Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida - Venezuela

Espacios con rango secuencial ω_1

Lic. Rodríguez Armando.
Tutor: Dr. Carlos Uzcátegui.
19 de Junio, 2013.

Agradecimientos

Esta tesis, no se podría haber llevado a cabo, sino hubiese sido por el apoyo de diversas personas e instituciones a las que quiero honrar a continuación.

1. A DIOS, ya que sin su ayuda y guía, estoy seguro que en este momento no estuviera escribiendo estas palabras. Tantas bendiciones han sido derramadas hacia mí, que solo puedo decir GRACIAS.

2. A mi tutor el Dr. Carlos Uzcátegui, por su motivación y apoyo en la formación como matemático. Su respaldo incondicional hizo posible la culminación de este trabajo. Además, su experiencia y sabiduría en el campo de la Teoria de Conjunto permitiendo el planteamiento de problemas de interes matemático y la busqueda de interpretaciones geométricas a cada uno de los resultados obtenidos

3. A mi madre por ser ejemplo digno de trabajo y constancia.

4. A mi padre que desde su morada se regocija de mi trabajo, aunque físicamente ausente espiritualmente esta conmigo.

5. A Meryi por su apoyo y animo en los momentos más difíciles.

6. A mi colega Claribet Piña por sus consejos y sugerencias en la elaboración de esta monografía.

7. A mis amigos y compañeros del grupo de tutoreados del profesor Carlos Uzcátegui por su apoyo incondicional.

8. Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes por permitirme ser parte de sus valiosos grupos de investigación y contar con el apoyo de todos sus maestros y dignos investigadores.

9. Al Ministerio de Ciencia y Tecnología, a través de la beca "Misión Ciencias".

10. A la Universidad de los Andes (ULA). Al centro de estudios de postgrado (CEP). Al departamento de cálculo de la Facultad de Ingeniería.

Índice general

Resumen

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ definimos $A^{(1)} = \{x \in X : \ x = \lim_n x_n \ \& \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad en \quad A\}$, $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})^{(1)}$ y $A^{(\beta)} = \bigcup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)}$ para β un ordinal límite. Obsérvese que $A^{(\omega_1)} = A^{(\omega_1+1)}$. El *rango secuencial* de A en X denotado por $\rho(A,X)$ se define como el menor α tal que $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$. El *rango (secuencial) del espacio* X se define por

$$\Sigma(X) = \sup\{\rho(A,X) : \ A \subseteq X\}.$$

Notemos que $\rho(A,X), \Sigma(X) \leq \omega_1$. En general $A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$ y la igualdad se cumple cuando X es secuencial. Un espacio topológico X es *secuencial* si y sólo si, todo subconjunto secuencialmente abierto es abierto. Un conjunto $U \subseteq X$ es *secuencialmente abierto* si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in U$, existe un entero positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que x_n está en U para todo $n \geq N$.

El ejemplo típico de un espacio con rango ω_1 es S_ω, el espacio de Arkhangel'skiĭ-Franklin [2], [15]. Estamos interesados en determinar hasta que punto S_ω es un espacio "test" para los espacios con rango secuencial ω_1, es decir, para cuáles espacios de rango ω_1 se puede mostrar que contienen una copia de S_ω. Mas especificamente, diremos que un espacio X contiene una copia de S_ω, si existe $Y \subseteq X$ tal que Y es homeomorfo a S_ω. Se sabe que existe un espacio no numerable de rango ω_1 que no contiene copias de S_ω [5, 2]. Sin embargo, no se sabe qué ocurre para los espacios numerables [6].

En este trabajo presentaremos algunos resultados que dan condiciones suficientes para que un espacio contenga una copia de S_ω. Nos enfocaremos en los espacios $C_p(X)$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual. Parte de los resultados se basan en un análisis de la demostración de un teorema de Fremlin [7] el cual dice $\Sigma(C_p(X)) \leq 1$ o $\Sigma(C_p(X)) = \omega_1$. La segunda alternativa naturalmente conlleva una construcción de un subespacio numerable de $C_p(X)$ que, aún cuando en general no es homeomorfo a S_ω, tiene rango ω_1. Por otra parte, basado en otro enfoque [11], se obtiene que $C_p(\mathbb{N}^\mathbb{N})$ contiene una copia topológica de S_ω,lo cual no ocurre con $C_p(2^\mathbb{N})$ como lo probó Arkhangel'skiĭ- Bella en [4].

Introducción

Una parte importante de muchas áreas de las matemáticas es el estudio de las propiedades de convergencia y sus aplicaciones. En el Análisis Real, el lenguaje de convergencia sirve, en particular, para expresar la continuidad de una función o el hecho de que un punto esté cerca de un conjunto. Es sabido que estas nociones son equivalentes, definidas a través de sus conjuntos abiertos y cerraduras por medio de la convergencia.

Normalmente, una topología no se determina por sus sucesiones convergentes pero sí por sus sucesiones generalizadas, también llamadas redes. La convergencia en los espacios topológicos ha sido un tema de interés para los matemáticos por largo tiempo. Su estudio ha generado el surgimiento de nuevas clases de espacios, para los cuales existen, en la actualidad problemas aún no resueltos. Fréchet fué de los primeros en proponer el siguiente problema:

Caracterizar la clase de los espacios que puede ser determinada completamente por sus sucesiones convergentes.

Los espacios Fréchet y secuenciales pertenecen al folklore casi desde los origenes de la topología general. Sin embargo, tales espacios fueron estudiados por primera vez como los conocemos actualmente a partir de 1965 por Franklin. Los espacios Fréchet y secuenciales son generalizaciones de los espacios primero numerables y han sido objeto de estudio en distintas áreas de las matemáticas.

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es *secuencial* si todo subconjunto U de X secuencialmente abierto es abierto. Diremos que $U \subseteq X$ es secuencialmente abierto si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \to x \in U$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\geq n_0}$ está en U. Todo espacio primero numerable o métrico es secuencial (lo cual probaremos más adelante).

Un espacio topológico Hausdorff (X, τ) se dice *Fréchet*, si dados $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a x. Un hecho importante es que: si (X, τ) es Fréchet, entonces (X, τ) es secuencial. En la sección dedicada a espacios Fréchet de esta monografía mostraremos este hecho.

Otros ejemplos de espacios secuenciales son:

1. El espacio de Arens, denotado por S_2, es el espacio formado por las sucesiones finitas de números naturales de longitud menor o igual que 2 ($\mathbb{N}^{<2}$) con la siguiente topología: cada sucesión de longitud 2 es aislada, todo entorno básico de la sucesión $\langle n \rangle$ consiste de todas las sucesiones de la forma $\langle n, m \rangle$ para todos, menos para un número finito de, m's y finalmente un conjunto U que contiene a la sucesión $\varnothing$ es abierto si existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y entero positivo n tal que $\langle m \rangle$, $\langle m, k \rangle \in U$ para todo $m \geq n$ y todo $k \geq f(m)$. El siguiente hecho bien conocido proporciona una clara indicación de la importancia del espacio de Arens. Un espacio secuencial, regular y numerable es Fréchet si y sólo si no contiene copia homeomorfa del espacio de Arens [12].

2. La versión más general de Arens es el espacio de Arkhangel'skiĭ-Franklin, denotado por S_ω, el cual consiste de todas las sucesiones finitas de números naturales $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ con la siguiente topología τ:
$$U \in \tau \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : t^\frown n \notin U\} \quad es \quad finito$$
para todo $t \in U$. Es evidente que S_ω es T_2, cero dimensional y no tiene puntos aislados. Además, una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en S_ω converge a $s \in S_\omega$ si y sólo si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es eventualmente de la forma $s^\frown n_i$ para alguna sucesión creciente de enteros $\langle n_i \rangle$. De esto se sigue que S_ω es secuencial.

3. El abanico secuencial, denotado por $S(\omega)$, es el espacio formado por todos los pares ordenados de números naturales junto con un punto más que llamaremos $\{\infty\}$, es decir: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: los puntos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son aislados y los conjuntos de la forma
$$U_f = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq f(n)\} \cup \{\infty\}$$
donde $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, son abiertos. El abanico secuencial es Fréchet.

4. Sea (X, τ) un espacio topológico, consideremos σ_τ la colección de todos los conjuntos $\tau-$secuencialmente abiertos. σ_τ es una topología, además a σ_τ la llamaremos la topología de la correflexión secuencial y (X, σ_τ) lo llamaremos espacio topológico de la correflexión secuencial. (X, σ_τ) es un espacio secuencial, más adelante en el capítulo 2 probaremos todo esto.

El espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual, denotado por $C_p([0, 1])$ no es secuencial. La demostración de este hecho se encuentra en [3]. Este ejemplo de espacio no secuencial permite demostrar que $C_p(\mathbb{R})$ no es secuencial pues al tomar $A \subseteq C_p(\mathbb{R})$ como extensión de manera continua de las funciones continuas definidas en $[0, 1]$ a todos los valores reales, haciéndolas constantes fuera del intervalo $[0, 1]$. Este conjunto es secuencialmente cerrado y no es cerrado en $C_p(\mathbb{R})$.

En la presente monografía introduciremos la noción de operador secuencial, rango secuencial de un subconjunto de un espacio topológico y rango del espacio, estas nociones encuentran su motivación en determinar hasta qué punto S_ω es un espacio "test"para los espacios numerables con rango secuencial ω_1 y, más aún, cuáles espacios numerables con rango secuencial ω_1 contienen una copia de S_ω. Recordemos que un espacio X tiene una copia de S_ω, si existe $Y \subseteq X$ homeomorfo S_ω.

Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ definimos $A^{(1)} = \{x \in X : \ x = \text{lím}_n x_n \ \& \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad en \quad A\}$, $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})^{(1)}$ y $A^{(\beta)} = \bigcup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)}$ para β un ordinal límite. Obsérvese que $A^{(\omega_1)} = A^{(\omega_1+1)}$. El *rango secuencial* de A en X denotado por $\rho(A,X)$ se define como el menor α tal que $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$. El *rango (secuencial) del espacio* X se define por

$$\Sigma(X) = \sup\{\rho(A,X) : \ A \subseteq X\}.$$

Notemos que $\rho(A,X), \Sigma(X) \leq \omega_1$. En general $A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$ y la igualdad se cumple cuando X es secuencial.

El ejemplo típico de un espacio con rango ω_1 es S_ω, el espacio de Arkhangel'skiĭ-Franklin [2], [15]. En este trabajo presentaremos algunos resultados que dan condiciones suficientes para que un espacio tenga rango secuencial ω_1. Nos enfocaremos en los espacios $C_p(X)$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual. Parte de los resultados se basan en un análisis de la demostración del siguiente Teorema:

Teorema 0.0.1 *(Fremlin) Sea X un espacio topológico no vacío. El rango secuencial de $C_p(X)$ es: 1 ó ω_1.*

Para demostrar la segunda alternativa del Teorema 0.0.1 construiremos una función $H : S_\omega \to C_p(X)$ que satisface:

1. $\text{lím}_{i\to\infty} H(t^\frown i) = H(t)$ para cualquier $t \in S_\omega$;
2. Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que existe t, y $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $t^\frown m_i < t_i$, $m_i < m_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $(H(t_i)_{i\in\mathbb{N}})$ no tiene punto límite en $C_p(X)$;
3. $H(s) \neq H(t)$ para todo $s \neq t \in S_\omega$.

A la función H la llamaremos una F-inmersión, por Fremlin. Además la imagen de S_ω bajo H será llamada una F-copia de S_ω en $C_p(X)$. Lo que permite construir un subespacio numerable de $C_p(X)$ que, aún cuando en general no es homeomorfo a S_ω, tiene rango ω_1. Una pregunta natural es: ¿si existe una F-inmersión entre S_ω y Z, esta H es una inmersión topológica?.

Por otra parte, usaremos el espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ para demostrar que $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ contiene una copia de S_ω. En efecto, Stevo Todorcevic y Carlos Uzcátegui [11] mostraron que si (X, τ) es un espacio topológico T_2, regular y con topología analítica, entonces X es homeomorfo a un subespacio numerable de $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. El espacio Arkhangel'skiĭ-Franklin S_ω satisface dichas hipótesis, es decir S_ω es: T_2, regular y posee una topología Π_3^0 [6], por lo tanto $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ contiene una copia de S_ω. Por otro lado, un resultado de Arkhangel'skiĭ- Bella [4] implica que $C_p(2^{\mathbb{N}})$ no contiene copias de S_ω. Sin embargo, como veremos más adelante, el rango de $C_p(2^{\mathbb{N}})$ es ω_1. Luego, por el Teorema 0.0.1 $C_p(2^{\mathbb{N}})$ es un espacio que contiene una $F-$ copia de S_ω pero no una copia topológica de S_ω. El siguiente lema implica nuestra anterior afirmación de que $C_p(2^{\mathbb{N}})$ tiene rango ω_1.

Lema 0.0.2 *[7, pág 378] Sea X es un espacio compacto.* $\Sigma(C_p(X)) = 1$ *si, y sólo si,* $[0,1]$ *no es imagen continua de X.*

Puesto que $[0,1]$ es imagen continua de $2^{\mathbb{N}}$ y $2^{\mathbb{N}}$ es compacto, entonces por el lema anterior tenemos que $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$. Aplicando el teorema 0.0.1 tenemos que $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) = \omega_1$.

La problema que motivó este trabajo era originalmente determinar las condiciones topológicas de un espacio numerable X para que contenga copias de S_ω. Esto originó una segunda pregunta: ¿es cierto que todo espacio topológico numerable X con $\sum(X) = \omega_1$ contiene copias topológicas de S_ω?. Sabemos que $C_p(2^{\mathbb{N}})$ es un espacio no numerable que tiene rango secuencial ω_1 y no posee copias topológicas de S_ω. Sin embargo, en este trabajo mostraremos que $C_p(2^{\mathbb{N}})$ contiene una copia secuencial de S_ω. Además, en [5] presentan un ejemplo, diferente al espacio $C_p(2^{\mathbb{N}})$, de un espacio no numerable de rango ω_1 que no contiene copias de S_ω.

La monografía se estructura de la siguiente manera: el capítulo 1 se divide en 7 secciones; en la primera de ellas se define espacios secuenciales y se dan algunas caracterizaciones de espacios secuenciales. La sección 1.3 esta dedicada al estudio de los espacios Fréchet. Además mostraremos que todo espacio Fréchet es secuencial, el reciproco es falso. En la sección 1.4 definimos el rango secuencial de un subconjunto de un espacio topológico X denotado con $\rho(A, X)$ y el rango secuencial del espacio denotado con $\Sigma(X)$, además de mostrar algunas propiedades del rango secuencial probamos que dado un espacio topológico X, este es secuencial si y sólo si $A^{(\rho(A,X))} = \overline{A}$ para todo $A \subseteq X$. En la sección 1.5 se presentan algunas nociones combinatorias de la teoria de conjunto, mientras que en las secciones 1.6, 1.7 y 1.8 se definen los espacios: abanico secuencial, Arens y Arkhangel'skiĭ- Franklin, respectivamente. Mostraremos ciertas propiedades topológicas de los espacios mencionados y determinaremos el rango secuencial de cada uno de ellos.

En el capítulo 2, se define una nueva topología sobre un espacio topológico dado (X, τ) denominada la topología de la correflexión secuencial [10], denotada con σ_τ. Mostramos propiedades importantes entre los espacios topológicos (X, τ) y (X, σ_τ). Además, probamos que el espacio topológico (X, σ_τ) es secuencial. En la sección 2.2 definimos los espacios peine y damos el concepto de diagonal principal en un espacio peine. Mostramos que si un espacio X es un peine sin diagonales si y sólo si (X, σ_τ) es homeomorfo a S_2. Para concluir el capítulo 2, definimos los espacios abanicos y damos el concepto de diagonal principal de un abanico. Mostramos que si un espacio X es un abanico sin diagonales si y sólo si (X, σ_τ) es homeomorfo a $S(\omega)$.

