principios del máximo parabólico y Teoremas de comparación	12
1.2.2. Formulación abstracta	14
1.2.3. Conjuntos positivamente invariantes	16
1.2.4. Estabilidad	18
1.2.5. Estimación superior	21
1.3. Desigualdad de Poincaré y primera identidad de Green	21
2. Modelo Depredador Presa con Tasa de Mortalidad Variable, Respuesta Funcional Holling II, sin Difusión	23
2.1. Antecedentes del modelo	24
2.2. Disipatividad y permanencia	27
2.3. Estabilidad global del equilibrio no trivial	29
2.4. Bifurcación de Hopf	32
2.5. Discusión y observaciones	36
3. Modelo Depredador Presa con Tasa de Mortalidad Variable, Difusión y Respuesta funcional Holling II	37
3.1. Persistencia y permanencia	38

3.2. Estabilidad del equilibrio no trivial	44
3.3. No existencia de soluciones estacionarias positivas no constantes	52
3.4. Discusión y observaciones	56
4. Modelo Depredador Presa con Difusión, Respuesta Funcional Co-	
 ciente Dependiente y Retardo Distribuido	59
4.1. Descripción del modelo	59
4.2. Antecedentes del modelo	63
4.3. Persistencia Uniforme	65
4.4. Estabilidad global del equilibrio no trivial	67
4.5. Discusión y observaciones	72
Bibliografía	75

www.bdigital.ula.ve

INTRODUCCIÓN

La dinámica de población observa el problema de como varían en el tiempo un grupo bien definido de criaturas vivientes de una especie o de un sistema de especies que comparten un habitat en común. Dichas criaturas nacen, se reproducen y mueren con ciertas tasas de natalidad y mortalidad, respectivamente. Las cuales dependen de algunas circunstancias, incluyendo propiedades específicas genéticamente determinadas. Por ejemplo, la cantidad de comida disponible, su densidad de crecimiento, etc. Y, en el caso de un habitat compartido, las propiedades de aquellas especies con las cuales conviven también influyen sobre las tasas antes mencionadas, incluso a veces de manera dramática.

Es por ello que el papel fundamental de esta teoría ecológica es entender como la interacción entre distintas especies y su relación ambiental, determinan la distribución de las poblaciones y la estructura de las comunidades. Obviamente, que el interés fundamental es que estas comunidades sean sustentables en el tiempo.

Generalmente modelos depredador presa son descritos mediante sistemas de la forma

$$\begin{aligned}N'(t) &= Nf(N) - g(N, P)P \\ P'(t) &= -M(P)P + bg(N, P)P\end{aligned}\tag{1}$$

donde N denota la densidad de presa, P la densidad del depredador, $f(N)$ es la tasa de crecimiento de la presa en ausencia de depredadores, usualmente es considerada del tipo logística, es decir,

$$f(N) = \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

donde ε es la tasa de crecimiento específica y K es la capacidad de carga del habitat. $g(N, P)$ representa la respuesta funcional del modelo, es decir, la tasa a la cual un depredador consume presa; el parámetro b , en el sistema (1), describe la eficiencia del depredador en convertir presa consumida en nuevos depredadores. Holling [33] describe la respuesta funcional mediante la fórmula

$$g = \frac{E/P}{1 + hE/P}, \quad (2)$$

donde E es la tasa total de encuentros entre depredadores y presas por unidad de tiempo y h es el tiempo de captura por presa. Siguiendo el principio de acción de masa (Cosner et al. [10]), el cual establece que la tasa a la cual un depredador consume presa debe depender solo de la densidad de presa, es posible obtener diferentes tipos de respuesta funcional, por ejemplo, si asumimos que las presas están distribuidas al azar de una manera espacialmente uniforme y los depredadores están distribuidos también espacialmente uniforme, entonces el principio de acción de masa predice una tasa de encuentro

$$E(N, P) = e_0NP \quad (3)$$

para alguna constante e_0 . Sustituyendo (3) en (2) obtenemos la respuesta funcional presa dependiente Holling II

$$g = g(N) = \frac{e_0N}{1 + he_0N}. \quad (4)$$

Si ahora los depredadores buscan en grupos, entonces se asume que los depredadores forman un número fijo de grupos y que la cantidad de tiempo usado para la búsqueda no depende del tamaño de los grupos. Si se asume que el área o volumen de cada grupo de depredadores es muy pequeño respecto al área sobre la cual ejercen su búsqueda, entonces el añadir depredadores tendrá un efecto insignificante sobre el área explorada por cada grupo en unidad de tiempo. En términos del principio de acción de masa, cada grupo debería funcionar como un punto de masa, y la tasa de encuentro debería ser proporcional al número de grupos y la densidad de presa. Alternativamente, aún si la cantidad de espacio ocupado por un grupo no es insignificante, puede ser todavía posible que la geometría del grupo sea tal que al añadir más depredadores no cambie el área de exploración por unidad de tiempo de búsqueda. Bajo estas suposiciones la tasa de encuentro depende solo de la densidad de presa, ya que al añadir depredadores no se incrementa la tasa de encuentro. En este caso,

$$E(N, P) = e_1 N \quad (5)$$

para alguna constante e_1 . Sustituyendo (5) en (2) obtenemos la respuesta funcional Cociente-Dependiente

$$g = g(N/P) = \frac{e_1(N/P)}{1 + he_1(N/P)} = \frac{e_1 N}{P + he_1 N}. \quad (6)$$

$M(P)$ representa la tasa de mortalidad del depredador, generalmente en modelos depredador presa $M(P)$ es considerada como una función constante, sin embargo, estudios recientes realizados por Farkas & Cavani [13] y Lizana & Niño [47] tomando $M(P)$ como una función acotada, creciente que se incrementa con la cantidad de depredadores y respuesta funcional del tipo Holling II y por Farkas et al. [23] con respuesta funcional Cociente Dependiente, han arrojando interesantes y relevantes resultados parciales sobre la dinámica de dichos modelos.

Ahora bien, cuando no es suficiente el conocimiento de la evolución del ecosistema temporalmente, es necesario tomar en cuenta el factor espacial para el desplazamiento de las especies. En este caso se postula que dichas especies se mueven aleatoriamente. Y, es ampliamente aceptado representar esta situación por medio de una clase particular de ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico conocidas como ecuaciones de reacción y difusión, en este caso el sistema (1) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= D_1 \Delta N + Nf(N) - g(N, P)P \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= D_2 \Delta P - M(P)P + bg(N, P)P. \end{aligned} \quad (7)$$

Ahora N y P son funciones de la variable espacial x y la variable temporal t , $x \in \Omega$ donde Ω es un dominio de \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$ suave, $t > 0$, Δ representa el operador Laplaciano y $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ son los coeficientes difusivos.

Estos modelos de reacción y difusión nos proveen una herramienta que puede ser muy útil para predecir la persistencia o extinción de poblaciones y la coexistencia de especies interactuando. Estos modelos incorporan explícita y típicamente cantidades tales como tasas de dispersión, tasas de crecimiento local y capacidades de carga como parámetros, los cuales pueden depender de variables temporales y/o espaciales.

Modelos depredador presa con tasa de mortalidad constante y respuesta funcional del tipo Holling II con y sin difusión han sido bien estudiados, ver por ejemplo Hsu et al.

[35], Murray [43, 44], Cantrell & Cosner [9], Kuznetsov [39]. Con respuesta funcional Cociente Dependiente podemos citar a Berzovskaya et al. [5], Duque et al. [19], Hsu et al. [34], Jost et al. [37], Kuang & Beretta [38], Lizana & Marín [45], Pang & Wang [50], Peng & Wang [51], Zeng [60].

El objetivo principal de esta tesis es describir la dinámica global de los siguientes modelos depredador presa con difusión:

El primero de ellos viene dado por el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= D_1 \Delta N + \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - a \frac{PN}{\beta + N}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= D_2 \Delta P - \frac{\gamma + \delta P}{1 + P} P + b \frac{PN}{\beta + N}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Como puede notarse, la respuesta funcional es del tipo Holling II y la tasa de mortalidad del depredador $M(P) = (\gamma + \delta P)/(1 + P)$ es la misma introducida por Farkas & Cavani [13]. En este caso $\gamma > 0$ es considerada como la mortalidad inicial o minimal de la población depredadora y $\delta > 0$ como la mortalidad límite o maximal, en este caso es natural suponer que $\gamma < \delta$. Además si $\delta = \gamma$, (8) se reduce al modelo clásico, es decir, al modelo con tasa de mortalidad constante.

Supondremos además, que a través de la frontera de Ω no hay intercambio de flujo de la presa y del depredador con el exterior, es decir, supondremos que el modelo está sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneas

$$\frac{\partial N}{\partial \nu}(x, t) = \frac{\partial P}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

donde $\partial/\partial \nu$ representa la derivada direccional en dirección del vector unitario normal exterior en $\partial\Omega$. Las condiciones iniciales vienen dadas de la forma usual

$$N(x, 0) = \phi_1(x) \geq 0, \quad P(x, 0) = \phi_2(x) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son funciones continuas.

El segundo, es el siguiente modelo introducido por Lizana & Marín [46] representado por el sistema integro-diferencial

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= D_1 \Delta N + aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{cNP}{mP + N}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= D_2 \Delta P - dP + f \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \frac{\xi G(x, y, t - \tau) N(y, \tau) P(y, \tau) e^{-\xi(t-\tau)}}{mP(y, \tau) + N(y, \tau)} dy d\tau.\end{aligned}\tag{9}$$

En este modelo en particular, tenemos una respuesta funcional del tipo Cociente Dependiente, tasa de mortalidad constante y estamos suponiendo adicionalmente que el pasado de la población tiene un efecto residual sobre el futuro de la población, lo cual implica la aparición de tiempos de retardos continuos, es decir, efectos hereditarios. Aquí $G(x, y, t - \tau)$ denota la probabilidad de que una presa al ser consumida por un depredador en la posición y en Ω , en el tiempo $\tau < t$, contribuya al incremento, por un factor $\xi e^{\xi(t-\tau)}$ en el tiempo t , en la tasa de crecimiento de la densidad del depredador en la posición x . Cabe destacar que al considerar el modelo (9), estamos asumiendo de un modo más realista que el nivel actual del depredador afecta instantáneamente el crecimiento de la presa, pero el crecimiento del depredador esta influenciado por la cantidad de presa en el pasado y la medida de esta influencia viene dada por la cantidad $1/\xi$. En consecuencia para $\xi > 0$ mas pequeño, más grande es el intervalo en el pasado donde el valor del cociente N/P es tomado en cuenta.

El presente trabajo consta de cuatro capítulos. En el **Capítulo 1**, presentamos definiciones y resultados importantes que serán de utilidad en el desarrollo de los capítulos siguientes.

En el **Capítulo 2** consideramos el modelo depredador presa (8) sin difusión y caracterizamos su dinámica, mostrando la permanencia del sistema, la estabilidad local y global de un único punto de equilibrio no trivial, además de probar la existencia de órbitas periódicas de amplitud pequeña. Los resultados expuestos en este capítulo han sido aceptados para su publicación en la revista "Differential Equations and Dynamical Systems" (ver [16]).

En el **Capítulo 3** realizamos un estudio general de las propiedades dinámicas más relevantes del sistema (8); entre ellas: existencia del atractor global, coexistencia de las especies, estabilidad local y global; y, la no existencia de soluciones estacionarias no triviales. Los resultados presentados en este capítulo están siendo preparados para su publicación (ver [17]).

En el **Capítulo 4** consideramos el modelo (9) y mostramos que el atractor global del sistema se reduce a un punto de equilibrio mientras el sistema es persistente. Los resultados de este capítulo han sido publicados en la revista "Periodica Mathematica Hungarica" (ver [18]).

www.bdigital.ula.ve

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

Este capítulo contiene definiciones y resultados fundamentales que usaremos en el desarrollo de esta tesis, las demostraciones de dichos resultados se omitirán, a cambio daremos referencias adecuadas donde el lector podrá encontrarlas.

1.1. Permanencia

Como mencionamos en la introducción, un problema fundamental en el estudio de la dinámica de poblaciones es el de encontrar criterios que permitan determinar la coexistencia de especies interactuando para tiempos muy grandes. Existen diferentes formas de establecer coexistencia, entre ellas podemos mencionar los teoremas de comparación, funciones de Liapunov y el criterio de permanencia, una exposición completa de coexistencia puede ser encontrada en Cantrell & Cosner [9].

En este trabajo utilizaremos el criterio de permanencia tratado por Hale & Waltman [31] para establecer la coexistencia de las especies, por esta razón plasmaremos en esta sección los principales resultados que sobre este tema se pueden encontrar en [31].

Definición 1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Un sistema dinámico (semi-grupo no lineal) es una familia de aplicaciones $\{S(t) : X \rightarrow X, t \geq 0\}$ tal que*

1. *para cada $t \geq 0$, $S(t)$ es continuo de X en X ;*
2. *para cada $x \in X$, $t \rightarrow S(t)x$ es continuo;*

3. $S(0) = \text{identidad en } X$;

4. $S(t)(S(\tau)x) = S(t + \tau)x$ para todo $x \in X$ y $t, \tau \geq 0$.

Definición 1.2. La órbita positiva $\gamma^+(x)$ a través de x es definida como

$$\gamma^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \{S(t)x\}.$$

El conjunto ω -límite es definido como

$$\omega(x) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \{S(t)x\}},$$

Si B es un subconjunto de X , definimos el conjunto ω -límite de B como

$$\omega(B) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \{S(t)B\}},$$

donde

$$S(t)B = \bigcup_{x \in B} \{S(t)x\}.$$

Es importante hacer una observación respecto a $\omega(B)$. Es tentador considerar el conjunto

$$\bigcup_{x \in B} \omega(x)$$

como un candidato para el comportamiento límite del conjunto B ya que este contiene los conjuntos ω -límite de cada punto de B . Este conjunto en general es mucho más pequeño que el conjunto $\omega(B)$. De hecho, conjuntos ω -límite de puntos de B podrían ser desconexos aún cuando $\omega(B)$ es conexo. Desde el punto de vista del comportamiento cualitativo de la dinámica generada por el semigrupo $S(t)$, es necesario considerar los conjuntos $\omega(B)$ definidos anteriormente.

Si los puntos x o los conjuntos B tienen órbitas negativas, podemos definir el conjunto α -límite $\alpha(x)$ de x y el conjunto α -límite $\alpha(B)$ de B de una manera similar tomando en cuenta la posibilidad de que existan múltiples órbitas negativas. Algunas veces es conveniente tener el conjunto α -límite de una órbita completa, $\gamma(x)$ a través de x . Denotamos este por $\alpha_\gamma(x)$.

Definición 1.3. Un conjunto B en X se dice que es invariante si

$$S(t)B = B \quad \text{para } t \geq 0.$$

Definición 1.4. Se dice que un conjunto A en X es un atractor global si A es compacto, maximal, invariante y para cada conjunto acotado B en X , $\delta(S(t)B, A) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde $\delta(B, A)$ es la distancia del conjunto B al conjunto A :

$$\delta(B, A) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(y, x).$$

En particular esto implica que $\omega(B)$ existe y pertenece a A .

Definición 1.5. El semigrupo $S(t)$ se dice que es puntualmente disipativo en X si existe un conjunto B en X acotado y no vacío tal que, para cada $x \in X$, existe $t_0 = t_0(x, B)$ tal que $S(t)x \in B$ para $t \geq t_0$.

Un resultado importante para mostrar la existencia de atractores globales es el siguiente teorema

Teorema 1.1. (Billoti & LaSalle [6]) Si

1. existe un t_0 tal que $S(t)$ es compacto para $t > t_0$,

2. $S(t)$ es puntualmente disipativo en X ,
entonces existe un atractor global no vacío A en X .

Definición 1.6. Un subconjunto M invariante y no vacío de X es llamado un conjunto invariante aislado si existe una vecindad U tal que $M \subset U$ y M es invariante maximal. La vecindad U es llamada una vecindad aislada.

Definición 1.7. El conjunto estable o atractor de un conjunto compacto invariante A es definido por

$$W^s(A) = \{x : x \in X, \omega(x) \neq \emptyset, \omega(x) \subset A\} \quad (1.1)$$

El conjunto inestable o repulsor es definido por

$$W^u(A) = \{x : x \in X, \text{ existe una órbita negativa } \gamma(x) \text{ tal que } \alpha_\gamma(x) \neq \emptyset, \alpha_\gamma(x) \subset A\}$$

Supongamos ahora que $X = X^0 \cup \partial X^0$, donde X^0 es un conjunto abierto.

Definición 1.8. El semigrupo $S(t)$ se dice que es persistente si para cada $x \in X^0$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(S(t)x, \partial X^0) \geq 0. \quad (1.2)$$

El semigrupo $S(t)$ se dice que es uniformemente persistente si existe un $\eta > 0$ tal que, para cada $x \in X^0$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(S(t)x, \partial X^0) \geq \eta. \quad (1.3)$$

Que $S(t)$ sea persistente no implica necesariamente que $S(t)$ sea uniformemente persistente, ver por ejemplo Butler et al. [8].

Definición 1.9. El semigrupo $S(t)$ se dice que es permanente si es puntualmente disipativo y uniformemente persistente.

Definición 1.10. Sean M, N conjuntos invariantes aislados (no necesariamente distintos). Decimos que M esta encadenado a N , escrito $M \longrightarrow N$, si existe $x \notin M \cup N$ tal que $x \in W^u(M) \cap W^s(N)$

Una sucesión finita M_1, M_2, \dots, M_k de conjuntos invariantes aislados, se llama una cadena si,

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_k \quad (M_1 \longrightarrow M_1, \text{ si } k = 1)$$

La cadena será llamada un ciclo si $M_k = M_1$.

Supongamos ahora que el semigrupo fuertemente continuo $S(t)$ sobre X satisface

$$S(t) : X^0 \longrightarrow X^0, \quad S(t) : \partial X^0 \longrightarrow \partial X^0, \quad (1.4)$$

y que existe el atractor global A_∂ en ∂X^0 . Definamos

$$\tilde{A}_\partial = \bigcup_{x \in A_\partial} \omega(x). \quad (1.5)$$

Definición 1.11. Se dice que \tilde{A}_∂ es aislado si existe un cubrimiento $M = \cup_{i=1}^k M_i$ de \tilde{A}_∂ donde los conjuntos M_i son disjuntos dos a dos, compactos, aislados e invariantes para $S|_{\partial X^0}$ y S . M es llamado un cubrimiento aislado.

Ahora, \tilde{A}_∂ se llamará acíclico si existe un cubrimiento aislado $M = \cup_{i=1}^k M_i$ de \tilde{A}_∂ tal que ningún subconjunto formado por los M_i forma un ciclo.

El siguiente teorema es el resultado principal que usaremos para establecer la permanencia de los modelos depredador presa.

Teorema 1.2. (Teorema 4.1 pag. 392 [31]) Suponga que $S(t)$ satisface (1.4) y

- i) existe un t_0 tal que $S(t)$ es compacto para $t > t_0$;
- ii) $S(t)$ es puntualmente disipativo;
- iii) \tilde{A}_∂ es aislado y tiene un cubrimiento acíclico.

Entonces $S(t)$ es uniformemente persistente si, y sólo si, para cada $M_i \in M$

$$W^s(M_i) \cap X^0 = \emptyset \quad (1.6)$$

1.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales parabólicas

En general un sistema de ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \mathcal{A}_i u_i + f_i(x, u_1, \dots, u_m) & \text{en} & \quad \Omega \times (0, \infty) \\ \alpha_i(x) u_i + \beta_i(x) \frac{\partial u_i}{\partial \nu} &= g_i(x) & \text{sobre} & \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u_i(x, 0) &= \phi_i(x) & \text{sobre} & \quad \Omega, \end{aligned} \quad (1.7)$$

para $i = 1, \dots, m$, tal que para cada i , la segunda y tercera expresión de (1.7) definen respectivamente condiciones de frontera e iniciales. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, acotado y conexo con frontera $\partial\Omega$ suave, $\partial/\partial\nu$ representa la derivada direccional en dirección del vector unitario normal exterior en $\partial\Omega$ y \mathcal{A}_i es un operador elíptico general de segundo orden de la forma

$$\mathcal{A} = \sum_{k,j=1}^m a_{kj}(x) \frac{\partial}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^m b_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + c(x) \quad (1.8)$$

tal que los coeficientes $a_{kj} = a_{jk}$, b_k y c son continuos en $\bar{\Omega}$. \mathcal{A} es uniformemente elíptico, es decir, existe una constante positiva μ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\sum_{k,j=1}^n a_{kj}(x) \xi_k \xi_j \geq \mu |\xi|^2, \quad x \in \Omega \quad (1.9)$$

En algunos casos \mathcal{A}_i y/o f_i pueden depender tanto de t como de x .

En (1.7) las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet cuando $\alpha_i(x) \equiv 1$ y $\beta_i(x) \equiv 0$ o Neumann, o Robin cuando $\alpha_i(x) \geq 0$ y $\beta_i(x) \equiv 1$ y se dicen que son homogéneas cuando $g_i(x) \equiv 0$.

Existen diferentes formas de formular la teoría de existencia para sistemas de la forma (1.7). Un enfoque clásico basado en estimaciones a priori es dado por Friedman [25]. Tratamientos enfocados en la teoría de semigrupos analíticos son dados por Friedman [26], Pazy [52], Goldstein [28] y Henry [32]. Una versión mucho más general de teoría de existencia ha sido desarrollada por Amann [2, 3, 4].

En nuestro caso estamos interesados en describir la dinámica de modelos biológicos, por lo tanto nuestro objetivo está en verificar que un sistema particular del tipo (1.7) genera un semiflujo sobre el espacio de las funciones continuas definidas sobre Ω .

1.2.1. Principios del máximo parabólico y Teoremas de comparación

Los principios del máximo juegan un papel fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales parabólicas. Ellos proveen herramientas fundamentales para establecer unicidad de las soluciones, existencia de conjuntos positivamente invariantes, comparación entre soluciones de diferentes ecuaciones parabólicas y monotonía del operador solución. Principios del máximo para soluciones clásicas son tratados en detalles por Protter & Weinberger [53] y Walter [58]. Extensiones a soluciones débiles son discutidas por Gilbarg & Trudinger [27].

A continuación vamos suponer que (1.8) depende de t , $c(x, t) \equiv 0$ y que (1.8) está definido en el cilindro $U_T = \Omega \times (0, T)$ para algún $T > 0$, es decir, consideremos el operador parabólico general de segundo orden

$$\mathcal{A} = \sum_{ij=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.10)$$

donde los coeficientes $a_{i,j}(x, t) = a_{j,i}(x, t)$ y $b_i(x, t)$ son continuos sobre $\overline{U_T}$ y además el operador \mathcal{A} satisface la condición de que es uniformemente parabólico en U_T , es decir, existe una constante $\mu > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2, \quad (x, t) \in U_T. \quad (1.11)$$

Denotemos por $C^{2,1}$ al espacio de las funciones que tienen su derivada temporal y sus derivadas espaciales de orden menor o igual a dos continuas.

Teorema 1.3. (Principio del máximo fuerte parabólico)(Teorema 2, pag. 328 [41])
Suponga que $M = \sup\{u(x, t) : (x, t) \in U_T\} < \infty$, $u \in C^{2,1}(U_T)$, \mathcal{A} es uniformemente parabólico y $\mathcal{A}u \geq \partial u / \partial t$.

1. Si $u(x_0, t_0) = M$ para algún $(x_0, t_0) \in U_T$, entonces $u(x, t) \equiv M$ para todo $x \in \Omega$ y $0 < t < t_0$.

2. Si $u(x_0, t_0) = M$ para algún $x_0 \in \partial\Omega$ y $0 < t_0 < T$, pero $u(x, t) < M$ para todo $x \in \Omega$, $0 < t < t_0$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, t_0) > 0,$$

siempre que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, t_0)$ exista.

A continuación presentamos los teoremas de comparación, los cuales son de gran utilidad para obtener información cualitativa acerca de las soluciones. Por ejemplo, teoremas de comparación son muy usados para obtener información del comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones parabólicas cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 1.4. (Teorema de comparación: Caso escalar)(Teorema 10.1, pag 94 [56])
Suponga que \mathcal{A} satisface las hipótesis del teorema 1.3, $f(x, t, u)$, $\partial f(x, t, u)/\partial u \in C(\overline{U_T} \times \mathbb{R})$, y $u, v \in C^{2,1}(U_T) \cap C^1(\overline{U_T})$ satisfacen

$$u_t - \mathcal{A}u - f(x, t, u) \geq v_t - \mathcal{A}v - f(x, t, v) \quad \text{en } U_T$$

$$u(x, 0) \geq v(x, 0) \quad \text{sobre } x \in \Omega$$

$$\alpha(x)u + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) \geq \alpha(x)v + \beta(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) \quad \text{sobre } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

$\alpha \geq 0$, $\beta > 0$. Entonces $u(x, t) > v(x, t)$ para todo $(x, t) \in \overline{U_T}$.

Teorema 1.5. (Teorema de comparación: Caso sistemas)(Teorema 3.4, pag.130 [55])
Suponga que los operadores \mathcal{A}_i , $i = 1, \dots, m$ satisfacen las hipótesis del teorema 1.3, para cada i las funciones $f_i(x, t, u_1, \dots, u_m)$ y $\partial f_i(x, t, u_1, \dots, u_m)/\partial u_j$, $j = 1, \dots, m$ pertenecen a $C(\overline{U_T} \times \mathbb{R})$, y que

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \geq 0 \quad \text{para } i \neq j. \quad (1.12)$$

Si (w_1, \dots, w_m) y (v_1, \dots, v_m) satisfacen

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} - \mathcal{A}_i w_i \geq f_i(x, t, w_1, \dots, w_m) \quad \text{en } U_T, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \mathcal{A}_i v_i \leq f_i(x, t, v_1, \dots, v_m) \quad \text{en } U_T, \quad (1.14)$$

con

$$w_i(x, 0) \geq v_i(x, 0) \quad \text{sobre } \Omega$$

y

$$\alpha_i(x)w_i + \beta_i(x)\frac{\partial w_i}{\partial \nu}(x, t) \geq \alpha_i(x)v_i + \beta_i(x)\frac{\partial v_i}{\partial \nu}(x, t) \quad \text{sobre } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

para $i = 1, \dots, m$, entonces $w_i \geq v_i$ en U_T .

La condición (1.12) es conocida como condición de Kamke o condición cuasimonótona. Sistemas que satisfacen (1.12) son llamados cooperativos. En el Teorema 1.5 es posible tener $w_i > v_i$ para algunas componentes pero $w_j \equiv v_j$ para otras.

Si las funciones u, v satisfacen las hipótesis del Teorema 1.4, o si los vectores $(w_1, \dots, w_m), (v_1, \dots, v_m)$ satisfacen las hipótesis del Teorema 1.5, entonces diremos que $u, (w_1, \dots, w_m)$ son supersoluciones y $v, (v_1, \dots, v_m)$ son subsoluciones para sus respectivos modelos.

Existen diversas variaciones y extensiones del principio del máximo y teoremas de comparación, pero los que hemos presentado aquí son adecuados para el propósito de esta tesis.

1.2.2. Formulación abstracta

Supongamos ahora que para $i = 1, \dots, m$, $\mathcal{A}_i = d_i \Delta$ donde $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 / \partial x_n^2$ denota el operador Laplaciano, $\alpha_i \equiv 0$, $\beta_i \equiv 1$ y $g_i \equiv 0$, es decir, consideremos el siguiente sistema de reacción difusión con condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D \Delta u(x, t) + F(x, u(x, t)), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial \Omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \Omega$$

donde $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ y $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$, con $d_i > 0$, $i = 1, \dots, m$.

Como mencionamos al principio de este capítulo, estamos interesados que el sistema (1.15) genere un semiflujo en el espacio de las funciones continuas, por lo tanto consideremos el espacio $X = \prod_{i=1}^m X_i$, con $X_i = C(\bar{\Omega})$ dotado con la norma $\|\phi\| = \sum_{i=1}^m |\phi_i|$, donde $|\phi_i| = \max\{|\phi_i(x)| : x \in \Omega\}$. Es claro que $(X, \|\phi\|)$ forma un espacio de Banach. Para cada i sea A_i^0 el operador diferencial

$$A_i^0 u_i = d_i \Delta u_i \quad (1.16)$$

definido sobre el dominio $D(A_i^0) \subset X_i$ dado por

$$D(A_i^0) = \left\{ u_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : A_i^0 u_i \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial u_i}{\partial \nu}(x) = 0 \right\} \quad (1.17)$$

La clausura A_i de A_i^0 en X_i genera un semigrupo analítico de operadores lineales acotados $T_i(t)$ para $t \geq 0$, con la propiedad adicional de que para cada $t > 0$, $T_i(t) : X_i \rightarrow X_i$ es un operador compacto y tal que $u_i(t) = T_i(t)\phi_i$ es la solución de la ecuación diferencial lineal abstracta en X_i dada por

$$u_i'(t) = A_i u_i(t), \quad u_i(0) = \phi_i \in D(A_i), \quad (1.18)$$

cuyo dominio $D(A_i)$ está caracterizado implícitamente por

$$D(A_i) = \left\{ \phi \in X_i : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_i(t) - I}{t} \phi \text{ existe} \right\} \quad (1.19)$$

y el límite es precisamente $A_i \phi$.

Sea $T(t) : X \rightarrow X$ definido por $T(t) = \prod_{i=1}^m T_i(t)$. $T(t)$ es un semigrupo de operadores sobre X generado por el operador $A = \prod_{i=1}^m A_i$, definido sobre $D(A) = \prod_{i=1}^m D(A_i)$ y $u(x, t) = [T(t)\phi](x)$ es la solución del sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D\Delta u(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \Omega.$$

Supongamos ahora que $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es dos veces continuamente diferenciable y definamos $f : X \rightarrow X$ por

$$[f(\phi)](x) = F(x, \phi(x)). \quad (1.21)$$

Entonces, la ecuación (1.15) puede ser vista como la ecuación diferencial ordinaria abstracta

$$u'(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad u(0) = \phi \quad (1.22)$$

Se sabe que una solución clásica del problema (1.22) es una función $u : [0, \tau) \rightarrow X$ continua sobre $[0, \tau)$ y continuamente diferenciable sobre $(0, \tau)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < \tau$ y satisface (1.22) sobre $[0, \tau)$ y cualquier solución de (1.22) satisface la ecuación integral

$$u(t) = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds. \quad (1.23)$$

Una solución continua $u : [0, \tau) \rightarrow X$ que satisfaga la ecuación integral (1.23) es llamada una solución moderada de la ecuación (1.22).

Observación 1.1. Rothe [54] (Lema 1, pag. 15) demuestra que el operador A^0 es cerrable en el espacio de Banach $L_p(\Omega)$ para $p \in (1, \infty)$, y su clausura genera, en $L_p(\Omega)$, un semigrupo analítico de operadores lineales acotados $T_p(t)$. Luego, define los operadores $T_\infty(t)$ como la restricción de $T_p(t)$ al espacio $L_\infty(\Omega)$ (Lema 2, pag. 19), estos operadores están bien definidos, son continuos de $L_\infty(\Omega)$ en $L_\infty(\Omega)$ y forman un semigrupo, pero este semigrupo no es fuertemente continuo. Posteriormente Mora [42] (Corolario 4.1, pag 53) prueba que la restricción de $T_\infty(t)$ al espacio $C(\Omega)$ es en efecto un semigrupo analítico.

1.2.3. Conjuntos positivamente invariantes

El objetivo de esta sección es establecer condiciones suficientes para que las soluciones de (1.15) existan y permanezcan en ciertos subconjuntos cerrados y convexos de X .

Sea X_i^+ el cono formado por las funciones no negativas en X_i dotado con la relación de orden parcial $\phi_i \leq \psi_i$ si, y sólo si, $\psi_i - \phi_i \in X_i^+$. Como es usual, $\phi_i < \psi_i$ significa que $\phi_i \leq \psi_i$, pero $\phi_i \neq \psi_i$. El siguiente resultado el cual es consecuencia inmediata del principio del máximo muestra que los operadores $T_i(t)$ son positivos.

Corolario 1.1. (Corolario 2.3, pag. 124, [55]) *El semigrupo $T_i(t)$ es positivo. De manera más precisa,*

$$T_i(t)X_i^+ \subset X_i^+.$$

Es más, si $\phi_i > 0$ y si $u_i(x, t) = [T_i(t)\phi_i](x)$, entonces $u_i(x, t) > 0$ es cierto para todo $t > 0$ y $x \in \bar{\Omega}$

Sea Λ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de \mathbb{R}^n , consideremos el conjunto

$$X_\Lambda = \{\phi \in X : \phi(x) \in \Lambda, x \in \bar{\Omega}\}$$

Ahora daremos condiciones suficientes para que el conjunto X_Λ sea positivamente invariante respecto al semiflujo generado por el sistema (1.15). La primera de ellas es la condición de Nagumo para que el conjunto Λ sea positivamente invariante para la ecuación diferencial ordinaria $u'(t) = F(x, u(t))$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \text{dist}(\Lambda, v + hF(x, v)) = 0, \quad (x, v) \in \bar{\Omega} \times \Lambda \quad (1.24)$$

La segunda condición requiere que el semigrupo lineal $T(t)$ deje a X_Λ positivamente invariante, es decir,

$$T(t)X_\Lambda \subset X_\Lambda, \quad t \geq 0 \quad (1.25)$$

Estas condiciones juntas son suficientes para que el conjunto X_Λ sea positivamente invariante.

Teorema 1.6. (Teorema 3.1, pag. 127, [55]) *Suponga que las condiciones (1.24) y (1.25) se cumplen. Entonces para cada $\phi \in X_\Lambda$, (1.15) tiene una única solución moderada no prolongable $u(t) = u(t, \phi) \in X_\Lambda$ definida sobre $[0, \sigma)$, $\sigma = \sigma(\phi) \leq \infty$. Además se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $u(t)$ es continuamente diferenciable sobre $(0, \sigma)$, $u(t) \in D(A)$ y $u(t)$ satisface (1.22) sobre $(0, \sigma)$;
2. $u(x, t) \equiv [u(t)](x)$ es una solución clásica de (1.15);
3. Si $\sigma < \infty$, entonces $|u(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \sigma$;
4. Si $\sigma(\phi) = \infty$ para todo $\phi \in X_\Lambda$, entonces $\Phi_t(\phi) = u(t, \phi)$ es un semiflujo sobre X_Λ .
5. Si B es un subconjunto de X_Λ acotado y cerrado, $t_0 > 0$ y $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} \Phi_t(B)$ es acotado, entonces $\Phi_{t_0}(B)$ tiene clausura compacta en X_Λ .

El cono no negativo $X_+ = \prod_{i=1}^n X_i^+$ en X es justo X_Λ donde $\Lambda = \mathbb{R}_+^n$.

Corolario 1.2. (Corolario 3.2, pag. 129, [55]) *Sea $\Lambda = \mathbb{R}_+^n$ y suponga que $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisface $F_i(x, u) \geq 0$ cuando $x \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}_+^m$ y $u_i = 0$. Entonces (1.24) y (1.25) se satisface para $X_\Lambda = X_+$ y así la conclusión del teorema 1.6 se cumple.*

1.2.4. Estabilidad

En lo que sigue vamos a suponer que la función F del sistema (1.15) es independiente de x , es decir, el sistema (1.15) toma la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D\Delta u(x, t) + F(u(x, t)), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad x \in \Omega\end{aligned}\tag{1.26}$$

Es conocido que las soluciones del sistema (1.26) se clasifican en:

1. soluciones del sistema sin difusión $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$,
2. soluciones del sistema elíptico $D\Delta u + F(u) = 0$, conocidas como soluciones estacionarias o patrones, y
3. soluciones no homogéneas.

Cuando las soluciones estacionarias son constantes estas son llamadas puntos de equilibrio. En esta sección presentamos los principales resultados usados para el estudio de la estabilidad de puntos de equilibrio del sistema (1.26).

Denotemos por $\|g\| = \sup\{|g(x)| : x \in \bar{\Omega}\}$.

Definición 1.12. Sea $v(x)$ una solución estacionaria del sistema (1.26).

1. $v(x)$ es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\phi - v\| < \delta$, entonces $\|u(t, \cdot) - v\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.
2. $v(x)$ es asintóticamente estable si es estable y existe $\delta > 0$ tal que $\|u(t, \cdot) - v\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
3. $v(x)$ es uniformemente asintóticamente estable si es estable y también existe una vecindad $\mathcal{V} = \{\phi \in X : \|\phi - v\| < r\}$ tal que $\|u(t, \cdot) - v\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, uniformemente para $\phi \in \mathcal{V}$.
4. $v(x)$ es global asintóticamente estable si δ puede ser escogido arbitrariamente grande.

La solución es inestable si esta no es estable.

Como estamos interesados en estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio, entonces por tal razón y sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $v(x) \equiv 0$.

Sea $F(u) = Ju + g(u)$ donde $J = J(F'(0))$ es la matriz Jacobiana de F evaluada en cero, $g(0) = 0$, $\nabla g(0) = 0$, y definamos el sistema linealizado

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D\Delta u + Ju, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \geq 0\end{aligned}\tag{1.27}$$

Primero vamos a considerar las propiedades de estabilidad del sistema (1.27). Para resolver este sistema usaremos la técnica de expansión en autofunciones. La justificación de este enfoque para el sistema (1.27) se sigue de Lions [48].

Sea $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ los autovalores y $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_k, \dots$ las correspondientes autofunciones de la ecuación de Laplace en Ω con condición de frontera del tipo Neumann homogénea; esto es (λ_k, ψ_k) satisface $-\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k$ en Ω con $\partial\psi_k/\partial\nu = 0$ sobre $\partial\Omega$, y $\int_{\Omega} \psi_k^2(x)dx = 1$.

Para cada entero no negativo n , sea u_{0n} el m vector

$$u_{0n} = \int_{\Omega} \phi(x)\psi_n(x)dx$$

y sea la matriz $e^{J_n t}$ de dimensión $m \times m$ solución de la ecuación diferencial

$$\frac{de^{J_n t}}{dt} = (J - \lambda_n D)e^{J_n t}, \quad \text{donde } J_n = J - \lambda_n D$$

con la condición inicial $e^{J_n 0} = I$. Entonces la solución del sistema lineal (1.27) puede ser escrita en la forma

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)e^{J_n t}u_{0n}.$$

Teorema 1.7. (Teorema 1, pag. 356, [11])

- 1) La solución cero es global asintóticamente estable si para cada entero no negativo n los autovalores de $J - \lambda_n D$ tienen parte real negativa. Además existen constantes positivas K, ω tal que para cada $t > 0$,

$$\|u(t, \cdot)\| \leq Ke^{-\omega t} \|\phi\|.$$

- 2) La solución cero es estable si para cada entero no negativo n los autovalores de $J - \lambda_n D$ tiene parte real no positiva y aquellos con parte real cero tienen divisores elementales simples.
- 3) La solución cero es inestable si para algún n existe un autovalor de $J - \lambda_n D$ con parte real positiva o parte real cero con un divisor elemental no simple.

El siguiente teorema es el que permite garantizar la estabilidad asintótica local de $v = 0$ en el sistema (1.26) a partir de la estabilidad asintótica de su respectivo sistema linealizado (1.27).

Teorema 1.8. (Teorema 2, pag. 359, [11]) *La solución cero del sistema (1.26) es asintóticamente estable si la solución cero del problema linealizado (1.27) es asintóticamente estable.*

A continuación introducimos la definición de función de Liapunov y el teorema de estabilidad de Liapunov.

Definición 1.13. *Sea $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema dinámico definido sobre X . Una función de Liapunov es una función $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $V(\phi) > 0$ para todo $\phi \neq 0$, $V(0) = 0$ y*

$$\dot{V}(\phi) = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \{V(S(t)\phi) - V(\phi)\} \leq 0 \quad (1.28)$$

para todo $\phi \in X$. No se excluye la posibilidad $\dot{V}(\phi) = -\infty$

Teorema 1.9. (Teorema 4.1.4, pag. 84, [32]) *Sea $\{S(t) : t \geq 0\}$ un sistema dinámico definido sobre X y $v(x) \equiv 0$ un punto de equilibrio en X . Suponga que V es una función de Liapunov sobre X la cual satisface, $V(\phi) \geq c(\|\phi\|)$ para $\phi \in X$, donde $c(\cdot)$ es una función continua, estrictamente creciente, $c(0) = 0$ y $c(r) > 0$ para $r > 0$. Entonces 0 es estable.*

Suponga además que $\dot{V}(\phi) \geq -c_1(\|\phi\|)$, donde $c_1(\cdot)$ es también continua, creciente y positiva, con $c_1(0) = 0$. Entonces 0 es uniformemente asintóticamente estable.

1.2.5. Estimación superior

En esta sección presentamos un teorema que nos permite obtener cierta estimación superior de la solución del sistema (1.26).