En el capítulo 3, comenzamos definiendo algunos tipos de inmersiones entre dos espacios topológicos y se demuestra que dada una inmersión F entre los espacios X e Y, para todo $A \subseteq X$ se tiene: $\rho(A, X) \leq \rho(F(A), Y)$, y más aún que $\Sigma(X) \leq \Sigma(Y)$. Continuamos el capítulo con una sección dedicada al estudio de los espacios de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual, denotado con $C_p(X)$. Allí mostramos que si un espacio X es numerable, entonces $C_p(X)$ es primero numerable. Para finalizar esta sección, determinamos el rango secuencial de $C_p(2^{\mathbb{N}})$ y $C_p([0,1])$ empleando un resultado mostrado por Fremlin en [7]. La sección 3.2 contiene una demostración más general del Teorema 0.0.1, es decir, construimos una inmersión secuencial entre S_ω y $C_p(X)$ en vez de una $F-$ inmersión. Permitiendo obtener el siguiente resultado: Si $\Sigma(C_p(X)) \geq 2$, entonces existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que S_ω es secuencialmente homeomorfo a Y el cual denotaremos de la siguiente manera $S_\omega \approxeq^{sec} Y$. Además S_ω es homeomorfo a (Y, σ_τ).

Luego de esto, en la sección 3.3 damos algunas conclusiones de este trabajo y por último, en la sección 3.4 dejamos planteadas algunas preguntas que surgieron durante el desarrollo de esta monografía.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Este capítulo está dedicado al estudio de los espacios secuenciales, que son una generalización de los espacios primero numerables y por lo tanto de los metrizables. Comenzaremos definiendo espacio secuencial y daremos algunas caracterizaciones.

1.2. Espacios Secuenciales

Definición 1.2.1 *Un espacio topológico X se llama secuencial si dado $A \subset X$ tenemos que A es cerrado si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A, con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, implica $x \in A$.*

Proposición 1.2.2 *[8] Sea X un espacio topológico. Si para cualquier $A \subset X$ que no sea cerrado, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{A} \setminus A$, entonces X es secuencial.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y supongamos que $A = \overline{A}$. Tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Luego $x \in A$ pues de lo contrario $x \in X\backslash\overline{A}$ y x no sería punto límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De esta forma queda probada la necesidad en la definición 1.2.1. Ahora demostremos el recíproco. Supongamos que toda sucesión en A que sea convergente, converge en A . Requerimos verificar que $A = \overline{A}$. Procedamos por contradicción. La hipótesis nos garantiza la existencia de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A , tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{A}\backslash A$, lo cual contradice nuestra suposición. De aquí que $A = \overline{A}$ y por lo tanto X es secuencial. □

En base a la proposición anterior, obtenemos que los espacios discretos son secuenciales. En efecto, sea X un espacio discreto. Dado que la afirmación $A \neq \overline{A}$ es falsa para todo $A \subset X$ se satisface la hipótesis en la proposición 1.2.2, y por lo tanto X es secuencial. Otra clase importante de espacios secuenciales, son los primero numerable. Recordemos qué significa que un espacio sea primero numerable.

Definición 1.2.3 *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es primero numerable, si para cualquier punto x de X existe una colección numerable $\{U_n\}_{n\in Z^+}$ de entornos que contienen a x tales que cualquier entorno U que contiene a x, contiene al menos uno de los conjuntos U_n $(U_n \subseteq U)$.*

Proposición 1.2.4 *Todo espacio primero numerable es secuencial.*

Demostración. Sea $A \subset X$ con $A \neq \overline{A}$. Tomemos $x \in \overline{A}\backslash A$ y una base numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de entornos que contienen a x . Para cada $i \in \mathbb{N}$, elijamos un $x_i \in A \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_i$. De esta forma, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A que por construcción converge a x . Es decir, el espacio X es secuencial. □

Corolario 1.2.5 *Todo espacio métrico es secuencial.*

Demostración. Sean (X,d) un espacio métrico y $x \in X$. Como la familia $\{B(x,\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable en x , de la proposición 1.2.4 deducimos que (X,d) es secuencial. □

En la sección 1.4 definiremos la clausura secuencial de un subconjunto de un espacio topológico. Además en el capítulo 3 trabajaremos con mas detenimiento el espacio de las funciones conti-nuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Por ahora el objetivo del siguiente ejemplo, aunque no haremos todos los detalles, es mostrar un conjunto secuencialmente cerrado que no es cerrado. En la sección 3.1 mostraremos otro ejemplo de un espacio no secuencial.

Ejemplo 1.2.6 *Consideremos las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la topología producto. Es decir el espacio $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \tau_p)$*

Denotaremos con $C(\mathbb{R})$ a las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si aplicamos el operador clausura secuencial a $C(\mathbb{R})$, hasta estabilizarlo, obtenemos las funciones Bolerianas $(B(\mathbb{R}))$, que forman un conjunto τ_p- secuencialmente cerrado. Por otro lado, $\overline{C(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que es un conjunto cerrado. Claramente $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \neq B(\mathbb{R})$. En conclusión, las funciones borelianas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ forman un conjunto τ_p- secuencialmente cerrado y no es cerrado en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \tau_p)$.

Otra manera de caracterizar los espacios secuenciales es:

Sea X un espacio topológico. Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X está finalmente en $A \subset X$, si existe un entero positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que x_n está A para todo $n \geq N$.

Definición 1.2.7 *Sean X un espacio topológico y $U \subset X$. Se dice que U es secuencialmente abierto si cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in U$, está finalmente en U.*

Es claro que todo abierto (cerrado) es secuencialmente abierto (secuencialmemte cerrado).El reciproco no es cierto, es decir si un conjunto U es secuencialmente abierto no necesariamente U es Abierto, lineas arriba mostramos un conjunto secuencialmente cerrado que no es cerrado. El correspondiente recíproco nos proporciona otra caracterización de los espacios secuenciales.

Teorema 1.2.8 *Un espacio topológico X es secuencial, si y sólo si todo subconjunto secuencialmente abierto es abierto.*

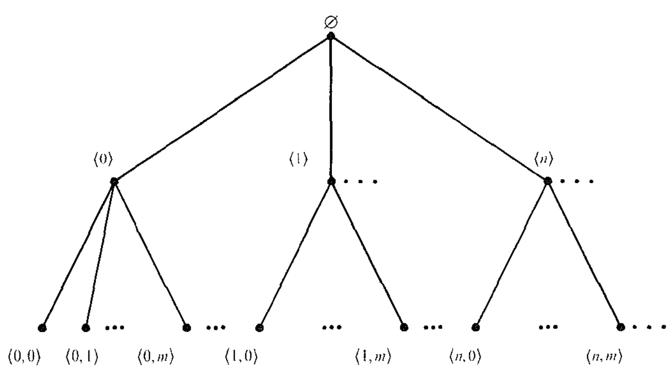
Demostración. Sea $U \subset X$ secuencialmente abierto. Probemos que $X\backslash U$ es cerrado. Supongamos lo contrario, es decir, el conjunto $\overline{X\backslash U}$ no es cerrado. Por hipótesis, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X\backslash U)$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \overline{(X\backslash U)}\backslash(X\backslash U)$. De esta manera obtenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está en U, en particular $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está finalmente en U, y además $x \in U$. Esto contradice que U es secuencialmente abierto y por consiguiente $X\backslash U$ es cerrado. Ahora probemos el recíproco del teorema. Para ello, utilicemos la proposición 1.2.2. Sea $A \subset X$ con $A \neq \overline{A}$. De esta manera, $X\backslash A$ no es abierto y, por hipótesis tampoco es secuencialmente abierto. De aquí se desprende que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in X\backslash A$ y que no está finalmente en $X\backslash A$, es decir, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en A. Así que, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\geq N}$ está en A. De lo anterior, concluimos que $x \in \overline{A}\backslash A$ y por lo tanto el espacio X es secuencial. □

Una pregunta natural es: ¿la clase de los espacios secuenciales es diferente a la de los primero numerables?. Enseguida proporcionamos un espacio secuencial que no es primero numerable.

Ejemplo 1.2.9 *Consideremos el siguiente conjunto:*

$$X = \{\varnothing\} \bigcup \{\langle n\rangle : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\langle n,m\rangle : n,m \in \mathbb{N}\}$$

Gráficamente



Definamos la siguiente topología τ sobre el conjunto X: Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto si:

1. $\varnothing \in A$, entonces existe n_0, tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $\langle n \rangle \in A$.

2. $\langle n \rangle \in A$, entonces existe k_0, tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene que $\langle n, k \rangle \in A$.

3. los puntos $\langle n, m \rangle$ son aislados, para algún $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$.

Llamaremos al espacio topológico (X, τ) espacio de Arens y lo denotaremos con S_2.

Notemos de las expresiones anteriores que el espacio de Arens tiene complejidad $\prod_3^0$.

Caracterizemos las sucesiones convergentes de Arens: sea $(t_l)_{l \in \mathbb{N}}$ una sucesión en S_2 tal que $t_l \to t$ entonces debe ocurrir lo siguiente:

1. Si $t = \{\varnothing\}$ entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_l \in \{\langle n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ para todo $l \geq n_0$

2. Si $t = \langle n \rangle$ entonces, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_l \in \{\langle n, m \rangle : m \in \mathbb{N}\}$ para todo $l \geq m_0$

3. Si $t = \langle n, m \rangle$ entonces, t_l es eventualmente constante.

Lema 1.2.10 *S_2 es un espacio secuencial*

Demostración. Sea $U \subseteq S_2$ secuencialmente abierto, demostraremos que U es abierto. En efecto consideremos $x \in U$, así tenemos los siguientes casos:

1. Si $x = \{\varnothing\}$ entonces, como U es secuencialmente abierto se tiene que toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S_2 tal que x_n converja a $x \in U$ implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con (x_n) en U para todo $n \geq n_0$. Luego, tomemos a $x_n = \langle n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $(x_n) \in U$ y U es secuencialmente abierto entonces, para cada punto de $\{\langle n \rangle : n \in \omega\}$ tenemos que cualquier sucesión en $\{\langle n, m \rangle : m \in \mathbb{N}\}$ converge a $\langle n \rangle$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto U es abierto.

2. Si $x = \langle n \rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo. Puesto que U es secuencialmente abierto en S_2, entonces toda sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S_2 tal que t_n converja a $x \in U$ implica que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in U$ para todo $n \geq m_0$. Luego, si consideramos $t_n = \langle n, m \rangle$ para todo $m \geq m_0$, tenemos que $t_n \in U$ por tanto U es abierto.

3. Si $x = \langle n, m \rangle$, por hipótesis U es secuencialmente abierto. Así tenemos que para cada sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S_2 con $z_n \to x$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Luego, por como caracterizamos las sucesiones convergente en Arens se tiene que z_n debe ser eventualmente constante, por ende $z_n \in U$. En consecuencia U es abierto. □

El espacio de Arens es secuencial y no es primero numerable.

Lema 1.2.11 *S_2 no es primero numerable.*

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de abiertos que contienen a la sucesión $\{\varnothing\} \in S_2$. Encontraremos un abierto U que contenga a $\{\varnothing\}$ tal que $U_n \nsubseteq U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir U no contiene ninguno de los U_n. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$. Como U_1 es un abierto que contiene a $\varnothing$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\langle n\rangle \in U_1$ para todo $n \geq n_1$. Además como $\langle n\rangle \in U_1$ y U_1 es abierto entonces existe $m^1_{n_1} \in \mathbb{N}$ tal que $\langle n,m\rangle \in U_1$ para todo $m \geq m^1_{n_1}$. Por otro lado, Como U_2 es un abierto que contiene a $\varnothing$, entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$, con $n_2 \geq n_1$, tal que $\langle n\rangle \in U_2$ para todo $n \geq n_2$. Además como $\langle n\rangle \in U_2$ y U_2 es abierto entonces existe $m^2_{n_2} \in \mathbb{N}$ tal que $\langle n,m\rangle \in U_2$ para todo $m \geq m^2_{n_2}$, con $m^2_{n_2} \geq m^1_{n_1}$ y así sucesivamente para el resto de los U_n. Ahora bien, consideremos el siguiente conjunto $A = \bigcup_i \langle n_i, m^i_{n_i}\rangle$, entonces $U = S_2 \setminus A$ es abierto. Finalmente podemos notar que U no contiene ninguno de los U_n, por lo tanto S_2 no es primero numerable. □

Un espacio topológico (X,τ) es Hausdorff o T_2, si dados $x,y \in X$ distintos, existen entornos U de x y V de y tales que $U \cap V = \varnothing$. Probemos que el espacio de Arens es Hausdorff.

Lema 1.2.12 *S_2 es Hausdorff.*

Demostración.

1. Sean $\langle n,m\rangle$ y $\langle l,k\rangle$ dos puntos en el segundo nivel de S_2 distintos, por ser puntos aislados son abiertos. Asi, se tiene que existen $U = \{\langle n,m\rangle\}$ y $V = \{\langle l,k\rangle\}$ abiertos tales que $U \bigcap V = \varnothing$.

2. Sean $\langle n,m\rangle$ y $\langle n\rangle$ dos puntos en S_2. Consideremos a $U = \{\langle n,m\rangle\}$ abierto y $V = \{\langle n\rangle\} \bigcup \{\langle n, m+1\rangle : \text{para todo } m \in \mathbb{N}\}$. V es un abierto que contiene a $\langle n\rangle$. Además, se tiene que $U \bigcap V = \varnothing$.

3. Sean $\langle n\rangle$ y $\langle k\rangle$ dos puntos distintos en el primer nivel de S_2. Luego, existen abiertos $U = \{\langle n\rangle\} \bigcup \{\langle n,m\rangle : m \in \mathbb{N}\}$ y $V = \{\langle k\rangle\} \bigcup \{\langle k,m\rangle : m \in \mathbb{N}\}$ que contienen a $\langle n\rangle$ y $\langle m\rangle$ respectivamente, tales que $U \bigcap V = \varnothing$.

4. Sean $\langle n\rangle$ y $\varnothing$ dos puntos distintos de S_2, existen abiertos disjuntos que contiene a $\langle n\rangle$ y $\varnothing$, respectivamente. Los cuales son $U = \{\langle n\rangle\} \bigcup \{\langle n,m\rangle : m \in \mathbb{N}\}$ y $V = \{\varnothing\} \bigcup \{\langle n+1\rangle : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\langle n+1, m\rangle : m \in \mathbb{N}\}$.

5. Sean $\langle n,m\rangle$ y $\varnothing$ dos puntos distintos de S_2, existen abiertos disjuntos que contiene a $\langle n,m\rangle$ y $\varnothing$, respectivamente. Los cuales son $U = \{\langle n,m\rangle\}$ y $V = S_2 \backslash U$.

Los casos anteriores muestran que S_2 es Hausdorff. □

Un espacio X es compacto por punto límite si: cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite. Esta definición la introdujó Fréchet y es más débil que la definición de compacidad por cubrimientos, aunque coinciden cuando se trata de espacios métricos.

El espacio de Arens no es compacto, pues simplemente S_2 tiene infinitos puntos aislados. Más adelante mostraremos que el espacio Arens posee un subespacio que no es secuencial. Dicha demostración contiene un conjunto U que es secuencialmente abierto y este no es abierto en el sub-espacio.

Una pregunta importante es: ¿la imagen continua de un espacio secuencial es secuencial?. En [8], muestran que existe un espacio (Z,τ) que no es secuencial y tal que la secuencialidad no se preserva bajo funciones continuas. En efecto, cualquier función $f:(Z,\tau_{Dis})\to(Z,\tau)$ es continua y por la observación hecha en la proposicion 1.2.2, el espacio (Z,τ_{Dis}) es secuencial. Las siguientes definiciones y caracterizaciones nos permitiran mostrar cuando la secuencialidad se preserva:

Definición 1.2.13 *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ continua y sobreyectiva se llama abierta si la imagen de todo conjunto abierto es abierta, y recibe el nombre de cerrada si la imagen de todo conjunto cerrado es cerrada.*

Definición 1.2.14 *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f:X\to Y$ continua y sobreyectiva se llama cociente, si $f^{-1}(U)\in\tau(X)$ implica que $U\in\tau(Y)$ para todo $U\subset Y$.*

Proposición 1.2.15 *[8] Toda función abierta o cerrada es cociente.*

Demostración. Sea $f:X\to Y$ una función continua y sobreyectiva. Consideremos el conjunto $f^{-1}(U)\in\tau(X)$.