Sea $u = (u_1, \dots, u_m)$ solución del sistema (1.26), $E \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^+$ y $0 < \alpha < 1$, definamos $|u|_{0,E} = \sup\{|u(p)| : p \in E\}$. Sean

$$[u]_{\alpha,E} = \sup \left\{ \frac{|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)|}{(|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|)^{\alpha/2}} : (x_i, t_i) \in E, i = 1, 2 \right\},$$

$$|u|_{2+\alpha,E} = |u|_{0,E} + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|_{0,E} + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}|_{0,E} + |u_t|_{0,E} + [u_t]_{\alpha,E} + \sum_{i,j=1}^n [u_{x_i x_j}]_{\alpha,E}.$$

Teorema 1.10. (Teorema A2, pag. 251, [7]) *Suponga que $|u_i(x, t)| < K$ para $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, $1 \leq i \leq m$, y que f_i es de clase C^1 sobre $\sigma = \prod_{i=1}^m [-K, K]$, $1 \leq i \leq m$.*

Finalmente, suponga que $f_i(u) = 0$ si $u_i = 0$. Entonces existe $M_0 > 0$ que depende sólo de Ω, α, K , y df_i , tal que $|u_i|_{2+\alpha,E} < M_0$, donde $E = \Omega \times [2, \infty)$.

1.3. Desigualdad de Poincaré y primera identidad de Green

En esta sección presentamos la primera identidad de Green y la Desigualdad de Poincaré, desigualdad fundamental que nos permite relacionar en norma $L^2(\Omega)$ las funciones y sus derivadas.

Teorema 1.11. (Primera identidad de Green)(Teorema 3, pag. 628 [20]) *Sean $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Entonces*

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx$$

Teorema 1.12. (Desigualdad de Poincaré) (Teorema 11.11, pag. 113 [56]) *Sea $u \in W_2^1(\Omega)$. Si μ es el autovalor positivo más pequeño de $-\Delta$ sobre Ω (con la condición de frontera apropiada), resulta la siguiente desigualdad:*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \mu \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{si } u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (1.29)$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \mu \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ si } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (1.30)$$

donde $\bar{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u$, $|\Omega|$ es la medida de Ω ; y

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \mu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ si } u \in W_2^2(\Omega) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (1.31)$$

Si $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde Γ_2 tiene medida $(n-1)$ -dimensional positiva, entonces

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \mu \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (1.32)$$

para todo $u \in W_2^1(\Omega)$ con $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre Γ_1 , $\alpha(x)u + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre Γ_2 , $b > 0$. Aquí $\mu > 0$ es independiente de u .

Observación 1.2. $W_m^p(\Omega)$ es el espacio de Sobolev definido por

$$W_m^p(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u$ es la derivada parcial débil (o distribucional) de u .

Una exposición detallada sobre estos espacios y sus propiedades puede ser encontrada en Adams & Fournier [1].

CAPÍTULO 2

MODELO DEPREDADOR PRESA CON TASA DE MORTALIDAD VARIABLE, RESPUESTA FUNCIONAL HOLLING II, SIN DIFUSIÓN

En este capítulo nos concentraremos en describir la dinámica del siguiente modelo depredador presa

$$\begin{aligned} N' &= N \left[\varepsilon \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{aP}{\beta + N} \right], \\ P' &= P \left[-M(P) + \frac{bN}{\beta + N} \right], \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $N(t)$ y $P(t)$ son las cantidades de presa y depredador, respectivamente. $\varepsilon > 0$ es la tasa de crecimiento específica de la presa en ausencia de depredadores y sin limitación ambiental; en ausencia de depredadores la población presa crece logísticamente con capacidad de carga $K > 0$; la respuesta funcional del depredador es del tipo Holling II; donde a , β y b son coeficientes de saciedad o tasas de conversión. La mortalidad específica de los depredadores en ausencia de presa viene dada por la función

$$M(P) = \frac{\gamma + \delta P}{1 + P} = \delta + \frac{\gamma - \delta}{1 + P}, \tag{2.2}$$

la cual depende de la cantidad de depredadores; $\gamma > 0$ es la mortalidad a baja densidad, y δ es la mortalidad maximal con la suposición natural $\gamma < \delta$. La ventaja de este modelo sobre los demás modelos usados es que aquí la mortalidad del depredador no es ni una

función constante ni una función no acotada, por el contrario es una función acotada que se incrementa con la cantidad de depredadores.

Concretamente, en este capítulo se darán condiciones necesarias y suficientes para que el sistema sea disipativo y permanente. Se hace un estudio de la estabilidad global del punto de equilibrio no trivial, cuando este es único. Se muestra que es posible la existencia de una única solución periódica la cual emerge de una Bifurcación Hopf de tipo supercrítica y muere a través de una Bifurcación de Hopf de tipo subcrítica; lo cual sugiere que el modelo exhibe nuevos hechos dinámicos los cuales no están presentes en el modelo clásico; es decir, en el modelo con tasa de mortalidad constante.

2.1. Antecedentes del modelo

Comenzaremos esta sección haciendo un análisis de la localización y clasificación de los puntos de equilibrio del sistema (2.1). Esto permitirá manejar de una manera mucho mas adecuada el escenario donde se abordarán las interrogantes que son el objetivo de este capítulo.

Por simplicidad, escribiremos (2.1) como

$$N' = \frac{a}{b}h(N)[f(N) - P], \quad P' = P[h(N) - M(P)],$$

donde

$$f(N) = \frac{\varepsilon}{aK}(K - N)(\beta + N), \quad h(N) = \frac{bN}{\beta + N}.$$

Los puntos de equilibrio de (2.1) consiste de dos puntos críticos triviales $E_1 = (0, 0)$ y $E_2 = (K, 0)$ sobre la frontera de $\Omega = \{(N, P) : N \geq 0, P \geq 0\}$, y un conjunto de puntos críticos no triviales obtenidos como la intersección de las curvas

$$P = f(N), \quad P = g(N) := M^{-1}\left(\frac{bN}{\beta + N}\right) = -c\frac{N - d}{N - e}, \quad (2.3)$$

donde

$$c = \frac{b - \gamma}{b - \delta}, \quad d = \frac{\beta\gamma}{b - \gamma}, \quad e = \frac{\beta\delta}{b - \delta}.$$

Nótese que de (2.3), se sigue que cualquier equilibrio no trivial tiene que satisfacer la condición $0 < N < K$. Como estamos interesados en el caso $0 < \gamma < \delta$, se obtiene que $b - \delta < b - \gamma$, lo cual permite obtener los siguientes casos:

i) $0 < b - \delta < b - \gamma$,

ii) $b - \delta < b - \gamma < 0$, y

iii) $b - \delta < 0 < b - \gamma$.

Tomando en cuenta los resultados obtenidos por Lizana & Niño [47], se puede afirmar que:

- 1) Caso i): Si $d < K$ entonces existe exactamente un equilibrio no trivial, ver figura 1.a; y si $d \geq K$ entonces no existe equilibrio no trivial, ver figura 1.b.

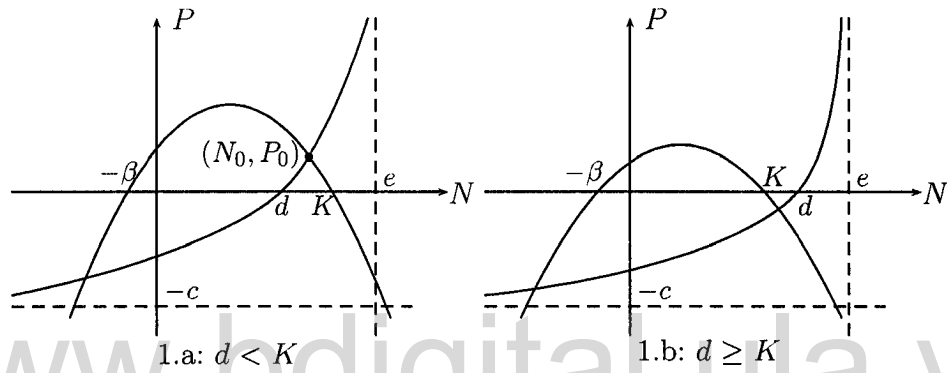


Figura 2.1: $0 < b - \delta < b - \gamma$

- 2) Caso ii): El sistema (2.1) no tiene equilibrio no trivial, ver figura 2.a .

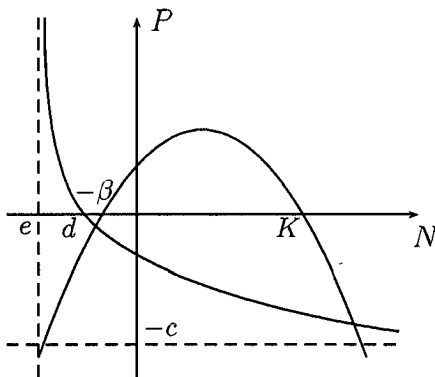


Fig. 2.a: $b - \delta < b - \gamma < 0$

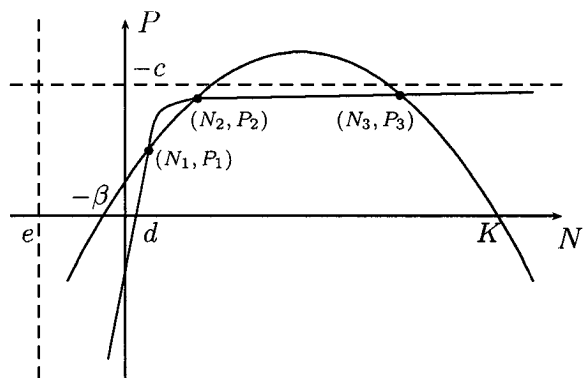


Fig. 2.b: $b - \delta < 0 < b - \gamma$

- 3) Caso iii): el sistema (2.1) puede tener uno, dos, o tres puntos de equilibrios no triviales, ver figura 2.b. N_1 y N_2 (N_2 y N_3) pueden colapsar, y así generar una bifurcación del tipo silla-nodo. Ambos equilibrios triviales son sillas.

Desde el punto de vista biológico, es más significativo los casos presentados en las figuras 1.a y 2.b. Es más, el estudio del caso iii) fue parcialmente abordado por Cavani & Farkas [13] y Lizana & Niño [47]. Específicamente, en [13] los autores hacen un análisis de la estabilidad local del equilibrio no trivial y su Bifurcación de Hopf. Demuestran también la estabilidad global para el equilibrio trivial $(K, 0)$. En [47], haciendo un análisis de bifurcación del sistema (2.1) dependiendo de todos los parámetros, demuestran la existencia de una órbita homoclínica, la cual bifurca generando localmente una única órbita periódica, la cual a su vez pertenece a la misma componente conexa que contiene la órbita periódica generada a través de una bifurcación de Andronov-Hopf de un equilibrio no trivial.

El Caso i) es muy interesante desde el punto de vista biológico y a su vez, representa un reto desde el punto de vista matemático. Obsérvese lo siguientes diagramas globales de bifurcación, obtenidos usando Xpp-Auto (Ermentrout [21]), y escogiendo a γ como parámetro de bifurcación.

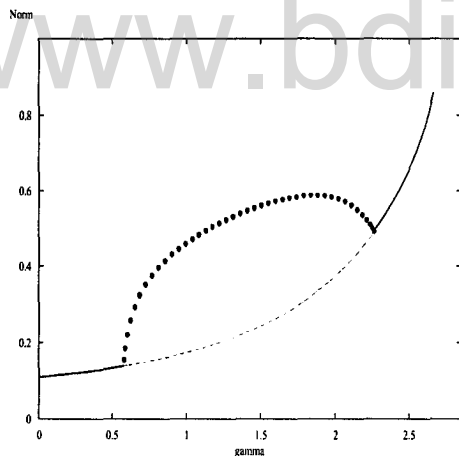


Fig. 3.a

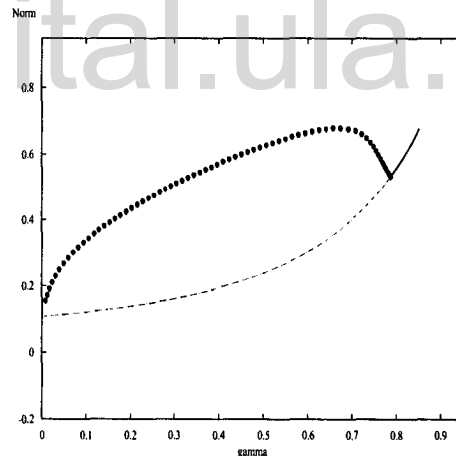


Fig. 3.b

El diagrama 3.a fue obtenido tomando $\delta = 2,8$, $a = 1$, $b = 3$, $K = 1$, $\varepsilon = 1$, $\beta = 0,1$, y $\gamma \in [0,001, 2,65]$. La bifurcación de Hopf ocurre en $\gamma_1 = 0,5806$ y $\gamma_2 = 2,265$, respectivamente. La curva con puntos negros representa la componente conexa de soluciones periódicas las cuales surgen de las bifurcaciones de Hopf. La otra curva representa la curva del equilibrio no trivial. Expliquemos, para $\gamma \in [0,001, \gamma_1)$ el equilibrio no trivial es asintóticamente estable, pierde su estabilidad en γ_1 a través de una bifurcación de Hopf supercrítica; debido a que las soluciones periódicas generadas son orbital asintótica-

mente estable. Mientras tanto, cuando γ esta entre γ_1 y γ_2 la solución periódica permanece única y estable; y el equilibrio no trivial es inestable. Finalmente, en γ_2 ocurre una bifurcación de Hopf subcrítica y el resto del punto gana de nuevo su estabilidad.

El diagrama 3.a sugiere la existencia de una única solución periódica la cual surge de una Bifurcación de Hopf supercrítica y culmina a través de una Bifurcación de Hopf subcrítica. Podemos pensar que esta situación es patológica, pero más adelante mostraremos que esto es una regla más que una excepción para el sistema (2.1). A su vez, estas evidencias numéricas muestran que el modelo exhibe nuevos hechos dinámicos los cuales no están presentes en el modelo clásico con tasa de mortalidad constante.

El diagrama 3b fue obtenido tomando $\delta = 0,9, a = 1, b = 1, K = 1, \varepsilon = 1, \beta = 0,1$, y $\gamma \in [0,001, 0,85]$. La bifurcación de Hopf ocurre en $\gamma = 0,7881$. Esta gráfica puede ser interpretada de forma análoga como se hizo para el diagrama 3.a.

Es importante resaltar que en el caso i) hemos obtenido un ejemplo concreto donde la dinámica del modelo exhibe diagramas de bifurcación diferentes, esta situación en particular no se presenta con ninguno de los modelos biológicos hasta ahora conocidos.

2.2. Disipatividad y permanencia

Como es de nuestro interés describir las propiedades globales del sistema (2.1), comenzaremos estudiando la disipatividad y la permanencia. El próximo teorema garantiza que el sistema (2.1) esta biológicamente bien definido y su dinámica esta concentrada sobre una región acotada del primer cuadrante de \mathbb{R}^2 .

Concretamente, el siguiente resultado se cumple:

Teorema 2.1. *Sea $\Omega = \{(N, P) \in \mathbb{R}^2 : N \geq 0, P \geq 0\}$. Entonces Ω es invariante bajo el flujo inducido por (2.1). Es más, si (N, P) es cualquier solución de (2.1), entonces*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq K, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} P(t) \leq \frac{bK(\varepsilon + \gamma)}{a\gamma} \quad (2.4)$$

Demostración. Tomando en cuenta que los ejes N y P son invariantes bajo el flujo inducido por (2.1), se sigue que el cuadrante positivo del plano de fase Ω es invariante respecto al sistema (2.1).

Ahora, demostraremos que la soluciones del sistema (2.1) están acotadas para $t \geq 0$. De la primera ecuación de (2.1), se sigue que

$$N' \leq \frac{\varepsilon}{K} N(K - N),$$

para todo $t \geq 0$, siempre que $N(t)$ este definida. Luego, usando argumentos de comparación estándar, obtenemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq K.$$

Con el objetivo de demostrar la acotación de $P(t)$, para $t \geq 0$, multipliquemos la primera ecuación de (2.1) por b y la segunda por a . Sumando estas ecuaciones y teniendo en mente que $M(P) \geq \gamma$, no es difícil obtener

$$Q' \leq -\gamma Q + b(\varepsilon + \gamma)N,$$

donde $Q = aP + bN$.

Ahora, para un $\eta > 0$ dado existe un $T_\eta > 0$ tal que $0 < N(t) < K + \eta$, para cada $t \geq T_\eta$. Tomando en cuenta este hecho y la desigualdad diferencial previa, se obtiene

$$Q(t) \leq e^{-\gamma(t-T_\eta)}Q(T_\eta) + \frac{b(\varepsilon + \gamma)(K + \eta)}{\gamma}(1 - e^{-\gamma(t-T_\eta)}), \text{ for any } t \geq T_\eta.$$

Por lo tanto, $\limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) \leq \frac{bK(\varepsilon + \gamma)}{\gamma}$, lo cual a su vez implica que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P(t) \leq \frac{bK(\varepsilon + \gamma)}{a\gamma}.$$



Observación 2.1. Como consecuencia inmediata de la demostración del resultado anterior se tiene que para un $\eta > 0$ dado

$$\mathcal{A}_\eta = [0, K + \eta] \times \left[0, \frac{bK(\varepsilon + \gamma)}{a\gamma} + \eta\right]$$

es un conjunto absorbente para el sistema (2.1).

La permanencia del sistema (2.1) la demostraremos usando el Teorema 1.2, el cual es debido a Hale & Waltman en [31]. Par evitar confusiones, usaremos la misma notación que aparece en la sección 1.1.

Teorema 2.2. El sistema (2.1) es uniformemente persistente si, y sólo si,

$$b - \gamma > 0 \quad \text{y} \quad d < K.$$

Demostración. Suponga que $b - \gamma > 0$ y $d < K$ y considere el conjunto $\Omega_0 = \text{interior}(\Omega)$. Entonces $\omega(\partial\Omega_0) = \{E_1, E_2\}$.

Cabe destacar que $E_1 = (0, 0)$ es siempre un punto silla, la variedad estable permanece sobre el eje P y la variedad inestable sobre el eje N . Bajo la hipótesis de nuestra afirmación $E_2 = (K, 0)$ es un silla también, la variedad estable esta sobre el eje N , y una de las ramas de la variedad inestable se encuentra en el interior de Ω . Se sigue que el flujo inducido por (2.1) es acíclico sobre $\partial\Omega_0$, y la variedad estable de E_2 no puede interceptar el interior del primer cuadrante. Por lo tanto, el Teorema 1.2 implica la persistencia uniforme del sistema (2.1).

La propuesta recíproca se sigue del hecho de que, si $b - \gamma < 0$ o $d \geq K$, entonces (2.1) no tiene equilibrio no trivial y el punto restante E_2 es global asintóticamente estable. ♦

2.3. Estabilidad global del equilibrio no trivial

De aquí en adelante restringiremos nuestra atención al caso i), es decir, $0 < b - \delta < b - \gamma$ y $d < K$. Para este caso, (2.1) tiene un único punto de equilibrio no trivial; el cual denotaremos por $E^* = (N_0, P_0)$. La matriz Jacobiana correspondiente al campo vectorial del sistema (2.1) evaluada en E^* esta dada por

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} \frac{a}{b}h(N_0)f'(N_0) & -\frac{a}{b}h(N_0) \\ P_0h'(N_0) & -P_0M'(P_0) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

El polinomio característico asociado a (2.5) es dado por

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad (2.6)$$

donde

$$p = \text{traza}(J(E^*)) = \frac{a}{b}h(N_0)f'(N_0) - P_0M'(P_0), \quad (2.7)$$

$$q = \det(J(E^*)) = -\frac{a}{b}h(N_0)f'(N_0)P_0M'(P_0) + \frac{a}{b}P_0h(N_0)h'(N_0) \quad (2.8)$$

Supongamos que $N_0 \in [(K - \beta)/2, K]$. En este caso $f'(N_0) \leq 0$. De aquí, $p < 0, q > 0$ y esto implica que E^* es local asintóticamente estable. Una consecuencia inmediata de este hecho es que: si E^* sufre una bifurcación de Hopf, ésta debe estar localizada estrictamente a la izquierda del vértice de la parábola $P = f(N)$. Esto sugiere que el modelo exhibe hechos diferentes a los encontrados en el modelo clásico. Cuando la tasa

de mortalidad es constante, la bifurcación de Hopf ocurre cuando E^* está exactamente localizado sobre el vértice de la parábola (ver Kuznetsov [39]).

El siguiente resultado excluye la existencia de soluciones periódicas inestables totalmente contenidas a la derecha de la recta $N = (K - \beta)/2$.