Supongamos que f es abierta. Luego, se cumple que $f(f^{-1}(U))=U\in\tau(Y)$. Ahora bien, si f es cerrada, entonces $f(X\backslash f^{-1}(U))=f(X)\backslash f(f^{-1}(U))=Y\backslash U$ es un subconjunto cerrado, es decir, $U\in\tau(Y)$. De esta manera hemos probado que si f es una función cerrada o abierta, entonces f es una función cociente. □

Como mencionamos líneas arriba, la imagen continua de un secuencial no es necesariamente secuencial. Pero la secuencialidad sí se preserva bajo funciones cocientes, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.2.16 *[8] La imagen cociente de un espacio secuencial es secuencial.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos tales que X es secuencial y $f : X \to Y$ es una función cociente. Probemos que Y es secuencial. Tomemos un $U \subset Y$ secuencialmente abierto. En virtud del teorema 1.2.8, basta mostrar que $U \in \tau(Y)$. Afirmamos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto. En efecto, sea $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X con $s \to x_0 \in f^{-1}(U)$. Por ser f una función continua, obtenemos que $f(s) \to f(x_0) \in U$. Como U es secuencialmente abierto, la sucesión $f(s)$ está finalmente en U . Luego, la sucesión s está finalmente en $f^{-1}(U)$ y por consiguiente, la afirmación es verdadera. Dado que X es secuencial, obtenemos que $f^{-1}(U) \in \tau(X)$ y por ser f una función cociente, el conjunto U es abierto. □

Corolario 1.2.17 *[8] La imagen bajo una función abierta o cerrada de un espacio secuencial, es secuencial.*

Demostración. La conclusión se desprende de la proposición 1.2.15 y del teorema 1.2.16. □

Lema 1.2.18 *Sean X e Y espacios secuenciales y $f : X \to Y$ una función. f es continua sí, y sólo si, para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ se cumple $(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$.*

Demostración.

1. Supongamos que f es continua. Dada una sucesión (x_n) que converge a a, queremos probar que $f(x_n)$ converge a $f(a)$. Sea U un entorno de $f(a)$. Entonces $f^{-1}(U)$ es un entorno de a, y por lo tanto existe un entero N tal que $x_n \in f^{-1}(U)$, para todo $n \geq N$. Entonces, $f(x_n) \in U$ para todo $n \geq N$. Esto muestra que $f(x_n)$ converge a $f(a)$

2. Probemos que f es continua.
Sea $U \subseteq Y$ abierto, probemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. En efecto, sea $x \in f^{-1}(U)$ entonces $f(x) \in U$. Así, por hipótesis se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n)$ está en U, para todo $n \geq n_0$. En consecuencia, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $f^{-1}(U)$ para todo $n \geq n_0$. Además, puesto que la sucesión (x_n) converge a $x \in f^{-1}(U)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $f^{-1}(U)$, entonces $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto. Por otro lado, $f^{-1}(U) \subseteq X$ y X es secuencial, por lo tanto $f^{-1}(U)$ es abierto en X. □

El siguiente ejemplo muestra que la secuencialidad no se hereda. Es decir, probaremos que el siguiente subespacio posee un conjunto secuencialmente abierto que no es abierto.

Ejemplo 1.2.19 *La secuencialidad no es una propiedad herediaria.*

Demostración. Consideremos $Y = \{\varnothing\} \bigcup \{\langle n, m\rangle : n, m \in \mathbb{N}\}$ subespacio de S_2, con la topología de subespacio. Probemos que Y no es secuencial. En efecto, sea $U = \{\varnothing\}$ secuencialmente abierto en Y; puesto que las únicas sucesiones que convergen a $\{\varnothing\}$ en Y son las eventualmente constante $\varnothing$. Además U no es abierto en Y ya que sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de S_2 con Y y recordemos que un abierto en S_2 que contiene a $\{\varnothing\}$ también contiene $\langle n\rangle \in A$ para algún $n \geq n_0$. □

Sin embargo, la secuencialidad sí se hereda a abiertos y cerrados.

Lema 1.2.20 *[8] Todo subespacio abierto o cerrado de un espacio secuencial, es secuencial.*

Demostración. Sea X un espacio secuencial y $U \subset X$ abierto. Tomemos un subconjunto secuencialmente abierto V en U. Afirmamos que V es secuencialmente abierto en X. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in V \subset U$. Como todo conjunto abierto es secuencialmente abierto, tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en U. Por ser V secuencialmente abierto en U, deducimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está finalmente en V. Por lo tanto, V es abierto en X y en consecuencia también lo es en U. De esta manera concluimos que U es secuencial. Sea $F \subset X$ cerrado. Para probar que F es secuencial, utilizaremos el hecho que: Un espacio topológico X es secuencial si y sólo si, todo subconjunto secuencialmente cerrado es cerrado. Sea $K \subset F$ secuencialmente cerrado y probemos que $X \backslash K$ es abierto. Basta verificar que $X \backslash K$ es secuencialmente abierto. Consideremos una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s \to x \in X \backslash K$. Si $x \notin F$, como $X \backslash F$ es secuencialmente abierto, entonces s está finalmente en $X \backslash F \subset X \backslash K$. Ahora fijémonos en el caso cuando $x \in F$. Supongamos que existe una subsucesión s' de s tal que $s' \subset K$ y $s' \to x$. Debido a que K es secuencialmente cerrado, la sucesión s' converge en K, pero $x \notin K$. Por lo tanto, la sucesión s está finalmente en $X \backslash K$. □

1.3. Espacios Fréchet

Definición 1.3.1 *Un espacio topológico X se llama espacio Fréchet, si para cualquier $A \subset X$ y $x \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.*

Por ejemplo, los espacios métricos son Fréchet. Así como para el caso de los secuenciales, los primero numerables también son espacios Fréchet, como enseguida lo mostramos

Teorema 1.3.2 *Todo espacio primero numerable es Fréchet.*

Demostración. Sea X un espacio primero numerable y sea $A \subset X$. Tomemos $x \in \overline{A}$. Por hipótesis, existe una base numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U_{n+1} \subset U_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Como $U_n \cap A \neq \varnothing$ con $n \in \mathbb{N}$, escogemos $x_n \in U_n \cap A$ para cada n. Luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está A y por construcción, esta sucesión converge a x. □

El reciproco del Teorema 1.3.2 no se cumple, ya que el espacio Abanico secuencial $S(\omega)$, que definiremos más adelante en la sección 1.6 , es Fréchet y no posee base numerable para el punto $\{\infty\}$. El siguiente resultado nos muestra que la clase de los espacios Fréchet forma parte de la de los secuenciales

Proposición 1.3.3 *Todo espacio Fréchet es secuencial.*

Demostración. Sea X un espacio Fréchet y sea $A \subset X$. Supongamos que $A \neq \overline{A}$. Tomemos $x \in \overline{A} \setminus A$. Por hipótesis, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x \in \overline{A} \backslash A$. Por lo tanto, de acuerdo a la proposición 1.2.2, el espacio X es secuencial. □

El reciproco de la proposición anterior no se cumple, es decir, existen espacios topológicos que son secuenciales y no son Fréchet. El siguiente ejemplo muestra esto:

Lema 1.3.4 *S_2 es secuencial y no es Fréchet.*

Demostración. En el lema 1.2.10 mostramos que S_2 es secuencial. Ahora probaremos que S_2 no es Fréchet. En efecto, consideremos $A = \{\langle n, m \rangle : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq S_2$, podemos notar que $\overline{A} = S_2$. Ahora bien, tomemos $\{\varnothing\} \in \overline{A}$ por como caracterizamos las sucesiones convergentes en S_2 podemos notar que no existe una sucesión en A tal que ella converja a $\{\varnothing\}$, ya que las unicas sucesiones convergentes a $\{\varnothing\}$ estan eventualmente en $\{\langle n \rangle : n \in \mathbb{N}\} \in S_2$ y claramente el conjunto A no contiene una sucesión de estas. Por tanto podemos concluir que S_2 no es un espacio Fréchet. □

El siguiente resultado, tomado de [12], muestra la importancia del espacio de Arens.

Lema 1.3.5 *Un espacio secuencial, regular y numerable es Fréchet si y sólo si no contiene copia homeomorfa del espacio de Arens S_2.*

Los espacios Fréchet sí son hereditarios. En lo que sigue, el símbolo $Cl_X(A)$ significará la cerradura de $A \subset X$ en (X, τ) .

Proposición 1.3.6 *[8] Todo subespacio de un espacio Fréchet , también es un espacio Fréchet.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio Fréchet y $Y \subset X$ un subespacio. Tomemos $Z \subset Y$ y $x \in Cl_Y(Z)$. Como $Cl_Y(Z) = Cl_X(Z) \cap Y$, tenemos que $x \in Cl_X(Z)$. Por hipótesis existe una sucesión $s = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Z tal que $s \to x$. Por lo tanto, el subespacio Y es Fréchet. □

1.4. Rango secuencial

A cada espacio (no necesariamente secuencial) se le asocia un ordinal $\alpha \leq \omega_1$, llamado el rango secuencial del espacio. Este ordinal acota la iteración más larga posible del operador secuencial que definiremos a continuación. En el capítulo 3 daremos un ejemplo de un espacio no secuencial que posee rango ω_1.