Teorema 2.3. *El sistema (2.1) no tiene soluciones periódicas totalmente contenidas en la región*

$$\Omega^* = \left\{ (N, P) : N \geq \frac{K - \beta}{2}, P > 0 \right\}$$

Demostración. Considere la función

$$G(N) = \frac{b}{a} \int_0^N \frac{h(s) - \delta}{h(s)} ds, \quad (2.9)$$

y suponga que el sistema (2.1) tiene una solución ω -periódica en Ω^* . Entonces

$$\begin{aligned} G'(N) &= \frac{b}{a} \frac{h(N) - \delta}{h(N)} N' = (h(N) - \delta)(f(N) - P) \\ &= (h(N) - M(P))(f(N) - P) + \frac{\gamma - \delta}{1 + P} (f(N) - P). \end{aligned}$$

Así

$$G'(N) = \frac{b}{a} \frac{\gamma - \delta}{1 + P} \frac{N'}{h(N)} + (f(N) - P) \frac{P'}{P}. \quad (2.10)$$

Denotemos por ω^* la órbita periódica y por Σ la región acotada por ω^* . Entonces integrando (2.10), usando el Teorema de Green y el hecho de que $f'(N) \leq 0$ en Σ , se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega^*} G'(N) dt = \int_{\omega^*} \left[\frac{b}{a} \frac{\gamma - \delta}{1 + P} \frac{dN}{h(N)} + (f(N) - P) \frac{dP}{P} \right], \\ &= \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \left[\frac{f'(N)}{P} + \frac{b}{a} \frac{\gamma - \delta}{(1 + P)^2} \frac{1}{h(N)} \right] dN dP < 0. \end{aligned}$$

La contradicción prueba nuestra afirmación. ◆

El siguiente teorema demuestra que bajo cierta configuración de parámetros el único punto de equilibrio no trivial es global asintóticamente estable.

Teorema 2.4. *Si*

$$K < \beta + d,$$

entonces E^ es global asintóticamente estable.*

Demostración. La demostración esta basada en una función de Liapunov. Definamos

$$V(N, P) = \mu \left[N - N_0 - N_0 \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right] + \left[P - P_0 - P_0 \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \right],$$

donde μ es un parámetro positivo, el cual será definido posteriormente. Es sencillo ver que $V(N_0, P_0) = 0$ y $V(N, P) > 0$ si $N \neq N_0$ ó $P \neq P_0$. Diferenciando V a lo largo de las trayectorias del sistema (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \mu \left[\frac{\varepsilon}{K}(K - N) - \frac{aP}{\beta + N} \right] (N - N_0) + \left[-\delta - \frac{\gamma - \delta}{1 + P} + \frac{bN}{\beta + N} \right] (P - P_0) \\ &= \mu \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon}{K}N_0 - \frac{aP_0}{\beta + N_0} + \frac{\varepsilon}{K}N_0 - \frac{\varepsilon}{K}N + \frac{aP_0}{\beta + N_0} - \frac{aP}{\beta + N} \right] (N - N_0) + \\ &\quad \left[-\delta - \frac{\gamma - \delta}{1 + P_0} + \frac{bN_0}{\beta + N_0} + \frac{\gamma - \delta}{1 + P_0} - \frac{\gamma - \delta}{1 + P} - \frac{bN_0}{\beta + N_0} + \frac{bN}{\beta + N} \right] (P - P_0) \\ &= -\mu \frac{\varepsilon}{K} (N - N_0)^2 + \mu a \left[\frac{P_0\beta + P_0N - P\beta - P_0N_0}{(\beta + N_0)(\beta + N)} \right] (N - N_0) - \\ &\quad \frac{\delta - \gamma}{(1 + P_0)(1 + P)} (P - P_0)^2 + b\beta \frac{(N - N_0)(P - P_0)}{(\beta + N)(\beta + N_0)} \\ &= -\mu \left[\frac{\varepsilon}{K} - \frac{aP_0}{(\beta + N_0)(\beta + N)} \right] (N - N_0)^2 + \\ &\quad \left[-\mu a + \frac{b\beta}{\beta + N_0} \right] \frac{(N - N_0)(P - P_0)}{\beta + N} - \frac{(\delta - \gamma)}{(1 + P_0)(1 + P)} (P - P_0)^2. \end{aligned}$$

Si se toma $\mu = \frac{b\beta}{a(\beta + N_0)}$, entonces

$$\frac{dV}{dt} = -\mu \left[\frac{\varepsilon}{K} - \frac{aP_0}{(\beta + N_0)(\beta + N)} \right] (N - N_0)^2 - \frac{(\delta - \gamma)}{(1 + P_0)(1 + P)} (P - P_0)^2.$$

Tomando en cuenta que $\frac{\varepsilon}{K}(K - N_0) = \frac{aP_0}{\beta + N_0}$ y la hipótesis $K < \beta + d$, un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{K} - \frac{aP_0}{(\beta + N_0)(\beta + N)} &= \frac{\varepsilon}{K} \left(1 - \frac{K - N_0}{\beta + N} \right) = \frac{\varepsilon}{K(\beta + N)} (\beta + N - K + N_0) \\ &> \frac{\varepsilon}{K(\beta + N)} (\beta - K + d) > 0. \end{aligned}$$

Así, $dV/dt < 0$ a lo largo de todas las trayectorias en el primer cuadrante excepto (N_0, P_0) . Lo cual demuestra que E^* es global asintóticamente estable. \blacklozenge

Observación 2.2. *El hecho que $K < \beta + d$ implica que el punto de equilibrio no trivial E^* tiene que estar localizado a la derecha del vértice de la parábola $P = f(N)$. Esto coincide con la intuición de que E^* tiene que ser global asintóticamente estable siempre y cuando E^* sea local asintóticamente estable.*

2.4. Bifurcación de Hopf

En esta sección, discutiremos la existencia de soluciones periódicas no constantes de amplitud pequeña para el sistema (2.1), vía Teorema de Bifurcación de Hopf (ver Wiggins [59]). Con el fin de hacer las cosas más simples, tomaremos a ε como parámetro de bifurcación. En consecuencia, es mucho más conveniente reescribir el polinomio característico (2.6) como

$$H_\varepsilon(\lambda) := \lambda^2 - p(\varepsilon)\lambda + q(\varepsilon) = 0.$$

Nótese que el sistema (2.1) es permanente. Usando el Teorema de Poincaré-Bendixson podemos concluir que $q(\varepsilon)$ es siempre positivo.

Paso 1:

Encontrar un $\varepsilon_0 > 0$, tal que $H_\varepsilon(\lambda) = 0$ tiene un par de raíces $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$ tal que $\lambda_1(\varepsilon_0)$, $\lambda_2(\varepsilon_0)$ son puras imaginarias.

Así, el primer objetivo es encontrar un $\varepsilon_0 > 0$, tal que $p(\varepsilon_0) = 0$; es decir, buscar un $\varepsilon_0 > 0$ donde la traza del polinomio característico se anule. Por lo tanto $H_{\varepsilon_0}(\lambda) = 0$ tendrá un par de raíces puras imaginarias.

Denotemos por $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$ las raíces de $H_\varepsilon(\lambda) = 0$ tal que $\lambda_1(\varepsilon_0)$, $\lambda_2(\varepsilon_0)$ son puras imaginarias. Esta afirmación se sigue aplicando el teorema de la función implícita.

Para simplificar el análisis, vamos a suponer que N_0 es también un parámetro. Así, la dependencia de los puntos de equilibrio

$$(N_0, P_0) := \left(N_0, \frac{\varepsilon}{aK}(K - N_0)(N_0 + \beta) \right) = \left(N_0, -c \frac{N_0 - d}{N_0 - e} \right) \quad (2.11)$$

sobre los parámetros esta mejor caracterizada identificando estos equilibrios con los puntos de una variedad 7-dimensional en el espacio definido por la ecuación

$$S : \frac{\varepsilon}{aK}(K - N_0)(N_0 + \beta) = -c \frac{N_0 - d}{N_0 - e}. \quad (2.12)$$

Tomando en cuenta esta observación y (2.7), obtenemos que

$$\begin{aligned} p(\varepsilon) &= \frac{a}{b} h(N_0) f'(N_0) - P_0 M'(P_0) \\ &= \frac{a}{b} \left(\frac{bN_0}{\beta + N_0} \right) \left(\frac{\varepsilon}{aK} (K - \beta - 2N_0) \right) - P_0 \frac{(\delta - \gamma)}{(1 + P_0)^2}. \end{aligned}$$

Como

$$1 + P_0 = 1 - c \frac{N_0 - d}{N_0 - e} = \frac{(\gamma - \delta)(N_0 + \beta)}{(b - \delta)N_0 - \beta\delta},$$

entonces

$$P_0 M'(P_0) = \frac{\varepsilon}{aK} (K - N_0) \frac{((b - \delta)N_0 - \beta\delta)^2}{(\delta - \gamma)(N_0 + \beta)}.$$

Así,

$$\begin{aligned} p(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon N_0 (K - \beta - 2N_0)}{K(\beta + N_0)} - \frac{\varepsilon (K - N_0) ((b - \delta)N_0 - \beta\delta)^2}{aK (\delta - \gamma)(\beta + N_0)} \\ &= \frac{-\varepsilon}{aK(\delta - \gamma)(\beta + N_0)} \left[2a(\delta - \gamma)N_0 \left(N_0 - \frac{K - \beta}{2} \right) - (b - \delta)^2 (N_0 - K)(N_0 - e)^2 \right] \\ &= \frac{-\varepsilon}{aK(\delta - \gamma)(\beta + N_0)} [\phi(N_0) - \psi(N_0)]; \end{aligned}$$

donde

$$\phi(N_0) = 2a(\delta - \gamma) \left(N_0 - \frac{K - \beta}{2} \right) N_0, \quad \psi(N_0) = (b - \delta)^2 (N_0 - K)(N_0 - e)^2.$$

Como $p(\varepsilon)$ es cero sin importar el tamaño de ε , y $p(\varepsilon) = 0$ si, y sólo si, $\phi(N_0) = \psi(N_0)$, veamos que existe un configuración de parámetros donde la ecuación $\phi(N_0) = \psi(N_0)$ es factible; para ello realizaremos un análisis gráfico de las funciones $\phi(N_0)$ y $\psi(N_0)$.

Fijemos los parámetros $b, K, \gamma, \beta, \delta$ tal que

$$\max \left\{ \frac{b}{b - \gamma}, \frac{\delta}{b - \delta} \right\} < \frac{K}{\beta} < \min \left\{ \frac{b + 3\gamma}{b - \gamma}, \frac{2b + (\delta + \gamma)}{2b - (\delta + \gamma)} \right\}. \quad (2.13)$$

Las funciones $\phi(N_0)$ y $\psi(N_0)$ están graficadas en la figura 2.4.

De la figura 2.4, se sigue que escogiendo

$$a > \frac{3(b - \delta)^3(b - \gamma)}{\beta[\delta(b - \gamma) + 3\gamma(b - \delta)][(b - \gamma) + 3(b - \delta)]}, \quad (2.14)$$

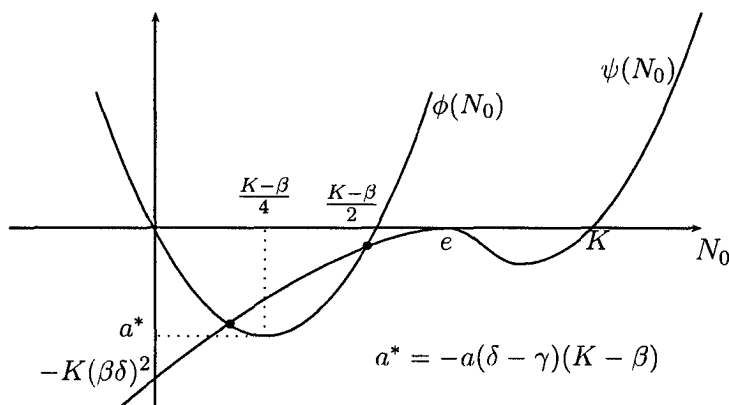


Figura 2.4: Gráfica de ϕ v/s ψ

la ecuación $\phi(N_0) = \psi(N_0)$ tiene una o dos soluciones como función de N_0 . Esto ciertamente demuestra nuestra afirmación.

Ahora de la segunda ecuación de (2.3) obtenemos que $P_0 = g(N_0)$ y de la primera ecuación de (2.3) obtenemos $\varepsilon_0 = P_0 a K [(N_0 + \beta)(K - N_0)]^{-1}$. Finalmente, denotando por S_1 la variedad descrita por $\phi(N_0) = \psi(N_0)$ sobre el espacio 6-dimensional $(a, b, \beta, K, \gamma, \delta, N_0)$, concluimos que $S \cap S_1 \neq \emptyset$.

Paso 2:

La condición de transversalidad, $\left. \frac{dRe(\lambda_1(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \neq 0$, se cumple.

Justamente sabemos que $H_\varepsilon(\lambda) = 0$ tiene un par de raíces $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$ tal que $\lambda_1(\varepsilon_0)$, $\lambda_2(\varepsilon_0)$ son puras imaginarias.

Finalmente, con el objetivo de concluir que E^* sufre una bifurcación de Hopf en ε_0 , necesitamos justamente mostrar que la condición de transversalidad,

$$\left. \frac{dRe(\lambda_1(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \left. \frac{dp}{d\varepsilon}(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \neq 0, \quad (2.15)$$

se cumple.

En efecto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} &= \frac{a}{b} N_0' [h'(N_0)f'(N_0) + h(N_0)f''(N_0)] - P_0' [M'(P_0) + P_0 M''(P_0)] \\ &= N_0' \left(\frac{a}{b} [h'(N_0)f'(N_0) + h(N_0)f''(N_0)] - f'(N_0) [M'(P_0) + P_0 M''(P_0)] \right). \end{aligned}$$

Usando (2.13), se obtiene

$$h'(N_0)f'(N_0) + h(N_0)f''(N_0) < 0 \quad \text{y} \quad M'(P_0) + P_0 M''(P_0) > 0.$$

Como $f'(N_0) > 0$, es suficiente mostrar que $N'_0(\varepsilon_0) \neq 0$ para concluir la demostración de nuestra afirmación.

De (2.3), sabemos que $f_\varepsilon(N_0) = g(N_0)$. Diferenciando esta igualdad respecto a ε , obtenemos

$$\frac{dN_0}{d\varepsilon} \left[g'(N_0) - \frac{\partial f}{\partial N_0} \right] = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon},$$

donde todas las expresiones están evaluadas en ε_0 . Como $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} > 0$, justamente necesitamos mostrar que $g'(N_0) - \frac{\partial f}{\partial N_0} \neq 0$. Supongamos que $g'(N_0) - \frac{\partial f}{\partial N_0} = 0$. Esto implica que

$$\frac{c(e-d)}{(N_0-e)^2} = \frac{2\varepsilon_0}{aK} \left(\frac{K-\beta}{2} - N_0 \right). \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.16) obtenemos,

$$\frac{e-d}{N_0-e} = -2 \left(\frac{N_0-d}{(K-N_0)(\beta+N_0)} \right) \left(\frac{K-\beta}{2} - N_0 \right) \quad (2.17)$$

y sustituyendo la expresión $\phi(N_0) = \psi(N_0)$ en (2.17) se obtiene

$$a(e-d)(\delta-\gamma)N_0(\beta+N_0) = (b-\delta)^2(N_0-d)(e-N_0)^3. \quad (2.18)$$

Nótese que (2.14) implica que $a(e-d)(\delta-\gamma)N_0(\beta+N_0) > (b-\delta)^2(N_0-d)(e-N_0)^3$, lo cual es una contradicción. Así,

$$\frac{dN_0}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_0)}{\left[g'(N_0) - \frac{\partial f}{\partial N_0}(\varepsilon_0) \right]} \neq 0,$$

y por lo tanto $\frac{dp}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) \neq 0$. Concluimos que el punto de equilibrio $(N_0(\varepsilon), P_0(\varepsilon))$ del sistema (2.1) sufre una bifurcación de Andronov-Hopf en $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Observación 2.3. *Para ver que el punto de equilibrio sufre una bifurcación de Hopf, hemos podido demostrar que la ecuación $\phi(N_0) = \psi(N_0)$ tiene dos soluciones para un amplio rango de valores en el espacio de parámetros (ver figura 2.4). Estas soluciones corresponde a los puntos donde ocurren las bifurcaciones de Hopf. Esto es un evidencia de que el diagrama de bifurcación 3.a es posible para un amplio rango de valores en el espacio de parámetros.*

2.5. Discusión y observaciones

El sistema (2.1) fue introducido en la tesis doctoral de Mario Cavani quien trabajo bajo la supervisión del Profesor Miklos Farkas. (ver [12]). Los principales resultados obtenidos en su PhD tesis están contenidos en [13] y [14]. El primer enfoque para estudiar a largo plazo el comportamiento de las soluciones de (2.1) fue llevado a cabo por Lizana & Niño [47]. Los resultados obtenidos fueron plasmados en la sección 2.1.

En el presente capítulo se pudo caracterizar la región donde el sistema es disipativo y permanente. En el caso donde $0 < b - \delta < b - \gamma$ y $d < K$, se demostró la estabilidad global del equilibrio no trivial, cuando este se mueve a lo largo del arco de parábola $P = f(N)$, entre el vértice y el punto $(K, 0)$; es decir, cuando el punto de equilibrio permanece a la derecha de la recta $N = (K - \beta)/2$.

También, se demostró que el punto de equilibrio sufre una bifurcación de Hopf, donde se pudo constatar que el diagrama 3.a es posible para un amplio rango de valores en el espacio de parámetros (ver figura 2.4).

Finalmente, el teorema 4.2 puede adaptarse sencillamente al caso iii), es decir, cuando $b - \delta < 0 < b - \gamma$. En efecto, el Teorema 2.4 solo requiere que $K < d + \beta$, con $d > 0$, y la unicidad del punto de equilibrio no trivial. Como en el caso $b - \gamma > 0$ se sigue que $d > 0$, con el fin de afirmar la estabilidad global del equilibrio no trivial, justo se necesitan condiciones que garanticen la unicidad de un equilibrio no trivial y que este esté localizado a la derecha del la recta $N = (K - \beta)/2$.

CAPÍTULO 3

MODELO DE PREDADOR PRESA CON TASA DE MORTALIDAD VARIABLE, DIFUSIÓN Y RESPUESTA FUNCIONAL HOLLING II

En este capítulo, tomando en cuenta el modelo (2.1) vamos a suponer de manera adicional que las especies N y P viven en un dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y con frontera $\partial\Omega$ suave. En consecuencia el modelo (2.1) toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= D_1 \Delta N + \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - a \frac{PN}{\beta + N}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= D_2 \Delta P - M(P)P + b \frac{NP}{\beta + N}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde, los coeficientes difusivos D_1 y D_2 son positivos y, al igual que en el capítulo 2, la tasa de mortalidad del depredador viene dada por $M(P) = (\gamma + \delta P)/(1 + P)$. Además supondremos que las especies confinadas en Ω no emigran hacia el exterior de $\partial\Omega$, es decir, consideraremos las siguientes condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneas:

$$\frac{\partial N}{\partial \nu}(x, t) = \frac{\partial P}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

y condiciones iniciales

$$N(x, 0) = \phi_1(x) \geq 0, \quad P(x, 0) = \phi_2(x) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Ahora $N(x, t)$ y $P(x, t)$ representan respectivamente las densidades de presa y depredador en $x \in \Omega$ y en el tiempo t .

Concretamente en este capítulo mostraremos que el sistema (3.1) está biológicamente bien definido y que posee la propiedad de permanencia, además bajo cierta configuración de los parámetros mostraremos que cuando este sistema posee un único punto de equilibrio, este es global asintóticamente estable. Por último mostraremos cual es la configuración de parámetros adecuada para que el sistema (3.1) no posea soluciones estacionarias positivas no constantes.

3.1. Persistencia y permanencia

En esta sección mostraremos primeramente que el sistema de reacción y difusión (3.1) genera un sistema dinámico el cual esta biológicamente bien definido sobre un espacio de Banach adecuado.

Sea $F = (f_1, f_2)$, $U = (N, P)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ y $D = \text{diag}[D_1, D_2]$, donde

$$f_1(N, P) = \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K} \right) N - a \frac{PN}{\beta + N}, \quad f_2(N, P) = -M(P)P + b \frac{PN}{\beta + N}.$$

Entonces el sistema (3.1) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) &= D\Delta U(x, t) + F(U), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \nu}(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ U(x, 0) &= \phi(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sea X el espacio de Banach $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$. La norma sobre X es definida por $|\phi| = |\phi_1| + |\phi_2|$. Sea A_N^0 y A_P^0 los operadores diferenciales $A_N^0 N = D_1 \Delta N$ y $A_P^0 P = D_2 \Delta P$, definidos sobre los dominios $D(A_N^0)$ y $D(A_P^0)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} D(A_N^0) &= \left\{ N \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : A_N^0 N \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial N}{\partial \nu}(x) = 0, x \in \partial\Omega \right\}, \\ D(A_P^0) &= \left\{ P \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : A_P^0 P \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial P}{\partial \nu}(x) = 0, x \in \partial\Omega \right\}. \end{aligned}$$

Las clausuras A_N de A_N^0 y A_P de A_P^0 en $C(\overline{\Omega})$ generan semigrupos analíticos de operadores lineales acotados $T_N(t)$ y $T_P(t)$ para $t \geq 0$ tal que

$$N(t) = T_N(t)\phi_1 \quad \text{y} \quad P(t) = T_P(t)\phi_2$$

son soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales abstractas en $C(\overline{\Omega})$ dadas por

$$N'(t) = A_N N(t), \quad N(0) = \phi_1 \in D(A_N),$$

$$P'(t) = A_P P(t), \quad P(0) = \phi_2 \in D(A_P),$$

donde

$$D(A_N) = \left\{ \phi \in C(\overline{\Omega}) : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_N(t) - I}{t} \phi \text{ existe} \right\}$$

y

$$D(A_P) = \left\{ \phi \in C(\overline{\Omega}) : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_P(t) - I}{t} \phi \text{ existe} \right\}$$

En el lenguaje de ecuaciones diferenciales parciales

$$N(x, t) = [T_N(t)\phi](x) \quad \text{y} \quad P(x, t) = [T_P(t)\phi](x)$$

son soluciones clásicas del problema de valor de frontera (3.2) con $f_1 = f_2 = 0$.

Sea $T(t) : X \rightarrow X$ definido por $T(t) = T_N(t) \times T_P(t)$. Entonces $T(t)$ es un semigrupo de operadores sobre X generado por el operador $A = A_N \times A_P$ definido sobre $D(A) = D(A_N) \times D(A_P)$ y $U(x, t) = [T(t)\phi](x)$ es la solución del sistema lineal

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = D\Delta U(x, t) \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad U(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \Omega.$$

Nótese que el término no lineal F es dos veces continuamente diferenciable en U . Por lo tanto, podemos definir el operador de evaluación $[F^*(\phi)](x) = F(\phi(x))$, el cual aplica X en si mismo y la ecuación (3.2) puede ser vista como la siguiente ecuación diferencial abstracta en X

$$u'(t) = Au(t) + F^*(u(t)), \quad u(0) = \phi. \tag{3.3}$$

Mientras una solución $u(t)$ de (3.3) puede ser obtenida bajo la restricción de que $\phi \in D(A)$, una solución moderada puede ser obtenida para cada $\phi \in X$ pidiendo solo que $u(t)$ sea una solución continua de la siguiente ecuación integral

$$u(t) = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)F^*(u(s))ds, \quad t \in [0, \omega) \tag{3.4}$$

donde $\omega = \omega(\phi) \leq \infty$. Restringiendo nuestra atención a las funciones ϕ en el conjunto

$$X_\Lambda = \{\phi \in X : \phi(x) \in \Lambda, x \in \bar{\Omega}\},$$

donde $\Lambda = \{(N, P) \in \mathbb{R}^2 : N \geq 0, P \geq 0\}$, y tomando en cuenta la definición de las funciones f_i , se obtiene que $f_1(0, P) = 0$ y $f_2(N, 0) = 0$ para $(N, P) \in \Lambda$. Así, el corolario 1.2 implica que la condición de Nagumo para la invarianza positiva de Λ se satisface, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \text{dist}(\Lambda, U + hF(U)) = 0 \quad U \in \Lambda. \quad (3.5)$$

Por otro lado, una aplicación directa del principio del máximo fuerte parabólico puede ser usada para mostrar que el semigrupo lineal $T(t)$ permanezca sobre X_Λ positivamente invariante, es decir,

$$T(t)X_\Lambda \subset X_\Lambda, \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

A continuación mostraremos que todas las soluciones del sistema (3.1) están acotadas y por lo tanto definidas para todo $t \geq 0$.

Teorema 3.1. *Sea (N, P) cualquier solución del sistema (3.1). Entonces*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{\Omega}} N(x, t) \leq K, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{\Omega}} P(x, t) \leq \frac{\varepsilon(\beta + K + 1)}{a}$$

Demostración. De la primera ecuación del sistema (3.1), se sigue que

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D_1 \Delta N \leq \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K}\right) N$$

siempre y cuando N este definida como una función de t .

Sea z solución de la ecuación diferencial

$$z'(t) = \varepsilon \left(1 - \frac{z(t)}{K}\right) z(t), \quad z(0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} N(x, 0).$$

Del principio de comparación, obtenemos $N(x, t) \leq z(t)$. Ahora, tomando en cuenta que para cualquier $\eta > 0$ existe un $t_\eta > 0$ tal que $z(t) < K + \eta$ para cada $t \geq t_\eta$, se sigue entonces que $N(x, t)$ esta definida para todo $t \geq 0$, y

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \Omega} N(x, t) \leq K.$$

Veamos ahora la acotación de $P(x, t)$. Tomando en cuenta la segunda ecuación del sistema (3.1) y el hecho de que $M(P) \geq \gamma$, obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial t} - D_2 \Delta P \leq -\gamma P + b \frac{PN}{\beta + N}. \quad (3.7)$$

Sea $M_0 = \frac{\varepsilon(\beta + K + 1)}{a}$ y veamos que no puede existir un $t_0 = t_0(M_0, \phi_2) > 0$ tal que

$$P(x, t) \geq M_0, \quad \forall t \geq t_0, \quad x \in \Omega \quad (3.8)$$

En efecto, supongamos que (3.8) es cierto. Tomando en cuenta que $N(x, t) \leq K + \eta$ para $t \geq t_\eta$, se obtiene

$$\frac{aP(x, t)}{\beta + N(x, t)} \geq \frac{aM_0}{\beta + N} \geq \frac{a\varepsilon(\beta + K + 1)}{a(\beta + K + \eta)} \geq \varepsilon, \quad \forall t \geq t^*$$

donde $t^* = \max\{t_\eta, T_0\}$.

Ahora, de la primera ecuación del sistema (3.1), se sigue que

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D_1 \Delta N = -\frac{\varepsilon}{K} N^2 + N \left(\varepsilon - a \frac{P}{\beta + N} \right) \leq -\frac{\varepsilon}{K} N^2, \quad \forall t \geq t^*.$$

Sea z solución de la ecuación diferencial

$$z'(t) = -\frac{\varepsilon}{K} z^2(t), \quad z(t^*) = \max_{x \in \bar{\Omega}} N(x, t^*).$$

Aplicando el principio de comparación obtenemos que $0 \leq N(x, t) \leq z(t)$ y como $z(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $N(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente en Ω .

Como $N(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $x \in \Omega$, existe $t_1 \geq t^*$ tal que

$$\frac{bN}{\beta + N} \leq \frac{\gamma}{2}, \quad \forall t \geq t_1$$

De la segunda ecuación del sistema (3.1)

$$\frac{\partial P}{\partial t} - D_2 \Delta P \leq P \left[-\gamma + \frac{bN}{\beta + N} \right] \leq -\frac{\gamma}{2} P, \quad \forall t \geq t_1$$

Aplicando nuevamente el principio de comparación, obtenemos que $P(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente en Ω . Contradicción.

Definamos ahora la función $\psi(x, t) = P(x, t) - M_0$, para $x \in \Omega$ y $t > 0$. Si existe algún t_0 tal que $\psi(x, t) \neq 0$ para cada $t > t_0$, diremos que los ceros de ψ están acotados. Si esto no es cierto diremos que los ceros de ψ no están acotados.

Si los ceros de ψ están acotados, entonces $0 < P(x, t) \leq M_0$ para cada $t > t_0$.

Si los ceros de ψ no están acotados, entonces el eje t es dividido por los ceros en una sucesión de intervalos J_n , $n \geq 1$. En cada intervalo ψ es de signo constante. Supongamos que $\psi(x, t) \geq 0$ para $t \in J_n$, $n = 1, 3, 5, \dots$. Como $P(x, t) \geq M_0$ sobre los intervalos

J_{2n-1} , podemos argumentar de forma análoga al caso (3.8) y obtener que $P_t - D_2 \Delta P \leq -(\gamma/2)P$ para $t \in J_{2n-1}$ y n suficientemente grande. Si z es solución de la ecuación diferencial $z'(t) = -(\gamma/2)z(t)$, entonces por el principio de comparación tenemos que $P(x, t) \leq z(t_{2n-1}) < M_0$ para n suficientemente grande. Esta contradicción completa la demostración. \blacklozenge

Observación 3.1. Como consecuencia inmediata de la demostración del teorema 3.1 se sigue que para $\eta > 0$ dado

$$\mathcal{A}_\eta = \left\{ (\phi_1, \phi_2) \in X_\Lambda : \phi_1(x) \in [0, K + \eta], \phi_2(x) \in \left[0, \frac{\varepsilon(\beta + K + 1)}{a} + \eta \right] \right\}$$

es un conjunto absorbente para el sistema (3.1)

Finalmente, el Teorema 3.1, las condiciones (3.5) y (3.6) juntas permiten aplicar el Teorema 1.6 para obtener el siguiente resultado

Lema 3.1. Para cada $\phi \in X_\Lambda$, (3.1) tiene una única solución moderada $u(t) = u(\phi, t) \in X_\Lambda$ y una solución clásica $U(x, t) = [u(t)](x)$. Es más, el conjunto X_Λ es positivamente invariante bajo el flujo $\Psi_t(\phi) = u(\phi, t)$ inducido por (3.1).

Así, el modelo (3.1) está biológicamente bien definido. Es más, del teorema 3.1 y usando el teorema 1.1, se sigue que la dinámica relevante del sistema (3.1) está concentrada en un conjunto compacto del espacio X_Λ , el cual está contenido en \mathcal{A}_η .

A continuación demostraremos que el sistema (3.1) es permanente, para ello usaremos el Teorema 1.2, el cual es debido a J.K. Hale & P. Waltman in [31]. Para evitar confusiones, usaremos las mismas notaciones introducidas en el capítulo 1, sección 1.1.

Teorema 3.2. El sistema (3.1) es uniformemente persistente si, y sólo si,

$$b - \gamma > 0 \quad \text{y} \quad d < K. \quad (3.9)$$

Demostración. Supongamos que se satisface la hipótesis (3.9). Sea

$$X_0 = \{\phi \in X_\Lambda : \phi(x) > 0, x \in \bar{\Omega}\},$$

entonces $X_\Lambda = X_0 \cup \partial X_0$.

Si $U(x, t; \phi)$ es la solución clásica del sistema (3.1) entonces el operador $S(t) : X_\Lambda \rightarrow X_\Lambda$ definido por $[S(t)\phi](x) := U(x, t; \phi)$ es compacto para $t > 0$, y una aplicación directa

del principio del máximo muestra que $S(t)$ es positivamente invariante sobre X_0 y ∂X_0 , además del teorema 3.1 se sigue que el sistema (3.1) es puntualmente disipativo.

Determinemos ahora $\tilde{A} = \bigcup_{\phi \in \partial\Omega_0} \omega(\phi)$. Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= D_1 \Delta N + \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K}\right) N, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial N}{\partial \nu} &= 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$N(x, 0) = \phi_1(x) > 0, \quad x \in \Omega,$$

y las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$u' = \varepsilon \left(1 - \frac{u}{K}\right) u, \quad u(0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} \phi_1(x) > 0,$$

$$w' = \varepsilon \left(1 - \frac{w}{K}\right) w, \quad w(0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \phi_1(x),$$

Como N , u y w satisfacen (3.10), tenemos del teorema de comparación

$$u(t) \leq N(x, t) \leq w(t), \quad t > 0, \quad (3.11)$$

para x uniformemente en Ω . Pero $u(t), w(t) \rightarrow K$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto, $N(x, t) \rightarrow K$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D_2 \Delta P - M(P)P \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

$$P(x, 0) = \phi_2(x) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Como $M(P) \geq \gamma$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial t} - D_2 \Delta P = -M(P)P \leq -\gamma P,$$

aplicando de nuevo el teorema de comparación, tenemos que $P(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Así $\tilde{A} = \{E_1, E_2\}$, donde $E_1 = (0, 0)$ y $E_2 = (K, 0)$.

Pongamos $M_1 = E_1$ y $M_2 = E_2$, entonces $M = M_1 \cup M_2$ forma un cubrimiento de \tilde{A} . Veamos ahora que \tilde{A} es aislado, M es acíclico y $W^s(M_i) \cap X_0 = \emptyset$, $i = 1, 2$.

Consideremos primero M_2 y supongamos que una órbita permanece en el eje N en una vecindad pequeña de M_2 , por compacidad el conjunto α -límite de esta órbita es no vacío y disjunto de M_2 ya que por (3.11) M_2 es un atractor global, pero la existencia del conjunto α -límite contradice la atractividad de M_2 .

Ahora, linealizando el sistema (3.1) alrededor de E_2 , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= D_1 \Delta N - \varepsilon N - \frac{a}{b} h(K) P \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= D_2 \Delta P + \frac{b - \gamma}{K + \beta} (K - d) P \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} = \frac{\partial P}{\partial \nu} = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$N(x, 0) = \phi_1(x), \quad P(x, 0) = \phi_2(x), \quad x \in \Omega$$

Sea \mathcal{U} la vecindad dada por la linealización de (3.12), una aplicación directa del teorema de comparación en la segunda ecuación del sistema (3.12), nos da que P debe incrementarse hasta donde (N, P) exista en \mathcal{U} , así que \mathcal{U} no puede contener una órbita completa y por lo tanto M_2 es aislado. Un argumento similar muestra que $W^s(M_2) \cap X_0 = \emptyset$, ya que cualquier punto de X_0 suficientemente cercano a M_2 la componente P debe incrementarse, en consecuencia la variedad estable de M_2 no puede interceptar a X_0 .

De manera análoga se prueba que M_1 es aislado y $W^s(M_1) \cap X_0 = \emptyset$. Como M_1 y M_2 son atractores entonces es claro que no pueden formar un ciclo. En consecuencia por el teorema 1.2, el sistema (3.1) es uniformemente persistente.

Ahora, persistencia implica la existencia de un equilibrio positivo (ver Hutson & Schmitt [36]), por lo tanto si (3.9) no se cumple, entonces (3.1) no tiene equilibrios positivos, por lo tanto el sistema no puede ser persistente. \blacklozenge

3.2. Estabilidad del equilibrio no trivial

De aquí en adelante al igual que en el Capítulo 2, Sección 2.3, restringiremos nuestra atención al caso $0 < b - \delta < b - \gamma$, en este caso el sistema (2.1) posee un único punto de equilibrio no trivial. Es claro que los puntos de equilibrio del sistema (2.1)

son soluciones del sistema (3.1). Enfocaremos nuestra atención al equilibrio no trivial $E^* = (N_0, P_0)$ del sistema (2.1) y en esta sección analizaremos la estabilidad local y global de la solución estacionaria constante no trivial E^* de (3.1).

La estabilidad de la solución estacionaria E^* del sistema (3.1) la estudiaremos mediante el análisis de estabilidad linealizada. Haciendo $W = U - E^*$ y recordando que

$$J = F'(E^*) = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}h(N_0)f'(N_0) & -\frac{a}{b}h(N_0) \\ P_0h'(N_0) & -P_0M'(P_0) \end{pmatrix},$$

entonces el sistema linealizado de la ecuación de reacción difusión (3.1) alrededor de E^* viene dada por

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D\Delta W + JW, \quad \frac{\partial W}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (3.13)$$

Sea $\psi_j(x)$ la j -ésima autofunción del operador Laplaciano $-\Delta$ sobre Ω con condiciones de frontera Neumann homogéneas. Es decir,

$$\Delta\psi_j + \lambda_j\psi_j = 0, \quad x \in \Omega, \quad \nu \cdot \nabla\psi_j = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

para escalares λ_j que satisfacen

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

La determinación de los pares (ϕ_j, λ_j) es un problema estándar (ver por ejemplo Folland [24] pp. 205-208). El operador diferencial $-\Delta$ con condiciones de frontera Neumann homogénea, es autoadjunto en $L_2(\Omega)$, es decir,

$$\int_{\Omega} -\Delta\psi_1 \cdot \psi_2 dx = \int_{\Omega} -\Delta\psi_2 \cdot \psi_1 dx$$

y es sencillo ver que

$$\lambda_j = \frac{\int_{\Omega} |\nabla\psi_j|^2 dx}{\int_{\Omega} \psi_j^2 dx} > 0$$

para todo $j \geq 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los ψ_j están normalizados así que $\|\psi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Es más, el conjunto de los ψ_j forman una base ortonormal para $L_2(\Omega)$ y cualquier función puede ser expandida como una serie de Fourier o expansión de autofunciones

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j\psi_j(x).$$

Usando estos preliminares, podemos resolver (3.13) expandiendo nuestra solución W vía

$$W(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(t) \psi_j(x) \quad (3.14)$$

donde cada $s_j(t) \in \mathbb{R}^2$.

Sustituyendo $W(x, t)$ en (3.13) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{j=0}^{\infty} s_j(t) \psi_j(x) \right] = D \Delta \left[\sum_{j=0}^{\infty} s_j(t) \psi_j(x) \right] + A \left[\sum_{j=0}^{\infty} s_j(t) \psi_j(x) \right],$$

entonces

$$\sum_{j=0}^{\infty} s'_j(t) \psi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} [D s_j(t) (-\lambda_j \psi_j(x)) + A s_j(t) \psi_j(x)],$$

lo cual implica que

$$\sum_{j=0}^{\infty} [s'_j(t) - (A - \lambda_j D)] \psi_j(x) = 0.$$

Así, tenemos en cada $\psi_j(x)$

$$\frac{ds_j}{dt} = B_j s_j,$$

donde B_j es la matriz

$$B_j = A - \lambda_j D.$$

Ahora la solución trivial $W = 0$ de (3.13) es asintóticamente estable si, y sólo si, cada $s_j(t)$ decae a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Esto es equivalente a la condición de que cada B_j posee todos sus autovalores con parte real negativa para todo j . Los autovalores de la matriz B_j están dados por

$$\det[B_j - \rho I] = \rho^2 - \text{traza } B_j \rho + \det B_j = 0,$$

donde

$$\text{traza } B_j = \text{traza } (A - \lambda_j D) = \text{traza } (A) - \lambda_j (D_1 + D_2) = (A_{11} + A_{22}) - \lambda_j (D_1 + D_2)$$

y

$$\det(B_j) = \det(A - \lambda_j D) = (A_{11} - \lambda_j D_1)(A_{22} - \lambda_j D_2) - A_{12}A_{21},$$

con

$$A_{11} = \frac{a}{b}h(N_0)f'(N_0), \quad A_{12} = -\frac{a}{b}h(N_0), \quad A_{21} = P_0h'(N_0), \quad A_{22} = -P_0M'(P_0).$$

Proposición 3.1. Si $N_0 \in [(K - \beta)/2, K]$. Entonces, el punto equilibrio E^* es local asintóticamente estable respecto al sistema (3.1).

Demostración. Tomando en cuenta que $N_0 \in [(K - \beta)/2, K]$, se sigue $f'(N_0) \leq 0$, lo cual implica que la traza $A < 0$. Por lo tanto, traza $B_j = \text{traza}(A) - \lambda_j(D_1 + D_2) < 0$, debido a que $\lambda_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, y $D_1, D_2 > 0$. Más aún, como $A_{11}, A_{22}, A_{12} < 0$ y $A_{21} > 0$, entonces $\det(B_j) > 0$, lo cual completa la demostración. \blacklozenge

A continuación mostraremos que existe una configuración de parámetros que hace al punto de equilibrio E^* un atractor global. Pero antes de mostrar el teorema de estabilidad global necesitamos unos lemas previos,

Lema 3.2. Sean a y b constantes positivas. Asuma que $\phi, \psi \in C^1([a, \infty))$, $\psi(t) \geq 0$ y ϕ esta acotada inferiormente. Si, $\phi'(t) \leq -b\psi(t)$ y $|\psi'(t)| \leq M$ en $[a, \infty)$ para alguna constante M , entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$.

Demostración. Como $\phi'(t) \leq -b\psi(t)$, entonces

$$\phi(t) - \phi(a) \leq -b \int_a^t \psi(s) ds,$$

lo cual implica

$$b \int_a^t \psi(s) ds \leq \phi(a) - \phi(t) < \infty,$$

así $\psi \in L^1([a, \infty))$.

Definamos

$$g(t) = \int_a^t \psi(s) ds$$

entonces $g'(t) = \psi(t)$ y $g(t) \rightarrow M_0$ cuando $t \rightarrow \infty$, además del hecho que $|\psi'(t)| \leq M$ se tiene que g' es uniformemente continua.

Veamos ahora que $g'(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, como g' es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $|g'(t) - g'(t_0)| < \varepsilon/2$ si $|t - t_0| < \delta$.

Consideremos ahora la sucesión $\{t_n\}_{n \geq 1}$ definida por $t_n = a + n\delta/2$, claramente $\{t_n\}$ genera una partición de $[a, \infty)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = M_0$. Por el teorema del valor medio

$$g(t_n) - g(t_{n-1}) = g'(\xi_n)\delta/2$$

para $\xi_n \in (t_{n-1}, t_n)$, lo cual a su vez implica que existe n_0 tal que

$$|g'(\xi_n)| < \varepsilon/2 \quad \text{si } n > n_0.$$

Ahora si $t > n_0$, entonces $|\psi(t)| = |g'(t)| \leq |g'(t) - g'(\xi_n)| + |g'(\xi_n)| < \varepsilon$. ◆

Lema 3.3. (Lema 3.2, pag. 212, [22]) *Suponga que para constantes positivas C_0 y u_0*

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0, \quad \|\nabla u(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - u_0\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\nabla u(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Teorema 3.3. *Suponga que*

$$K < \beta + d, \tag{3.15}$$

entonces E^* es global asintóticamente estable para el sistema (3.1).