Definición 1.4.1 *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ definimos el operador secuencial como:*

$$A^{(0)} = A$$

$$A^{(1)} = \{x \in X : x = \lim_n x_n \quad \& \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad en \quad A\}$$

Cabe destacar que podemos aplicar, de nuevo, el operador secuencial a $A^{(1)}$. Así podemos definir:

$$A^{(\alpha+1)} = (A^{\alpha})^{(1)}$$

y para β un ordinal límite

$$A^{(\beta)} = \bigcup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)}$$

Cuando este operador secuencial se estabiliza, es decir el menor ordinal β tal que $A^{(\beta+1)} = A^{(\beta)}$, diremos que la clausura secuencial de A en X es :

$$Cl_s(A) = \bigcup_{\alpha<\beta} A^{(\alpha)}$$

Notemos que $A \subseteq A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq A^{(\alpha)}$. Además, recordemos que la clausura de A se puede obtener como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto A, es decir $\overline{A} = \bigcap\{B : A \subseteq B \quad \& \quad B \quad cerrado\}$. Por ende, también podemos obtener:

$$Cl_s(A) = \bigcap\{B : A \subseteq B \quad \& \quad B \quad secuencialmente \quad cerrado\}.$$

Por la definición 1.4.1 mostraremos el siguiente lema.

Lema 1.4.2 $A^{(\omega_1)} = A^{(\omega_1+1)}$, *para todo espacio topológico X y $A \subseteq X$.*

Demostración.

(i) Por definición 1.4.1 se tiene claramente que $A^{(\omega_1)} \subseteq A^{(\omega_1+1)}$

(ii) Ahora veamos que $A^{(\omega_1+1)} \subseteq A^{(\omega_1)}$.
Consideremos $x \in A^{(\omega_1+1)}$, asi existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $A^{(\omega_1)}$, para todo $n \geq N$ y además $x = \text{lím}_n x_n$. Por otro lado, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está $A^{(\omega_1)}$ y $A^{(\omega_1)} = \bigcup_{\rho<\omega_1} A^{(\rho)}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\rho_n < \omega_1$ tal que $x_n \in A^{(\rho_n)}$. Luego, como unión numerable de numerables es numerable, consideremos $\alpha = \bigcup_n \rho_n < \omega_1$, en consecuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $A^{(\alpha)}$. Entonces $x \in A^{(\alpha+1)} \subseteq A^{(\omega_1)}$. □

Definición 1.4.3 *El rango secuencial A en X, denotado por $\rho(A,X)$, se define como el menor ordinal α tal que $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$.*

Definición 1.4.4 *El rango del espacio X se define como:*

$$\Sigma(X) = sup\{\rho(A,X) : A \subseteq X\}$$

Notemos que $\rho(A,X), \Sigma(X) \leq \omega_1$, para todo $A \subseteq X$.

Lema 1.4.5 *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$, y $\alpha < \omega_1$, entonces $A^{(\alpha)} \subseteq \overline{A}$*

Demostración. La prueba de este lema la haremos por inducción.

1. (Base inductiva).
Consideremos $A^{(1)} = \{x \in X : \quad \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad en \quad A, \quad con \quad x_n \to x\}$ y $x \in A^{(1)}$, probemos que $x \in \overline{A}$. Puesto que $x \in A^{(1)}$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x = \text{lím}\, x_n$. Por otra parte, sea U un conjunto abierto tal que $x \in U$. Como U es abierto entonces, existe $n_0 \in N$ tal que x_n está en U, para todo $n \geq n_0$. En consecuencia se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $U \bigcap A$, por tanto $U \bigcap A \neq \varnothing$. Esto muestra que $x \in \overline{A}$.

2. (Caso Sucesor).
Supongamos que $A^{(\alpha)} \subseteq \overline{A}$, probemos que $A^{(\alpha+1)} \subseteq \overline{A}$. En efecto; Sea $x \in A^{(\alpha+1)}$ entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $A^{(\alpha)} \subseteq \overline{A}$ tal que $x = \text{lím}\, x_n$. Por otro lado, consideremos U un abierto tal que $x \in U$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que (x_n) está en U, para todo $n \geq n_0$. En consecuencia $U \bigcap A \neq \varnothing$, por tanto $x \in \overline{A}$.

3. (Caso Límite).
Sea $\alpha-$ limite y supongamos que para todo $\beta < \alpha$ se tiene $A^{(\beta)} \subseteq \overline{A}$. Consideremos $x \in A^{(\alpha)}$, entonces $x = \text{lím}\, x_n$ con $x_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}$; es decir, $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \beta_n < \alpha)(x_n \in A^{(\beta_n)} \subseteq \overline{A})$. Por otro lado, sea $x \in U$ con U abierto. Por convergencia sabemos que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(x_n \in U)$. Así tenemos que $x_{n_0} \in U$ y $x_{n_0} \in A^{(\beta_n)} \subseteq \overline{A}$, en consecuencia $U \bigcap A \neq \varnothing$. Por lo tanto, $x \in \overline{A}$. □

Corolario 1.4.6 *$A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$.*

Demostración.

1. Supongamos que $\rho(A,X) < \omega_1$, por el lema 1.4.5 tenemos que $A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$.

2. Si $\rho(A,X) = \omega_1$ entonces veamos que $A^{(\rho(A,X))} \subseteq \overline{A}$. En efecto, sea $x \in A^{(\omega_1)}$. Recordemos que $A^{(\omega_1)} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A^{(\alpha)}$, así sabemos que existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $x \in A^{(\alpha_0)} \subseteq \overline{A}$. Lo cual prueba que, $x \in \overline{A}$. □

Antes de demostrar el siguiente teorema es importante mensionar que $A^{(\rho(A,X))}$ es el menor conjunto secuencialmente cerrado que contiene a A, ya que él posee todos los puntos límites de cualquier sucesión convergente en A y sus iteradas hasta $\rho(A,X)$.

Teorema 1.4.7 *X es secuencial sí, y sólo si, $A^{(\rho(A,X))} = \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$.*

Demostración.

1. Probaremos($\Leftarrow$)
   Consideremos $A \subseteq X$ secuencialmente cerrado, probemos que A es cerrado. En efecto, Como A es secuencialmente cerrado entonces $A = A^{(\rho(A,X))}$. Luego, por hipótesis, tenemos que $A^{(\rho(A,X))} = \overline{A}$. En consecuencia $A = \overline{A}$, por tanto A es cerrado. Finalmente se tiene que X es secuencial.

2. Probemos ($\Rightarrow$)
   Sea $A \subseteq X$, como X es un espacio secuencial, entonces para A secuencialmente cerrado se sabe que es cerrado. Así se tiene que $A = \overline{A}$. Ahora bien, el hecho que A sea secuencialmente cerrado implica que $A = A^{(\rho(A,X))}$. Por tanto, concluimos que $A^{(\rho(A,X))} = \overline{A}$. □

Lema 1.4.8 *Si X es un espacio Fréchet, entonces $\Sigma(X) = 1$*

Demostración. Sea X un espacio Fréchet, por la proposición 1.3.3 se tiene que X es secuencial y por el teorema 1.4.7 obtenemos que $A^{(\rho(A,X))} = \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$. Por otro lado, para cualquier $A \subseteq X$ se tiene que $A^{(0)} = A$ y $A^{(1)} = A \cup \{x \in X : x = \lim_n x_n \quad \& \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad en \quad A\}$. En consecuencia $A^{(1)} = \overline{A}$, por lo tanto $\Sigma(X) = sup\{\rho(A,X) : A \subseteq X\} = 1$. □

Corolario 1.4.9 *Si X es un espacio métrico, entonces $A^{\rho(A,X)} = \overline{A}$, para todo $A \subseteq X$. Además el rango secuencial de éste es igual a* 1.

Demostración. Recordemos que todo espacio métrico es Fréchet. El resto de la prueba se desprende del lema 1.4.8. □

1.5. Nociones combinatorias

Esta sección esta dedicada al estudio de la teoría de árboles, que para la teoría descriptiva de conjuntos y nuestro trabajo es muy importante, ya que nos dió un enfoque geométrico del espacio de Arens definido en 1.2.9 y nos dará un enfoque geométrico del espacio S_ω que definiremos más adelante en este capítulo.

Sea A un conjunto no vacío. Si $s \in A^{<\mathbb{N}}$ (el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A incluyendo la sucesión vacío $\{\varnothing\}$), entonces $|s|$ denota la longitud de s. Sea $s = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in A^{<\mathbb{N}}$. Definiremos

$$a^n = \underbrace{aa...a}_{n-veces}, a \in A, n \geq 0$$

observemos que $a^0 = \varnothing$. Si $s = (a_0, a_1, ...a_{n-1}) \in A^{<\mathbb{N}}$ y $m < n$, entonces definimos a

$$t = s|m = (a_0, a_1, ..., a_{m-1})$$

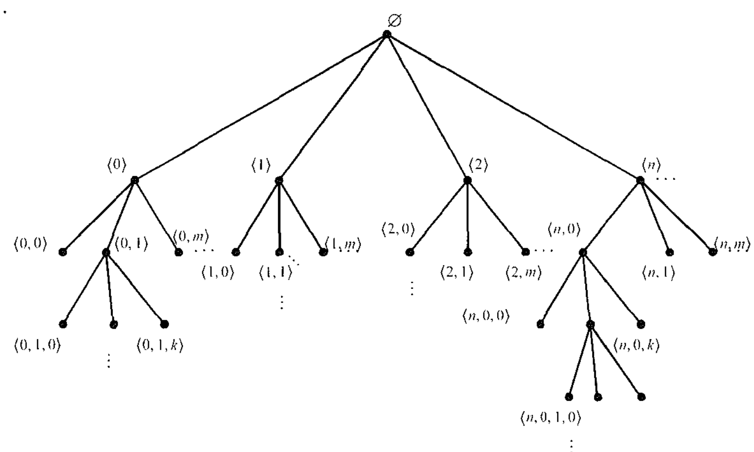
y diremos que t es un segmento inicial de s, o s es una extensión de t, y que escribiremos $t \prec s$ o $s \succ t$. Además escribiremos $t \preceq s$ cuando $t \prec s$ o $t = s$. Por otra parte, diremos que s y t son compatibles si uno es una extensión del otro; en caso contrario diremos que son incompatibles, y escribiremos $s \perp t$. Notemos que, $s \perp t$ si, y sólo si, existe $i < |s|, |t|$ tal que $s(i) \neq t(i)$.

Sean $s = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ y $t = (b_0, b_1, ..., b_{m-1})$ dos sucesiones finitas. Definiremos la concatenación de dos sucesiones, la cual denotaremos por $s^\frown t$, a la sucesión

$$(a_0, a_1, ..., a_{n-1}, b_0, b_1, ..., b_{m-1})$$

Si $s \in A^{<\mathbb{N}}$ y $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$, $s^\frown\alpha$ se define similarmente a lo anterior. Además, si $\alpha = (a_0, a_1, ...) \in A^{\mathbb{N}}$, para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha|k = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$. Finalmente, si $s \in A^{<\mathbb{N}}$, escribiremos $s \prec \alpha$ en caso que α extienda a s; es decir, $s = \alpha|k$ para algún k.

Definición 1.5.1 *Un árbol T en A es un subconjunto no vacio de $A^{<\mathbb{N}}$, tal que si $s \in T$ y $t \prec s$ entonces $t \in T$.*



Así, la sucesión vacío $\varnothing$ pertenece a todos los árboles no vacíos. Los elementos de T son llamados, a menudo, nodos de T. Un nodo u es llamado terminal si para ningún $a \in A$, $u^\frown a \in T$. Un árbol T es llamado a ramificación finita si para todo nodo s en T, $\{a \in \mathbb{N} : s^\frown a \in T\}$ es finito. Si T es un árbol en A, entonces el cuerpo de T es el conjunto

$$[T] = \{\alpha \in A^{\mathbb{N}} : \forall k(\alpha|k \in T)\}$$

Se puede observar que los miembros de $[T]$ son las " ramas infinitas" de T. Diremos que un árbol T es bien fundado si su cuerpo es vacío, es decir no tiene ramas infinitas. Finalmente, si $[T] \neq \varnothing$ se dice que T es mal fundado.

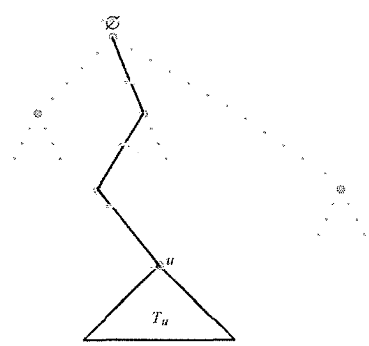
Ejemplo 1.5.2 *Los siguientes conjuntos son ejemplos de árboles en* $\mathbb{N}$,

1. $\{\varnothing\}$,
2. $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,
3. $\{s|i : i < |s|\}(s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$,
4. $\{\alpha|i : i \in \mathbb{N}\}(\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.

Definición 1.5.3 *Sea T un árbol y u un nodo de T. El conjunto*

$$T_u = \{v \in A^{<\mathbb{N}} : u^\frown v \in T\}$$

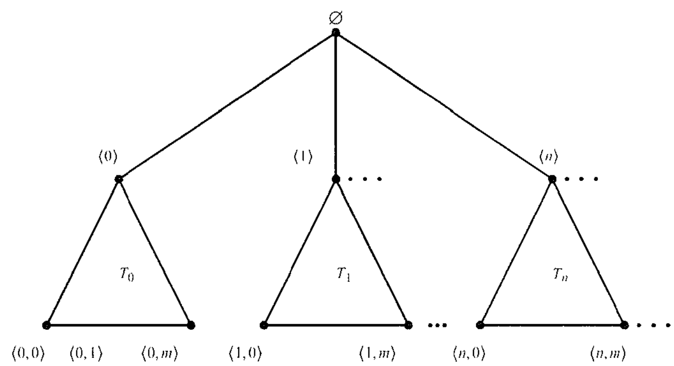
también es un árbol.



Ejemplo 1.5.4 *Sean T_0, T_1, T_2,... árboles en $\mathbb{N}$ bien fundados. Entonces*

$$T = \{\varnothing\} \bigcup \{\langle i\rangle^\frown s : s \in T_i, i \in N\}$$

es un árbol bien fundado.



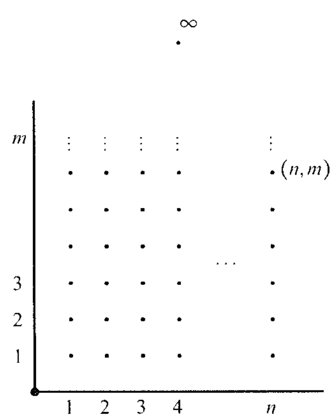
En las siguientes secciones definiremos y calcularemos el rango secuencial de tres espacios muy importantes para la teoria de conjuntos los cual son: El abanico secuencial, Arens (ya definido en la sección 1.2) y el espacio de las sucesiones finitas de números naturales, este último denotado con S_ω. Cabe destacar que S_ω es el centro de nuestro trabajo, ya que este nos permite caracterizar cuando un espacio tiene rango secuencial ω_1 y más aún cuándo un espacio topólogico tiene una copia de S_ω.

1.6. El espacio abanico secuencial

Consideremos el siguiente conjunto :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

es decir, los pares ordenados de números naturales junto con un punto más que llamaremos ∞. Gráficamente



Ahora definiremos una topología para $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definamos la siguiente topología τ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

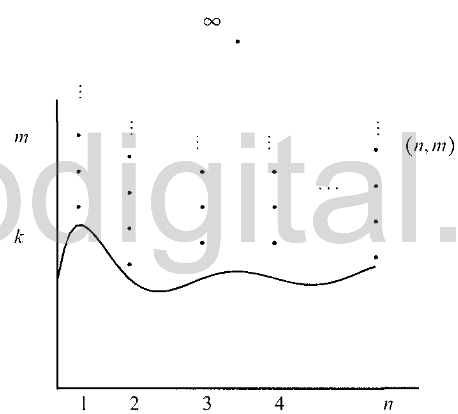
1. Los puntos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son aislados.

2. Los conjuntos de la forma:

$$U_f = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq f(n)\} \cup \{\infty\}$$

donde $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, son abiertos.

Gráficamente un conjunto U_f es de la forma, (son todos los pares ordenados que estan por encima del grafico):



Al par ordenado $(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \tau)$ lo llamaremos espacio abanico secuencial y lo denotaremos con $S(\omega)$.