Demostración. Sea (N, P) solución del sistema (3.1), como (3.1) es disipativo se sigue que todas las trayectorias están eventualmente uniformemente acotadas en $L^\infty(\Omega)$, es decir, existen constantes positivas C_0 y t_0 tal que

$$\|N(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0 \quad \text{y} \quad \|P(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0 \tag{3.16}$$

para $t > t_0$.

Definamos ahora

$$E(t) = \int_{\Omega} \left[\frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \left(N - N_0 - N_0 \ln \left(\frac{N}{N_0} \right) \right) + P - P_0 - P_0 \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \right] dx. \tag{3.17}$$

Nótese que $E(t)$ es no negativa y $E(t) = 0$ si, y sólo si, $(N, P) = (N_0, P_0)$.

Derivando (3.17) a lo largo de las trayectorias de (3.1) tenemos

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \int_{\Omega} \left[\frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \left(1 - \frac{N_0}{N}\right) N_t + \left(1 - \frac{P_0}{P}\right) P_t \right] dx \\
 &= \int_{\Omega} \left[\frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \left(1 - \frac{N_0}{N}\right) \left(D_1 \Delta N + \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - a \frac{PN}{\beta + N} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{P_0}{P}\right) \left(D_2 \Delta P - \left(\delta + \frac{\gamma - \delta}{1 + P} \right) P + b \frac{PN}{\beta + N} \right) \right] dx
 \end{aligned}$$

Aplicando la primera identidad de Green se obtiene

$$\int_{\Omega} \left(1 - \frac{N_0}{N}\right) \Delta N dx = -N_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla N|^2}{N^2} dx$$

$$\int_{\Omega} \left(1 - \frac{P_0}{P}\right) \Delta P dx = -P_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= -\frac{D_1 N_0 b \beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} \frac{|\nabla N|^2}{N^2} dx - D_2 P_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx \\
 &\quad + \frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} (N - N_0) \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{K} N + \frac{\varepsilon}{K} N_0 - \frac{\varepsilon}{K} N_0 - a \frac{P}{\beta + N} \right. \\
 &\quad \left. + a \frac{P_0}{\beta + N_0} - a \frac{P_0}{\beta + N_0} \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} (P - P_0) \left(-\delta - \frac{\gamma - \delta}{1 + P} - \frac{\gamma - \delta}{1 + P_0} + \frac{\gamma - \delta}{1 + P_0} + \frac{bN}{\beta + N} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{bN_0}{\beta + N_0} + \frac{bN_0}{\beta + N_0} \right) dx \\
 &= -\frac{D_1 N_0 b \beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} \frac{|\nabla N|^2}{N^2} dx - D_2 P_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx \\
 &\quad + \frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} (N - N_0) \left(-\frac{\varepsilon}{K} (N - N_0) - a \left(\frac{P}{\beta + N} - \frac{P_0}{\beta + N_0} \right) \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} (P - P_0) \left(-\frac{\gamma - \delta}{1 + P} + \frac{\gamma - \delta}{1 + P_0} + \frac{bN}{\beta + N} - \frac{bN_0}{\beta + N_0} \right) dx \\
& = -\frac{D_1 N_0 b \beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} \frac{|\nabla N|^2}{N^2} dx - D_2 P_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx \\
& + \frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} (N - N_0) \left(-\frac{\varepsilon}{K} (N - N_0) \right. \\
& \left. - a \left(\frac{(\beta + N_0)(P - P_0) - P_0(N - N_0)}{(\beta + N)(\beta + N_0)} \right) \right) dx \\
& + \int_{\Omega} (P - P_0) \left(\frac{(\gamma - \delta)(P - P_0)}{(1 + P)(1 + P_0)} + \frac{b\beta(N - N_0)}{(\beta + N)(\beta + N_0)} \right) dx \\
& = -\frac{D_1 N_0 b \beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} \frac{|\nabla N|^2}{N^2} dx - D_2 P_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx \\
& - \frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{K} - \frac{aP_0}{(\beta + N)(\beta + N_0)} \right) (N - N_0)^2 dx \\
& - (\delta - \gamma) \int_{\Omega} \frac{(P - P_0)^2}{(1 + P)(1 + P_0)} dx.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\varepsilon}{K}(N - N_0) = \frac{aP_0}{\beta + N_0}$, entonces

$$\frac{\varepsilon}{K} - \frac{aP_0}{(\beta + N)(\beta + N_0)} = \frac{\varepsilon}{K(\beta + N)}(\beta + N - K + N_0) > \frac{\varepsilon}{K(\beta + N)}(\beta - K + d) > 0$$

Así,

$$\begin{aligned}
E'(t) & \leq -\frac{D_1 N_0 b \beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} \frac{|\nabla N|^2}{N^2} dx - D_2 P_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx \\
& - \frac{b\beta}{a(\beta + N_0)} \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{K(\beta + N)}(\beta - K + d) \right) (N - N_0)^2 dx \\
& - (\delta - \gamma) \int_{\Omega} \frac{(P - P_0)^2}{(1 + P)(1 + P_0)} dx.
\end{aligned}$$

Por (3.16) existe C_0 tal que

$$E'(t) \leq -C_0 \left(\int_{\Omega} (|\nabla N|^2 + |\nabla P|^2) dx + \int_{\Omega} ((N - N_0)^2 + (P - P_0)^2) dx \right), \quad (3.18)$$

para t suficientemente grande.

Definamos ahora

$$\psi_1(t) = \int_{\Omega} (|\nabla N|^2 + |\nabla P|^2) dx, \quad \psi_2(t) = \int_{\Omega} ((N - N_0)^2 + (P - P_0)^2) dx,$$

luego

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &= 2 \int_{\Omega} (\nabla N_t \cdot \nabla N + \nabla P_t \cdot \nabla P) dx \\ &= 2 \int_{\Omega} (\nabla(D_1 \Delta N + f_1(N, P)) \cdot \nabla N + \nabla(D_2 \Delta P + f_2(N, P)) \cdot \nabla P) dx. \end{aligned}$$

Aplicando la primera identidad de Green tenemos

$$\psi_1'(t) = -2 \int_{\Omega} (D_1(\Delta N)^2 + f_1(N, P)\Delta N + D_2(\Delta P)^2 + f_2(N, P)\Delta P) dx$$

y

$$\psi_2'(t) = 2 \int_{\Omega} ((N - N_0)N_t + (P - P_0)P_t) dx.$$

Ahora, si $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ entonces por el Teorema 1.10 se tiene que $\psi'(t)$ esta acotada para $t \geq 2$. Aplicando ahora el Lema 3.2, $\psi(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|N(x, t) - N_0\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|P(x, t) - P_0\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\nabla N(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\nabla P(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Ahora, usando el lema 3.3 concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|N(x, t) - N_0\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|P(x, t) - P_0\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Esto completa la demostración. ◆

3.3. No existencia de soluciones estacionarias positivas no constantes

El objetivo principal de esta sección es demostrar que bajo ciertas restricciones sobre los parámetros, el sistema (3.1) no tiene soluciones estacionarias positivas no constantes. Para lograr este propósito, primero obtendremos cotas a priori para las soluciones estacionarias positivas del sistema (3.1).

El correspondiente problema de soluciones estacionarias del sistema (3.1) es el sistema elíptico

$$\begin{aligned} -D_1\Delta N &= \varepsilon \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - a \frac{PN}{\beta + N}, \quad x \in \Omega, \\ -D_2\Delta P &= -M(P)P + b \frac{NP}{\beta + N}, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} = \frac{\partial P}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Entenderemos por solución clásica del sistema (3.19) a soluciones en $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Para obtener estimaciones a priori superiores de las soluciones clásicas del sistema (3.19) necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.4. (Principio del Máximo. Lou & Ni [49]) *Suponga que $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, y $b_j(x) \in C(\bar{\Omega})$, $j = 1, \dots, m$.*

1. *Si $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisface $\Delta w(x) + \sum_{j=1}^m b_j(x)w_{x_j} + g(x, w(x)) \geq 0$ para $x \in \Omega$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0$ para $x \in \partial\Omega$ y $w(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} w$, entonces $g(x_0, w(x_0)) \geq 0$.*
2. *Si $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisface $\Delta w(x) + \sum_{j=1}^m b_j(x)w_{x_j} + g(x, w(x)) \leq 0$ para $x \in \Omega$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} \geq 0$ para $x \in \partial\Omega$ y $w(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} w$, entonces $g(x_0, w(x_0)) \leq 0$.*

Lema 3.5. *Sea K, β, b y $m_0 = \frac{bK}{\beta + K}$ tal que $\gamma < m_0 < \delta$, entonces para cada solución clásica positiva (N, P) del sistema (3.19) las siguientes estimaciones se cumplen*

$$\max_{\bar{\Omega}} N(x) \leq K, \quad \max_{\bar{\Omega}} P(x) \leq \frac{m_0 - \gamma}{\delta - m_0}. \quad (3.20)$$

Demostración. Sea $\phi_1 = D_1 N$. De la primera ecuación del sistema (3.19) obtenemos que

$$\Delta\phi_1 + N \left(\frac{\varepsilon}{K}(K - N) - \frac{aP}{\beta + N} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega; \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Sea $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $\phi_1(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} \phi_1$. Entonces por el Lema 3.4 y la positividad de N ,

$$\frac{\varepsilon}{K}(K - N(x_0)) - \frac{aP(x_0)}{\beta + N(x_0)} \geq 0.$$

Por lo tanto $N(x_0) < K$, lo cual a su vez implica que $\max_{\bar{\Omega}} N \leq K$.

Análogamente, tomando $\phi_2 = D_2 P$ obtenemos de la segunda ecuación del sistema (3.19),

$$\Delta\phi_2 + P \left[- \left(\frac{\gamma + \delta P}{1 + P} \right) + \frac{bN}{\beta + N} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega; \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Sea $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $\phi_2(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} \phi_2$. Entonces por el Lema 3.4 y la positividad de P ,

$$- \left(\frac{\gamma + \delta P(x_0)}{1 + P(x_0)} \right) + \frac{bN(x_0)}{\beta + N(x_0)} \geq 0.$$

Ahora

$$\frac{\gamma + \delta P(x_0)}{1 + P(x_0)} \leq \frac{bN(x_0)}{\beta + N(x_0)} \leq \frac{bK}{\beta + K} = m_0.$$

Así $P(x_0) \leq \frac{m_0 - \gamma}{\delta - m_0}$, lo cual a su vez implica que $\max_{\bar{\Omega}} P \leq \frac{m_0 - \gamma}{\delta - m_0}$. ◆

Teorema 3.4. *Sea λ_1 el autovalor más pequeño positivo del operador $-\Delta$ sobre Ω con condición de frontera Neumann homogénea. Si*

$$\lambda_1 D_1 > \varepsilon + \frac{a}{2} + \frac{bK_0}{2\beta}, \quad \lambda_1 D_2 > \frac{a}{2} + \frac{bK_0}{2\beta} + 1, \quad (3.21)$$

donde $K_0 = \frac{m_0 - \gamma}{\delta - m_0}$, entonces (3.19) no tiene soluciones clásicas positivas no constantes.

Demostración. Supongamos que (N, P) es una solución clásica positiva de (3.19). Sea

$$\bar{N} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} N dx \quad \text{y} \quad \bar{P} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} P dx.$$

Multiplicando la primera ecuación de (3.19) por $N - \bar{N}$, integrando sobre Ω y aplicando la primera identidad de Green, tenemos

$$\begin{aligned}
D_1 & \int_{\Omega} |\nabla(N - \bar{N})|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon}{K}(K - N)N - \frac{aPN}{\beta + N} \right] (N - \bar{N}) dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon}{K}(K - N)N - \frac{aPN}{\beta + N} - \frac{\varepsilon}{K}(K - \bar{N})\bar{N} + \frac{a\bar{P}\bar{N}}{\beta + \bar{N}} \right] (N - \bar{N}) dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\varepsilon(N - \bar{N}) - \frac{\varepsilon}{K}(N - \bar{N})(N + \bar{N}) - \frac{aPN}{\beta + N} + \frac{a\bar{P}\bar{N}}{\beta + \bar{N}} \right] (N - \bar{N}) dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\varepsilon \left(1 - \frac{1}{K}(N + \bar{N}) \right) (N - \bar{N})^2 \right. \\
&\quad \left. - a \left(\frac{\beta(PN - \bar{P}\bar{N}) + N\bar{N}(P - \bar{P})}{(\beta + N)(\beta + \bar{N})} \right) (N - \bar{N}) \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\varepsilon \left(1 - \frac{1}{K}(N + \bar{N}) \right) (N - \bar{N})^2 \right. \\
&\quad \left. - a \left(\frac{\beta P(N - \bar{N}) + \beta \bar{N}(P - \bar{P}) + N\bar{N}(P - \bar{P})}{(\beta + N)(\beta + \bar{N})} \right) (N - \bar{N}) \right] dx \\
&= \int_{\Omega} \left[\varepsilon \left(1 - \frac{1}{K}(N + \bar{N}) \right) (N - \bar{N})^2 - \frac{a\beta P(N - \bar{N})^2}{(\beta + N)(\beta + \bar{N})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a\bar{N}(P - \bar{P})(N - \bar{N})}{(\beta + \bar{N})} \right] dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\varepsilon(N - \bar{N})^2 - \frac{a\bar{N}}{\beta + \bar{N}}(P - \bar{P})(N - \bar{N}) \right] dx \\
&\leq \int_{\Omega} [\varepsilon(N - \bar{N})^2 + a|P - \bar{P}||N - \bar{N}|] dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\varepsilon(N - \bar{N})^2 + a \left(\frac{(P - \bar{P})^2}{2} + \frac{(N - \bar{N})^2}{2} \right) \right] dx.
\end{aligned}$$

Así

$$D_1 \int_{\Omega} |\nabla(N - \bar{N})|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left[\left(\varepsilon + \frac{a}{2} \right) (N - \bar{N})^2 + \frac{a}{2} (P - \bar{P})^2 \right] dx. \quad (3.22)$$

De manera similar, se obtiene

$$\begin{aligned} D_2 \int_{\Omega} |\nabla(P - \bar{P})|^2 dx &= \int_{\Omega} \left[- \left(\delta + \frac{\gamma - \delta}{1 + P} \right) P + \frac{bNP}{\beta + N} \right] (P - \bar{P}) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[- \left(\delta + \frac{\gamma - \delta}{1 + P} \right) P + \frac{bNP}{\beta + N} + \left(\delta + \frac{\gamma - \delta}{1 + \bar{P}} \right) \bar{P} - \frac{b\bar{N}\bar{P}}{\beta + \bar{N}} \right] (P - \bar{P}) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[-\delta(P - \bar{P}) - (\gamma - \delta) \left(\frac{P}{1 + P} - \frac{\bar{P}}{1 + \bar{P}} \right) \right. \\ &\quad \left. + b \left(\frac{NP}{\beta + N} - \frac{\bar{N}\bar{P}}{\beta + \bar{N}} \right) \right] (P - \bar{P}) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[-\delta(P - \bar{P}) + (\delta - \gamma) \frac{(P - \bar{P})}{(1 + P)(1 + \bar{P})} \right. \\ &\quad \left. + b \left(\frac{\beta(NP - \bar{N}\bar{P}) + N\bar{N}(P - \bar{P})}{(\beta + N)(\beta + \bar{N})} \right) \right] (P - \bar{P}) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\left(-\delta + \frac{(\delta - \gamma)}{(1 + P)(1 + \bar{P})} \right) (P - \bar{P}) \right. \\ &\quad \left. + b \left(\frac{\beta P(N - \bar{N}) + \bar{N}(\beta + N)(P - \bar{P})}{(\beta + N)(\beta + \bar{N})} \right) \right] (P - \bar{P}) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[-\gamma(P - \bar{P})^2 + \frac{b\beta P(N - \bar{N})(P - \bar{P})}{(\beta + N)(\beta + \bar{N})} + \frac{\bar{N}}{\beta + \bar{N}} (P - \bar{P})^2 \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{b}{\beta} K_0 |N - \bar{N}| |P - \bar{P}| + (P - \bar{P})^2 \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{b}{\beta} K_0 \left(\frac{(P - \bar{P})^2}{2} + \frac{(N - \bar{N})^2}{2} \right) + (P - \bar{P})^2 \right] dx \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_2 \int_{\Omega} |\nabla(P - \bar{P})|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left[\frac{bK_0}{2\beta} (N - \bar{N})^2 + \left(\frac{bK_0}{2\beta} + 1 \right) (P - \bar{P})^2 \right] dx. \quad (3.23)$$

Sumando (3.22) y (3.23) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [D_1 |\nabla(N - \bar{N})|^2 + D_2 |\nabla(P - \bar{P})|^2] dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left[\left(\varepsilon + \frac{a}{2} + \frac{bK_0}{2\beta} \right) (N - \bar{N})^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{bK_0}{2\beta} + 1 \right) (P - \bar{P})^2 \right] dx \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Poincaré, se sigue que

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \int_{\Omega} [D_1 (N - \bar{N})^2 + D_2 (P - \bar{P})^2] dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left[\left(\varepsilon + \frac{a}{2} + \frac{bK_0}{2\beta} \right) (N - \bar{N})^2 + \left(\frac{a}{2} - \gamma + \frac{bK_0}{2\beta} + 1 \right) (P - \bar{P})^2 \right] dx \end{aligned}$$

Pero, de (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \int_{\Omega} [D_1 (N - \bar{N})^2 + D_2 (P - \bar{P})^2] dx \\ & > \int_{\Omega} \left[\left(\varepsilon + \frac{a}{2} + \frac{bK_0}{2\beta} \right) (N - \bar{N})^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{bK_0}{2\beta} + 1 \right) (P - \bar{P})^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Esta contradicción muestra que $N = \bar{N}$ y $P = \bar{P}$. ◆

3.4. Discusión y observaciones

El sistema (3.1) fue estudiado primeramente por Cavani & Farkas [14] tomando $\Omega = [0, l]$. Establecieron condiciones para la estabilidad cuando existe un único punto de equilibrio (N_0, P_0) en el caso $b - \gamma < 0 < b - \delta$ (ver figura 2.b) y considerando uno de los coeficientes de difusión como parámetro de bifurcación mostraron que en cierto valor crítico ocurre una inestabilidad de Turing, es decir, la solución estacionaria constante (N_0, P_0) permanece estable respecto al sistema sin difusión pero inestable respecto al sistema con difusión. Posteriormente demuestran que en el valor crítico del parámetro de bifurcación da surgimiento a una bifurcación de Turing, es decir, aparecen soluciones estacionarias no constantes o patrones.

En este capítulo hemos discutido los principales hechos matemáticos exhibidos por el sistema de reacción y difusión (3.1). En concreto, se pudo caracterizar la región donde el sistema es disipativo y permanente. En el caso donde $0 < b - \delta < b - \gamma$ y $d < K$, se demostró la estabilidad global del equilibrio no trivial, lo cual implica biológicamente que las especies permanecen homogéneamente distribuidas en el espacio para tiempos muy grandes independientemente del tamaño de los coeficientes difusivos. Al igual que en el capítulo 2, cabe destacar que el Teorema 3.3 puede adaptarse sencillamente al caso $b - \delta < 0 < b - \gamma$ ya que el Teorema 3.3 solo requiere que $K < d + \beta$, con $d > 0$, y la unicidad del punto de equilibrio no trivial.

www.bdigital.ula.ve

www.bdigital.ula.ve

CAPÍTULO 4

MODELO DEPREDADOR PRESA CON DIFUSIÓN, RESPUESTA FUNCIONAL COCIENTE DEPENDIENTE Y RETARDO DISTRIBUIDO

En este capítulo presentamos un modelo depredador presa que contabiliza el tiempo que necesita la población depredadora para asimilar su comida. Dicho modelo fue introducido y estudiado por Lizana & Marín en [46] y se caracteriza por poseer difusión, respuesta funcional del tipo cociente dependiente y retardo distribuido.

El objetivo de este capítulo, además de introducir y describir el modelo, consiste en demostrar que mientras el sistema que describe el modelo es persistente el único punto de equilibrio no trivial asociado a éste es global asintóticamente estable.

4.1. Descripción del modelo

En esta sección describiremos el modelo depredador presa estudiado por Lizana & Marín [46]. Como mencionamos en la introducción, el modelo depredador presa con respuesta funcional del tipo cociente dependiente, conocido también como del tipo Michaelis-Menten (Kuang y Beretta [38]) y sin difusión es de la forma (4.1).

Las propiedades dinámicas más relevantes de este modelo han sido estudiadas por Berzovskaya et al. [5], Hsu et al. [34], Jost et al. [37], Kuang & Beretta [38], Lizana & Marín [45].

$$\begin{aligned}
 N'(t) &= (1 - N)N - \frac{sNP}{P + N} \\
 P'(t) &= \delta P \left(-r + \frac{N}{N + P} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Ahora si el depredador y la presa están confinados en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ suave, y la densidad de la presa y de depredador dependen de la variable espacial x y la variable temporal t , entonces (4.1) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N}{\partial t} &= d_1 \Delta N + (1 - N)N - \frac{sNP}{P + N}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\
 \frac{\partial P}{\partial t} &= d_2 \Delta P + \delta P \left(-r + \frac{N}{N + P} \right) \quad x \in \Omega, \quad t > 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

el cual ha sido estudiado, sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann homogénea por Lizana & Marín [45], Pang & Wang [50], Peng & Wang [51], Zeng [60], Duque et al. [19].

Podemos ahora suponer que el pasado de la población tiene un efecto residual sobre el futuro de la población, lo cual implica que aparecen tiempos de retardos continuos (efectos hereditarios), lo que conduce al siguiente sistema depredador presa gobernado por el sistema integrodiferencial parcial

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N}{\partial t} &= D_1 \Delta N + aN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{cNP}{mP + N}, \\
 \frac{\partial P}{\partial t} &= D_2 \Delta P - dP + f \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \frac{\xi G(x, y, t - \tau) N(y, \tau) P(y, \tau) e^{-\xi(t-\tau)}}{mP(y, \tau) + N(y, \tau)} dy d\tau,
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

las densidades de población de las especies presa y depredador están denotadas respectivamente por $N(x, t)$ y $P(x, t)$; $x \in \Omega$, $t > 0$; D_i , a , K , c , d , f son constantes positivas; $G(x, y, t - \tau)$ denota la probabilidad de que una presa al ser consumida por un depredador en la posición y en Ω en el tiempo $\tau < t$ contribuya en el incremento por un factor $\xi e^{-\xi(t-\tau)}$ en el tiempo t de la tasa de crecimiento de la densidad del depredador en la posición x . Con el fin de estudiar la solución de (4.3) tenemos que especificar funciones iniciales acotadas, continuas y no negativas, es decir,

$$N(x, t) = \varphi_1(x, t) \geq 0 \quad \text{y} \quad P(x, t) = \varphi_2(x, t) \geq 0 \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \leq 0,$$

y además supondremos condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneas,

$$\frac{\partial N}{\partial \nu}(x, t) = \frac{\partial P}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Hay que puntualizar que en el sistema (4.3), estamos asumiendo de una manera mucho más realista que el nivel actual del depredador afecta de manera instantánea el crecimiento de la presa, pero el crecimiento del depredador esta influenciado por la cantidad de presa en el pasado. De forma más precisa, el crecimiento del depredador depende del peso promedio de la respuesta funcional en el pasado por medio de la función $u_3(x, t)$ dada por la siguiente integral

$$u_3(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \frac{\xi G(x, y, t - \tau) N(y, \tau) P(y, \tau) e^{-\xi(t-\tau)}}{mP(y, \tau) + N(y, \tau)} dy d\tau, \quad (4.4)$$

Claramente esta suposición implica que la influencia del pasado se debilita exponencialmente y el número $1/\xi$ puede ser interpretado como la medida de la influencia del pasado. Así, para $\xi > 0$ más pequeño, más grande es el intervalo en el pasado en el cual los valores del cociente P/N es tomado en cuenta (ver Cavani & Farkas [13], Cushing [15], MacDonald [40]).

El sistema integro-diferencial parcial (4.3) puede ser transformado en un sistema parabólico débilmente acoplado. En efecto, como la función de peso exponencial satisface

$$\int_{-\infty}^t \xi e^{-\xi(t-\tau)} d\tau = \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi s} ds = 1$$

y G es una medida probabilística, escogeremos G de manera que satisfaga

$$\int_{\Omega} G(x, y, t) dy = 1.$$

Además, siguiendo Gopalsamy [29] G deber ser la solución fundamental del operador parabólico

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D_3 \Delta \right] G(\cdot, y, t) = 0, \quad y \in \Omega, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(x, y, t) = \delta(x - y), \quad x, y \in \Omega$$

donde D_3 es una constante positiva y δ es la función delta de Dirac.

Haciendo $u_1(x, t) = N(x, t)$ y $u_2(x, t) = P(x, t)$ y tomando en cuenta (4.4) el sistema (4.3) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \Delta u_1 + au_1 \left(1 - \frac{u_1}{K}\right) - \frac{cu_1 u_2}{mu_2 + u_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_2 \Delta u_2 - du_2 + fu_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= D_3 \Delta u_3 - \xi u_3 + \frac{\xi u_1 u_2}{mu_2 + u_1},\end{aligned}\tag{4.5}$$

donde $x \in \Omega$, $t > 0$. Entenderemos la relación entre estos dos sistemas de la siguiente manera: Si $(N, P) : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la solución de (4.3) correspondiente a funciones acotadas y no negativas φ_1 y φ_2 , entonces $(u_1, u_2, u_3) : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una solución de (4.5) con $u_1(x, 0) = \varphi_1(x, 0)$, $u_2(x, 0) = \varphi_2(x, 0)$, y

$$u_3(x, 0) = \int_{-\infty}^0 \int_{\Omega} \frac{\xi G(x, y, -\tau) \varphi_1(y, \tau) \varphi_2(y, \tau) e^{\xi \tau}}{m\varphi_2(y, \tau) + \varphi_1(y, \tau)} dy d\tau.$$

Recíprocamente, si (u_1, u_2, u_3) es cualquier solución de (4.5) definida sobre $\Omega \times [0, \infty)$ y acotada sobre $(-\infty, 0]$, entonces u_3 es dado por (4.4) y así (N, P) satisface (4.3).

Si consideramos ahora las siguientes transformaciones

$$u_1 \rightarrow \frac{u_1}{K}, \quad u_2 \rightarrow \frac{mu_2}{K}, \quad u_3 \rightarrow u_3, \quad t \rightarrow at,$$

el sistema (4.5) toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= d_1 \Delta u_1 + u_1(1 - u_1) - \frac{su_1 u_2}{u_2 + u_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= d_2 \Delta u_2 - \alpha u_2 + ru_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= d_3 \Delta u_3 - \beta u_3 + \frac{\gamma u_1 u_2}{u_2 + u_1},\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde

$$s = \frac{c}{am}, \quad \alpha = \frac{d}{a}, \quad r = \frac{mf}{aK}, \quad \beta = \frac{\xi}{a}, \quad \gamma = \frac{\xi K}{am}, \quad d_1 = \frac{D_1}{a}, \quad d_2 = \frac{D_2}{a}, \quad d_3 = \frac{D_3}{a}$$

representan los nuevos parámetros.

4.2. Antecedentes del modelo

En esta sección resumiremos los principales hechos que necesitaremos para cumplir con el objetivo de este capítulo. Ante todo, siguiendo los mismos pasos del capítulo 3, sección 3.1, se puede demostrar que el sistema de reacción-difusión (4.6) genera un sistema dinámico el cual esta biológicamente bien definido sobre el espacio de Banach $X = C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$.

El siguiente Teorema fue probado por Lizana & Marín [46], y muestra que todas las soluciones del sistema (4.6) están acotadas y por lo tanto definidas para todo $t \geq 0$.

Teorema 4.1. *Sea (u_1, u_2, u_3) solución de (4.6), con dato inicial no negativo $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$ con $\varphi_i(x) \neq 0, i = 1, 2, 3$. Entonces*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq 1,$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \frac{r\gamma}{\alpha\beta},$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \frac{\gamma}{\beta}.$$

Observación 4.1. *Como consecuencia inmediata de la prueba del resultado anterior se tiene que para un $\epsilon > 0$, dado el conjunto*

$$\mathcal{A}_\epsilon = \left\{ \varphi \in X_\Lambda : \varphi(x) \in [0, 1 + \epsilon] \times [0, \frac{r\gamma}{\alpha\beta} + \epsilon] \times [0, \frac{\gamma}{\beta} + \epsilon] \right\}$$

es un conjunto absorbente para el sistema (4.6), donde $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Además,

Lema 4.1. *Para cada $\varphi \in X_\Lambda = \{ \varphi \in X : \varphi(x) \in \Lambda = \mathbb{R}_+^3, x \in \bar{\Omega} \}$, (4.6) posee un única solución moderada $v(t) = v(\varphi, t) \in X_\Lambda$ y una solución clásica $U(x, t) = [v(t)](x)$. Más aún, el conjunto X_Λ es positivamente invariante bajo el flujo $\Psi_t(\varphi) = v(\varphi, t)$ inducido por (4.6).*

Así, el modelo (4.6) esta biológicamente bien definido. Usando el Teorema 1.1, se sigue que la dinámica relevante del sistema (4.6) esta concentrada sobre un conjunto compacto del espacio X_Λ , el cual esta contenido en \mathcal{A}_ϵ .

Consideremos ahora por un momento el sistema (4.6) pero sin difusión. Como el campo vectorial puede ser extendido por continuidad al origen, siempre podemos decir que $E_0 = (0, 0, 0)$ y $E_1 = (1, 0, 0)$ son equilibrios del sistema (4.6) sin difusión.

Es más, el sistema de reacción posee un único punto de equilibrio $E^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ si, y sólo si, una de las siguientes condiciones se cumple:

$$\begin{aligned} & i) \alpha\beta < r\gamma, \quad 0 < s < 1, \\ & ii) \alpha\beta < r\gamma < \frac{s}{s-1}\alpha\beta, \quad s > 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

en ambas situaciones las coordenadas del equilibrio no trivial están dadas por

$$v_1^* = \frac{(\alpha\beta - r\gamma)s + r\gamma}{r\gamma}, \quad v_2^* = \frac{(r\gamma - \alpha\beta)v_1^*}{\alpha\beta}, \quad v_3^* = \frac{(r\gamma - \alpha\beta)v_1^*}{r\beta}. \quad (4.8)$$

De Lizana & Marín [46], se sabe que

Proposición 4.1. (Teorema 3.1 [46])

1. Si $0 < s < 1$ y $r\gamma - \alpha\beta < 0$ entonces el punto de equilibrio $(1, 0, 0)$ es local asintóticamente estable.
2. Si $r\gamma - \alpha\beta > 0$ entonces el punto de equilibrio $(1, 0, 0)$ es inestable.

Claramente, cuando el punto de equilibrio E^* existe, $(1, 0, 0)$ es inestable.

Por otro lado observemos que la estabilidad del punto $(0, 0, 0)$ no puede ser estudiada por el método de la primera aproximación debido a que la extensión del campo vectorial no es diferenciable; su estudio fue llevado a cabo en [46].

El siguiente resultado provee información acerca de la estabilidad local del punto de equilibrio no trivial respecto al sistema de reacción y difusión.

Proposición 4.2. (Corolario 3.1 [46]) *Asuma que $0 < s < 1$ y $r\gamma > \alpha\beta$. Entonces, el punto de equilibrio E^* es local asintóticamente estable, si $\Delta_1 = A_1A_2 - A_3 > 0$; y cuando $\Delta_1 < 0$, el equilibrio E^* es inestable. Donde,*

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \mu s + \alpha + \beta + 1, & A_2(s) &= \mu(\beta + \alpha)s + \beta + \alpha + \alpha\beta\nu, \\ A_3(s) &= -\alpha\beta\nu^2 s + \alpha\beta\nu, & \mu &= \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma r}\right)^2 - 1, & \nu &= 1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma r}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3. Persistencia Uniforme

De aquí en adelante en este capítulo restringiremos nuestra atención al caso cuando $\alpha\beta < r\gamma$ y $0 < s < 1$.

El papel de esta sección es dar condiciones que impliquen que el depredador y la presa persistan indefinidamente, es decir, que ninguna de las especies llegue a extinguirse.

Definición 4.1. *El sistema (4.6) se dice que tiene la propiedad de la persistencia si, para cada dato inicial no negativo $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$ con $\varphi_i(x) \neq 0, i = 1, 2, 3$; existe una constante positiva $\varepsilon = \varepsilon(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ tal que la correspondiente solución (u_1, u_2, u_3) of (4.6) satisfice*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{\Omega}} u_i(x, t) \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3.$$

A pesar de que el siguiente resultado fue demostrado por Lizana & Marín [46], daremos aquí una demostración alternativa con el objetivo de obtener cotas inferiores más refinadas para las soluciones del sistema (4.6). Este hecho será crucial para demostrar la estabilidad global del punto de equilibrio no trivial.

Sea

$$x_1 = 1 - s, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = \frac{(1-s)(r\gamma - \alpha\beta)}{2\alpha\beta}, \quad y_2 = \frac{r\gamma}{\alpha\beta}, \tag{4.10}$$

$$z_1 = \frac{(1-s)(r\gamma - \alpha\beta)}{2r\beta}, \quad z_2 = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Teorema 4.2. *Si $0 < s < 1$ y $\alpha\beta < r\gamma$, entonces (4.6) tiene la propiedad de la persistencia. Es más, el conjunto cerrado y acotado*

$$\mathcal{D} = \{(u_1, u_2, u_3) : (u_1, u_2, u_3) \in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]\}$$

es eventualmente invariante para el sistema (4.6), es decir, para cualquier solución positiva (u_1, u_2, u_3) del sistema (4.6), las siguientes desigualdades se cumplen

$$1 - s \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq 1, \tag{4.11}$$

$$\frac{(1-s)(r\gamma - \alpha\beta)}{2\alpha\beta} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \frac{r\gamma}{\alpha\beta}, \tag{4.12}$$

$$\frac{(1-s)(r\gamma - \alpha\beta)}{2r\beta} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \frac{\gamma}{\beta}. \tag{4.13}$$

Demostración. Suponga que $\varphi_i(x) > 0$, $i = 1, 2, 3$. De la primera ecuación del sistema (4.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 &= u_1(1 - u_1) - s \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} \\ &= u_1(1 - s - u_1) + s \frac{u_2^2}{u_1 + u_2} \\ &\geq u_1(1 - s - u_1), \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u_1(x, 0) &= \varphi_1(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Sea z la solución del problema de valor inicial

$$z'(t) = z(t)(1 - s - z(t)), \quad z(0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} \varphi_1(x) > 0.$$

Usando el principio de comparación obtenemos que $u_1(x, t) \geq z(t)$, $\forall t > 0$. De aquí,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \geq 1 - s > 0. \quad (4.14)$$

Ahora, para $\eta = (1 - s)/2$ dado, existe $T > 0$, tal que

$$u_1(x, t) \geq \eta \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq T.$$

De aquí, tomando en cuenta las últimas dos ecuaciones del sistema (4.6) y la acotación de la función u_1 se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \Delta u_2 &= -\alpha u_2 + r u_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - d_3 \Delta u_3 &\geq -\beta u_3 + \frac{\gamma \eta u_2}{u_2 + \eta}. \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente sistema de comparación

$$\begin{aligned} w' &= -\alpha w + r z, \\ z' &= -\beta z + \frac{\gamma \eta w}{w + \eta}, \\ w(T) &= \min_{x \in \bar{\Omega}} u_2(x, T) > 0, \quad z(T) = \min_{x \in \bar{\Omega}} u_3(x, T) > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Teniendo en mente que $\alpha\beta < r\gamma$, y el hecho de que la divergencia del campo vectorial definido por el lado derecho del sistema anterior es negativo, se puede excluir la existencia de órbitas periódicas del sistema (4.15) y por lo tanto el único punto de equilibrio

positivo

$$(w^*, z^*) = \left(\eta \frac{r\gamma - \alpha\beta}{\alpha\beta}, \eta \frac{r\gamma - \alpha\beta}{r\beta} \right)$$

del sistema (4.15) es global asintóticamente estable en el primer cuadrante.

Es sencillo verificar que todas las hipótesis del Teorema de comparación 1.5 se satisfacen.

De aquí,

$$u_2(x, t) \geq w(t), \quad u_3(x, t) \geq z(t), \quad \forall t \geq T.$$

Lo cual a su vez implica que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \geq \eta \frac{r\gamma - \alpha\beta}{\alpha\beta}, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \geq \eta \frac{r\gamma - \alpha\beta}{r\beta}.$$

Esto completa nuestra demostración. ◆

4.4. Estabilidad global del equilibrio no trivial

En esta sección demostraremos el objetivo principal de este capítulo como es la estabilidad global del punto de equilibrio (v_1^*, v_2^*, v_3^*) del sistema (4.6). Con el fin de alcanzar este objetivo, usaremos básicamente el método de super y sub soluciones combinado con el método de iteración monótona. Concretamente, construiremos seis sucesiones, digamos $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$, $\{y_n^{(1)}\}$, $\{y_n^{(2)}\}$, $\{z_n^{(1)}\}$ y $\{z_n^{(2)}\}$, las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $x_n^{(1)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq x_n^{(2)}$,
- ii) $y_n^{(1)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq y_n^{(2)}$,
- iii) $z_n^{(1)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq z_n^{(2)}$,
- iv) $x_n^{(1)}$, $y_n^{(1)}$ y $z_n^{(1)}$ son sucesiones no decrecientes.
- v) $x_n^{(2)}$, $y_n^{(2)}$ y $z_n^{(2)}$ son sucesiones no crecientes.

Comenzaremos con la construcción de las sucesiones en forma recurrente. Sea

$$x_1^{(1)} = x_1, \quad x_1^{(2)} = x_2, \quad y_1^{(1)} = y_1, \quad y_1^{(2)} = y_2, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_1^{(2)} = z_2,$$

donde $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$ fueron definidos en (4.10).

De (4.11), (4.12) y (4.13) se sigue que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe un $T > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} - \varepsilon &\leq u_1(x, t) \leq x_1^{(2)} + \varepsilon \\ y_1^{(1)} - \varepsilon &\leq u_2(x, t) \leq y_1^{(2)} + \varepsilon \\ z_1^{(1)} - \varepsilon &\leq u_3(x, t) \leq z_1^{(2)} + \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.16)$$

para cada $t > T$, uniformemente para $x \in \bar{\Omega}$.

Ante todo, observe que (4.16) implica que

$$\frac{u_1}{x_1^{(2)} + \varepsilon} \leq 1 \leq \frac{u_2}{y_1^{(1)} - \varepsilon} \quad \text{y} \quad \frac{u_2}{y_1^{(2)} + \varepsilon} \leq 1 \leq \frac{u_1}{x_1^{(1)} - \varepsilon}.$$

De estas desigualdades, no es difícil obtener las siguientes estimaciones

$$\frac{y_1^{(1)} - \varepsilon}{y_1^{(1)} + x_1^{(2)}} \leq \frac{u_2}{u_1 + u_2} \leq \frac{y_1^{(2)} + \varepsilon}{y_1^{(2)} + x_1^{(1)}} \quad (4.17)$$

Usando la primera ecuación del sistema (4.6), y las estimaciones (4.16) y (4.17), obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 &= u_1(1 - u_1) - s \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} \\ &\leq u_1 \left[1 - s \frac{y_1^{(1)} - \varepsilon}{y_1^{(1)} + x_1^{(2)}} - u_1 \right], \quad t > T, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 &= u_1(1 - u_1) - s \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} \\ &\geq u_1 \left[1 - s \frac{y_1^{(2)} + \varepsilon}{y_1^{(2)} + x_1^{(1)}} - u_1 \right], \quad t > T, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Aplicando las técnicas de comparación a cada problema de arriba, obtenemos

$$1 - s \frac{y_1^{(2)} + \varepsilon}{y_1^{(2)} + x_1^{(1)}} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq 1 - s \frac{y_1^{(1)} - \varepsilon}{y_1^{(1)} + x_1^{(2)}}.$$

Ahora, de la segunda y tercera ecuación del sistema (4.6), las estimaciones (4.16), (4.17) y el principio de comparación, se sigue que

$$\frac{r}{\alpha} (z_1^{(1)} - \varepsilon) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \frac{r}{\alpha} (z_1^{(2)} + \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma (y_1^{(1)} - \varepsilon)(x_1^{(1)} - \varepsilon)}{\beta y_1^{(1)} + x_1^{(2)}} &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \frac{\gamma (y_1^{(2)} + \varepsilon)(x_1^{(2)} + \varepsilon)}{\beta y_1^{(2)} + x_1^{(1)}}. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, se puede asegurar que las siguientes desigualdades son válidas

$$\begin{aligned} 1 - s \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} + x_1^{(1)}} &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq 1 - s \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} + x_1^{(2)}}, \\ \frac{r}{\alpha} z_1^{(1)} &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \frac{r}{\alpha} z_1^{(2)}, \\ \frac{\gamma y_1^{(1)} x_1^{(1)}}{\beta y_1^{(1)} + x_1^{(2)}} &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \frac{\gamma y_1^{(2)} x_1^{(2)}}{\beta y_1^{(2)} + x_1^{(1)}}. \end{aligned}$$

Ahora, estamos en posición de definir los segundos términos de la sucesión bajo construcción, tomando

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} &= 1 - s \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} + x_1^{(1)}}, & x_2^{(2)} &= 1 - s \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} + x_1^{(2)}}, \\ y_2^{(1)} &= \frac{r}{\alpha} z_1^{(1)}, & y_2^{(2)} &= \frac{r}{\alpha} z_1^{(2)}, \\ z_2^{(1)} &= \frac{\gamma y_1^{(1)} x_1^{(1)}}{\beta y_1^{(1)} + x_1^{(2)}}, & z_2^{(2)} &= \frac{\gamma y_1^{(2)} x_1^{(2)}}{\beta y_1^{(2)} + x_1^{(1)}}. \end{aligned}$$

Repetiendo los pasos realizados anteriormente, obtenemos la recurrencia para construir las sucesiones $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$, $\{y_n^{(1)}\}$, $\{y_n^{(2)}\}$, $\{z_n^{(1)}\}$ y $\{z_n^{(2)}\}$. En realidad, las sucesiones están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_1, & x_n^{(1)} &= 1 - s \frac{y_{n-1}^{(2)}}{y_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}^{(1)}}, & x_1^{(2)} &= x_2, & x_n^{(2)} &= 1 - s \frac{y_{n-1}^{(1)}}{y_{n-1}^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}}, \\ y_1^{(1)} &= y_1, & y_n^{(1)} &= \frac{r}{\alpha} z_{n-1}^{(1)}, & y_1^{(2)} &= y_2, & y_n^{(2)} &= \frac{r}{\alpha} z_{n-1}^{(2)}, \\ z_1^{(1)} &= z_1, & z_n^{(1)} &= \frac{\gamma y_{n-1}^{(1)} x_{n-1}^{(1)}}{\beta y_{n-1}^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}}, & z_1^{(2)} &= z_2, & z_n^{(2)} &= \frac{\gamma y_{n-1}^{(2)} x_{n-1}^{(2)}}{\beta y_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}^{(1)}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Observación 4.2. Vale la pena puntualizar que de la manera en que fueron construidas las sucesiones, ellas satisfacen automáticamente las propiedades i)-iii) enumeradas anteriormente.

Proposición 4.3. *Supongamos que*

$$\alpha\beta \leq \left(\frac{1-s}{1+s} \right) r\gamma.$$

Entonces, las sucesiones $\{x_n^{(1)}\}$, $\{y_n^{(1)}\}$, $\{z_n^{(1)}\}$ son sucesiones no decrecientes; y , $\{x_n^{(2)}\}$, $\{y_n^{(2)}\}$, $\{z_n^{(2)}\}$ son sucesiones no crecientes.

Demostración. La demostración la llevaremos a cabo por inducción. De la definición de los primeros términos de las sucesiones $\{x_n^{(1)}\}$, $\{y_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$, $\{y_n^{(2)}\}$, $\{z_n^{(2)}\}$ sin restricción adicional sobre los parámetros, obtenemos inmediatamente

$$x_1^{(1)} = 1 - s \leq 1 - s \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} + x_1^{(1)}} = x_2^{(1)}, \quad x_2^{(2)} = 1 - s \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} + x_1^{(2)}} \leq 1 = x_1^{(2)},$$

$$y_1^{(1)} = \frac{(1-s)(r\gamma - \alpha\beta)}{2\alpha\beta} = \frac{r}{\alpha} z_1^{(1)} = y_2^{(1)}, \quad y_2^{(2)} = \frac{r}{\alpha} z_1^{(2)} = \frac{r\gamma}{\alpha\beta} = y_1^{(2)}$$

$$z_2^{(2)} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{y_1^{(1)} x_1^{(1)}}{y_1^{(1)} + x_1^{(2)}} \leq \frac{\gamma}{\beta} = z_1^{(2)}.$$

Un cálculo directo muestra que $z_1^{(1)} \leq z_2^{(1)}$ si, y sólo si, $\alpha\beta \leq \left(\frac{1-s}{1+s} \right) r\gamma$.

Supongamos ahora que la afirmación es cierta para k ; es decir, $x_{k-1}^{(1)} \leq x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)} \leq x_{k-1}^{(2)}$, $y_{k-1}^{(1)} \leq y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)} \leq y_{k-1}^{(2)}$, $z_{k-1}^{(1)} \leq z_k^{(1)}$ y $z_k^{(2)} \leq z_{k-1}^{(2)}$.

Después de un largo pero directo cálculo, obtenemos que

$$x_k^{(1)} = 1 - s \frac{y_{k-1}^{(2)}}{y_{k-1}^{(2)} + x_{k-1}^{(1)}} \leq 1 - s \frac{y_k^{(2)}}{y_k^{(2)} + x_k^{(1)}} = x_{k+1}^{(1)},$$

$$x_{k+1}^{(2)} = 1 - s \frac{y_k^{(1)}}{y_k^{(1)} + x_k^{(2)}} \leq 1 - s \frac{y_{k-1}^{(1)}}{y_{k-1}^{(1)} + x_{k-1}^{(2)}} = x_k^{(2)},$$

$$y_k^{(1)} = \frac{r}{\alpha} z_{k-1}^{(1)} \leq \frac{r}{\alpha} z_k^{(1)} = y_{k+1}^{(1)}, \quad y_{k+1}^{(2)} = \frac{r}{\alpha} z_k^{(2)} \leq \frac{r}{\alpha} z_{k-1}^{(2)} = y_k^{(2)},$$

$$z_k^{(1)} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{y_{k-1}^{(1)} x_{k-1}^{(1)}}{y_{k-1}^{(1)} + x_{k-1}^{(2)}} \leq \frac{\gamma}{\beta} \frac{y_k^{(1)} x_k^{(1)}}{y_k^{(1)} + x_k^{(2)}} = z_{k+1}^{(1)},$$

$$z_{k+1}^{(2)} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{y_k^{(2)} x_k^{(2)}}{y_k^{(2)} + x_k^{(1)}} \leq \frac{\gamma}{\beta} \frac{y_{k-1}^{(2)} x_{k-1}^{(2)}}{y_{k-1}^{(2)} + x_{k-1}^{(1)}} = z_k^{(2)}.$$

Esto completa la prueba de nuestra afirmación. \blacklozenge

La proposición 4.3 implica que todas las sucesiones en (4.18) son convergentes. Denotemos sus límites por

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(1)} = x^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(2)} = x^{(2)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(1)} = y^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(2)} = y^{(2)}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(1)} = z^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(2)} = z^{(2)}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta esto, la definición de las sucesiones y $n \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 1 - s \frac{y^{(2)}}{y^{(2)} + x^{(1)}}, \quad x^{(2)} = 1 - s \frac{y^{(1)}}{y^{(1)} + x^{(2)}}, \\ y^{(1)} &= \frac{r}{\alpha} z^{(1)}, \quad y^{(2)} = \frac{r}{\alpha} z^{(2)}, \\ z^{(1)} &= \frac{\gamma}{\beta} \frac{y^{(1)} x^{(1)}}{y^{(1)} + x^{(2)}}, \quad z^{(2)} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{y^{(2)} x^{(2)}}{y^{(2)} + x^{(1)}}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Lo cual inmediatamente implica que

$$\begin{aligned} x_1 \leq x^{(1)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_1(x, t) \leq x^{(2)} \leq x_2, \\ y_1 \leq y^{(1)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_2(x, t) \leq y^{(2)} \leq y_2, \\ z_1 \leq z^{(1)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\bar{\Omega}} u_3(x, t) \leq z^{(2)} \leq z_2. \end{aligned}$$

El próximo teorema es el principal resultado de este capítulo.

Teorema 4.3. *Si*

$$\alpha\beta \leq \left(\frac{1-s}{1+s} \right) r\gamma \quad \text{y} \quad 0 < s < 1,$$

entonces el único punto de equilibrio constante positivo (v_1^, v_2^*, v_3^*) del sistema (4.6) es un atractor global.*

Demostración. Con el fin de demostrar este teorema, es suficiente ver que $x^{(1)} = x^{(2)} = v_1^*$, $y^{(1)} = y^{(2)} = v_2^*$ y $z^{(1)} = z^{(2)} = v_3^*$. En efecto, de (4.19), se tiene,

$$\begin{cases} x^{(1)} [y^{(2)} + x^{(1)}] = y^{(2)} + x^{(1)} - sy^{(2)}, \\ x^{(2)} [y^{(1)} + x^{(2)}] = y^{(1)} + x^{(2)} - sy^{(1)}, \end{cases} \tag{4.20}$$

y

$$\begin{cases} y^{(1)} = \frac{r\gamma}{\alpha\beta}x^{(1)} - x^{(2)}, \\ y^{(2)} = \frac{r\gamma}{\alpha\beta}x^{(2)} - x^{(1)}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Sustituyendo (4.21) en (4.20), se obtiene

$$\frac{r\gamma}{\alpha\beta}x^{(1)}x^{(2)} = \frac{r\gamma}{\alpha\beta}(1-s)x^{(2)} + sx^{(1)} \quad (4.22)$$

y

$$\frac{r\gamma}{\alpha\beta}x^{(1)}x^{(2)} = \frac{r\gamma}{\alpha\beta}(1-s)x^{(1)} + sx^{(2)} \quad (4.23)$$

De (4.22) y (4.23), se obtiene

$$\left[\frac{r\gamma}{\alpha\beta}(1-s) - s \right] x^{(1)} = \left[\frac{r\gamma}{\alpha\beta}(1-s) - s \right] x^{(2)}.$$

Como $\frac{r\gamma}{\alpha\beta}(1-s) - s \neq 0$, entonces $x^{(1)} = x^{(2)}$. Esto junto con (4.21) y (4.19) muestra que $y^{(1)} = y^{(2)}$ y $z^{(1)} = z^{(2)}$.

Finalmente, usando (4.22), (4.21) y (4.19), se obtiene que $x^{(1)} = v_1^*$, $y^{(1)} = v_2^*$ y $z^{(1)} = v_3^*$. Esto completa la demostración. \blacklozenge

4.5. Discusión y observaciones

Hay que puntualizar que para el sistema depredador presa con retardo pero sin difusión Tang, S. et al en [57] y para el sistema depredador presa con difusión pero sin retardo Fan, Y. H. et al en [22] discutieron la estabilidad global del equilibrio no trivial.

En ambos casos ellos consideraron una respuesta funcional del tipo cociente dependiente. En este capítulo se consideraron ambos casos juntos, y se pudo conectar directamente la estabilidad global del equilibrio no trivial con la persistencia del sistema; lo cual a su vez es completamente natural desde un punto de vista biológico.

Ahora, si se observa la región de estabilidad global dada por el Teorema 4.3, se pueden dar cuenta de que existe un “agujero”, donde no se sabe nada acerca de la estabilidad global. La respuesta a esta pregunta esta relacionado con cuándo el equilibrio no trivial es local asintóticamente estable para cada $0 < s < 1$ y $\alpha\beta < r\gamma$. Desafortunadamente, esta interrogante no fue respondida por la proposición 4.2. No obstante, se puede observar en la figura 1, haciendo $s \rightarrow 0$, que la región de atractividad global del equilibrio

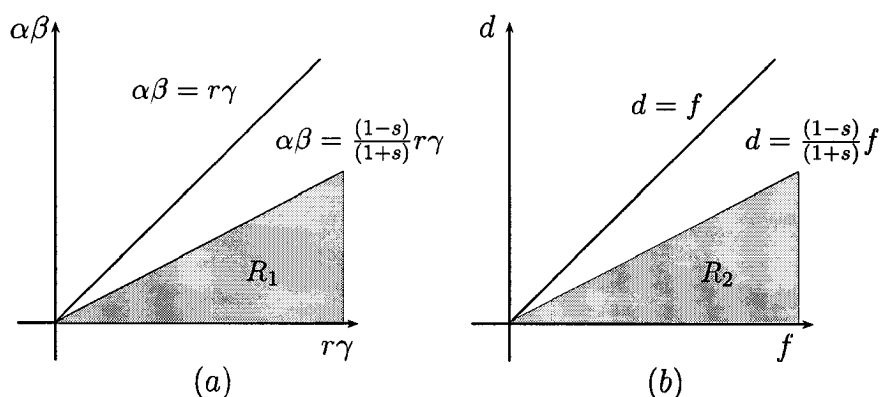


Figura 4.1: (a): R_1 región de estabilidad global en las variables transformadas; (b): R_2 región de estabilidad global en las variables originales.

no trivial tiende a la región donde ciertamente se sabe que el sistema es persistente. Tomando en cuenta que en las variables originales $s = c/am$, se tienen grandes posibilidades de jugar alrededor de ampliar o disminuir la región de atracción global del equilibrio no trivial.

www.bdigital.ula.ve

www.bdigital.ula.ve

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Adams, R. A., Fournier, J. F., Sobolev Spaces. Second Edition. Academic Press (2003).
- [2] Amann, H., Dynamic theory of quasilinear parabolic equations I: Abstract evolution equations. *Nonlinear Analysis TMA.* **2** (1988) 895-919.
- [3] Amann, H., Dynamic theory of quasilinear parabolic systems III: Global existence. *Math. Z.* **202** (1989) 219-250.
- [4] Amann, H., Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II: Reaction-Difusion systems. *Differential and Integral Equations.* **3** (1990) 13-75.
- [5] Berezovskaya, F., Karev, G., Arditi, R. Parametric analysis of the ratio-dependent predator-prey model. *J. Math. Biol.* **43** (2001) 221-246.
- [6] Billoti, J., LaSalle, J. P., Periodic Dissipative Processes. *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1971) 1082-1089.
- [7] Brown, K. J., Dunne, P. C., Gardner, R. A., A Semilinear Parabolic System Arising in the Theory of Superconductivity. *J. Diff. Eq.* **40** (1981) 232-252.
- [8] Butler, G., Freedman, H. I., Waltman, P., Uniformly persistence systems. *J. Differential Equations* **63** (1985) 425-430.
- [9] Cantrell, R. S., Cosner, C., Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley (2003).

- [10] Cosner, C., DeAngelis, D. L., Ault, J. S., Olson, D. B., Effects of spatial grouping on the functional response of predators. *Theoretical Population Biology*. **56** (1999) 65-75.
- [11] Casten, R. G., Holland, C. J., Stability Properties of Solutions to Systems of Reaction-Diffusion Equations. *SIAM J. Appl. Math.* **33** (2) (1977) 353-364.
- [12] Cavani, M., Sistemas depredador presa con memoria y distribución espacial. PhD thesis. Abril de 1990. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [13] Cavani, M., Farkas, M., Bifurcations in a Predator-Prey Model With Memory and Diffusion. I: Andronov Hopf Bifurcation. *Acta Math. Hungar.* **63** (1994) 213-229.
- [14] Cavani, M., Farkas, M., Bifurcations in a Predator-Prey Model With Memory and Diffusion. II: Turing Bifurcation. *Acta Math. Hungar.* **63** (1994) 375-393.
- [15] Cushing, J., M., *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*. Springer-Verlag. Heidelberg (1974).
- [16] Duque, C., Lizana, M., Partial characterization of the global dynamic of a predator-prey model with non constant mortality rate. *Differential Equation and Dynamical Systems*. Por aparecer.
- [17] Duque, C., Lizana, M., Partial characterization of the global dynamic of a predator-prey model with non constant mortality rate and diffusion. En preparación.
- [18] Duque, C., Lizana, M., Global asymptotic stability of a ratio dependent predator prey system with diffusion and delay. *Periodica Mathematica Hungarica*. **56** (1) (2008) 11-23.
- [19] Duque, C., Lizana, M., Kiss, K., On the dynamics of an n -dimensional ratio-dependent predator-prey system with diffusion. *Applied Mathematics and Computation*. **208** (2009) 98-105.
- [20] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society Providence. Rhode Island. Vol. 19 (1998)
- [21] Ermentrout, B., *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems. A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. SIAM (2002).

- [22] Fan, Y. H., Li, W. T., Global asymptotic stability of a ratio-dependent predator-prey system with diffusion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **188** (2006) 205-227.
- [23] Farkas, M., Kiss, K., Kovács, S., Qualitative behaviour of a ratio-dependent predator-prey systems. *Nonlinear Analysis RWA*. **10** (3) (2009) 1627-1642.
- [24] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press. Second Edition (1995).
- [25] Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Dover Publications (2008).
- [26] Friedman, A., *Partial Differential Equations*. Dover Publications (2008).
- [27] Gilbard, D., Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, New York (1977).
- [28] Goldstein, J. A., *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford Mathematical Monographs (1985).
- [29] Gopalsamy, K., Pursuit-evasion wave trains in prey-predator systems with diffusionally coupled delays. *Bull. Math. Biol.* **42** (1980) 871-887.
- [30] Grindrod, P. *Patterns and Waves. The theory and Applications of Reaction-Difusion Equations*. Clarendon Press. Oxford (1991).
- [31] Hale, J. K., Waltman, P., Persistence in Infinite-Dimensional Systems. *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989) 388-395.
- [32] Henry, D., *Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer-Verlag (1981).
- [33] Holling, C. S., Some Characteristic of simple types of predation and parasitism. *Entomol.* **91** (1959) 385-398.
- [34] Hsu, S. B., Hwang, T. W., Kuang, Y. Global analysis of the Michaelis-Menten-type ratio-dependent predator-prey system, *J. Math. Biol.* **42** (2001) 489-506.
- [35] Hsu, S. B., Hubbel, S. P., Waltman, P., A Contribution to the Theory of Competing Predator. *Ecological Monographs* **48** (1978) 337-349.

- [36] Hutson, V., Schmitt, K. Permanence in Dynamical Systems. *Math Biosci.* **111** (1992) 1-17.
- [37] Jost, C., Arino, O., Arditi, R., About deterministic extinction in ratio-dependent predator-prey models. *Bull. of Math. Biol.* **61** (1999) 19-32.
- [38] Kuang, Y., Beretta, E., Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system, *J. Math. Biol.* **36**(1998) 389-406.
- [39] Kuznetsov, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Applied Mathematical Sciences. Vol. 112. Springer-Verlag (1995)
- [40] MacDonald, N., Time Delay in Prey-Predator Models-II. *Bifurcation Theory. Math. Biosci.* **33** (1977) 227-234.
- [41] McOwen, R. C., *Partial Differential Equations Methods and Applications.* Prentice Hall. Second Edition (2003).
- [42] Mora, X., Semilinear Parabolic Problems Define Semiflows on C^k Spaces. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **278** (1) (1983) 21-55.
- [43] Murray, J. D., *Mathematical Biology I: And Itroduction.* Third Edition. Springer (2003).
- [44] Murray, J. D., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.* Third Edition. Springer (2003).
- [45] Lizana, M., Marín, J., Pattern formation in a reaction diffusion ratio-dependent predator-prey model. *Miskolc Math. Notes* **6** (2) (2005) 201-216.
- [46] Lizana, M., Marín, J., On the dynamics of a ratio dependent predator-prey system with diffusion and delay. *Discrete and Continuos Dynamical Systems-Series B* **6** (6) (2006) 1-17.
- [47] Lizana, M., Niño, L., Homoclinic Bifurcation in a Predador-Prey Model. *Acta Math. Hung.* **77** (3) (1997) 177-191.
- [48] Lions, J. L., *Equations Differentielles Operationnelles.* Springer-Verlag, New York (1968).

- [49] Lou, Y., Ni, W. M. Diffusion, self -diffusion and cross-diffusion. *J. Diff. Eqns.* **131** (1996) 79-131.
- [50] Pang, Y.H.P.; Wang, M. Qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system with diffusion. *Proc. Roy. Soc. of Edinb.* **133A** (2003) 919-942.
- [51] Peng, R., Wang, M., Note on a ratio-dependent predator-prey with diffusion. *Non-linear Analysis RWA.* **7** (2006) 1-11.
- [52] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer (1983)
- [53] Protter, M. H., Weinberger, H.F., *Maximum Principles in Differential Equations.* Springer (1999)
- [54] Rothe, F., *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems.* Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1072. Springer Verlag (1984).
- [55] Smith Hal L., *Monotone Dynamical Systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems.* Mathematical Surveys and Monographs. Vol.41. American Mathematical Society (1995).
- [56] Smoller J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Second Edition. Springer-Verlag, New York (1994).
- [57] Tang, S., Chen, L., Global Qualitative Analysis for a Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Delay. *J. Math. Anal. and appl.* **266** (2002) 401-419.
- [58] Walter, V., *Differential and Integral Inequalities.* Springer Verlag, New York (1970).
- [59] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Texts in Applied Mathematics. Second Editions. Springer (2003).
- [60] Zeng, X., A ratio-dependent predator-prey model with diffusion. *Nonlinear Analysis RWA.* **8** (2007) 1062-1078.