Lema 1.6.1 *$S(\omega)$ es Hausdorff.*

Demostración.

1. Sean (n,m) y (k,l) dos puntos distintos de $S(\omega)$. Como ninguno de los puntos considerados es el punto ∞, entonces consideremos $U = \{(n,m)\}$ y $V = \{(k,l)\}$ abiertos disjuntos de (n,m) y (k,l), respectivamente.

2. Sean (k,l) y ∞ dos puntos distintos de $S(\omega)$. Consideremos $U = \{(k,l)\}$ y $V = S(\omega) \setminus U$ abiertos disjuntos de (k,l) y ∞, respectivamente.

Los item 1 y 2 prueban que $S(\omega)$ es Hausdorff. □

Antes de enunciar el siguiente lema, definamos una **sección en el abanico** a una línea vertical, es decir, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, consideremos los pares (n,m) para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto nos permitira tener una idea más clara de una sucesión convergente en $S(\omega)$.

Lema 1.6.2 *Sea $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. S es una sucesión convergente a $\{\infty\}$ si, y sólo si, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S \subseteq \{1,2,...,n\} \times \mathbb{N}$.*

Demostración.

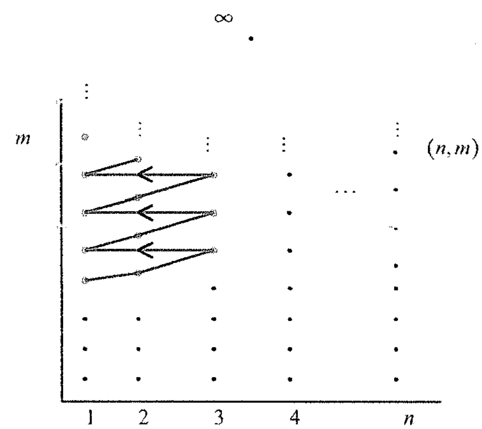
1. Probemos $(\Rightarrow)$.
   La prueba la haremos por reducción al absurdo. Consideremos $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una sucesión convergente a ∞ y supongamos que S intersecta a una cantidad infinita de secciones verticales. Luego, podemos contruir una subsucesión de S de la siguiente manera: El primer elemento de la subsucesión se tomará de la primera sección vertical que intersecta a S etiquetándolo de la siguiente manera (n_1, m_1). El segundo elemento de la subsucesión se tomará de la segunda sección vertical que intersecta a S el cual utilizaremos la etiqueta (n_2, m_2). De esta forma podemos extraer de S la subsucesión (n_i, m_i). Ahora bien, con esta subsucesión y tomando de las secciones verticales que no intersectan a S un elemento cualquier podemos obtener el grafico de una función, como el mostrado en la definición de un conjunto abierto en $S(\omega)$ que contiene al punto ∞, que muestra un conjunto abierto que contiene al punto ∞ y que la subsucesión considerada no está en ese abierto. Lo cual obtenemos una contradicción pues cualquier abierto U que contiene al punto ∞, debe contener una cola de la sucesión S. Lo cual es falso pues la subsucesión contruida no está contenida en el abierto U. Por lo tanto, se concluye que las sucesiones convergentes en $S(\omega)$ son de la forma $S \subseteq \{1,2,...,n\} \times \mathbb{N}$.

2. Probemos $(\Leftarrow)$.

   a) Supongamos que S es un subconjunto de una sección vertical, digamos $S = \{(n,m) : m \in \mathbb{N}\}$ para $n \in \mathbb{N}$ fijo. Probemos que S es una sucesión convergente al punto $\{\infty\}$. En efecto, consideremos U un abierto que contiene al punto $\{\infty\}$. Así existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $m \geq k$ se tiene que $(n,m) \subset U$. Lo cual implica que una cola de la sucesión está contenida en U

   b) Supongamos que $S \subseteq \{1,2,3\} \times \mathbb{N}$. Mediante un proceso de enumeración podemos mostrar que S es una sucesión, es decir: el primer punto de la sucesión va ser el primer punto de la intersección de S con la primera sección vertical, que denotaremos con (n_1, m_1). El segundo punto de la sucesión sera el primer punto de la intersección de S

con la segunda sección vertical, que denotaremos con (n_2, m_2). El tercer punto de la sucesión sera el primer punto de la intersección de S con la tercera sección vertical, que denotaremos con (n_3, m_3). Ahora bien, el cuarto punto de la sucesión sera el segundo punto de intersección de S con la primera sección vertical. Asi sucesivamente podemos seguir enumerando los puntos que intersecta S con las tres secciones verticales dadas. La siguiente figura ilustra dicha enumeración.



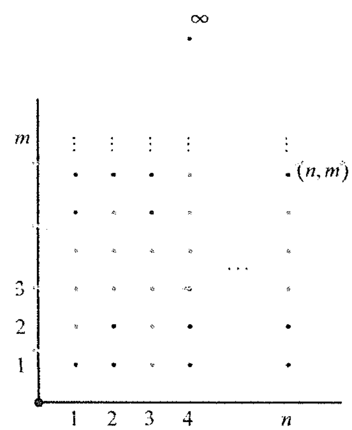
Por otro lado recordemos que una sucesión (x_n) de puntos de un espacio X converge a un punto $x \in X$ siempre que, para cualquier abierto U de x existe un entero positivo N tal que (x_n) está en X para todo $n \geq N$. Además, cabe destacar que en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ una sucesión no puede converger a más de un punto. Por lo tanto, tenemos que $S(\omega) \subseteq \mathbb{R}^2$ y $S(\omega)$ es Hausdorff, así se cumple que en $S(\omega)$ cualquier sucesión no puede converger a más de un punto.

Finalmente, probaremos que cualquier abierto U que contiene a $\{\infty\}$ posee una cola de la sucesión S. En efecto, sea U un abierto que contiene a $\{\infty\}$. Así para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $m \geq k$ se tiene que $(n, m) \in U$. Esto muestra que el conjunto U contiene una cola de la sucesión dada. □

Lema 1.6.3 *$S(\omega)$ es Fréchet.*

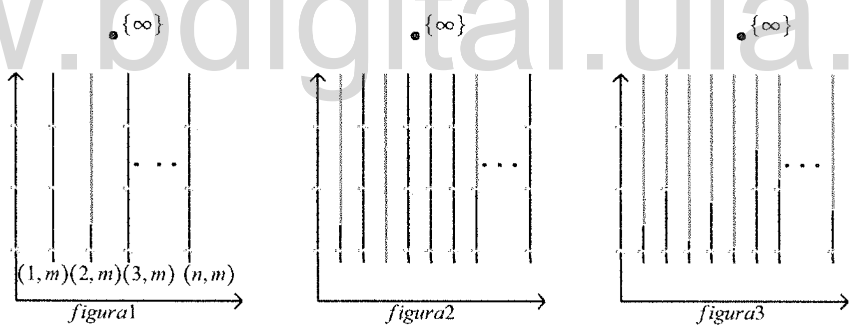
Demostración. Consideremos $A \subseteq S(\omega)$ y $x \in S(\omega)$ debemos probar: $x \in \overline{A}$ sí, y sólo, si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ tal que $x_n \to x$. Consideremos los siguientes casos:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A \cap \{(n, m) : m \in \mathbb{N}\}$ es finito. El conjunto A podria lucir como (lo que esta marcado con color rojo):



Como $A \cap \{(n,m) : m \in \mathbb{N}\}$ es finito para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $S(\omega)\backslash A$ es un conjunto abierto de $S(\omega)$ que contiene al punto $\{\infty\}$, así se tiene que $A = \overline{A}$. por ende, para todo $x \in \overline{A}$ existe la sucesión eventualmente constante x que está contenida en A y que converge a x.

2. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap \{(n,m) : m \in \mathbb{N}\}$ es infinito. Las siguientes figuras muestran los posibles casos del conjunto A:



   a) Si A luce como la figura 1 o la figura 2, entonces por el lema 1.6.2 se tiene la sucesión formada por la sección vertical o finitas secciones verticales converge al punto $\{\infty\} \in S(\omega)$. Luego tenemos que: existe una sucesión en A convergente a $\{\infty\}$ y claramente $\{\infty\} \in \overline{A}$.

   b) Si A es como en la figura 3, entonces podemos tomar una sucesión en A convergente a $\{\infty\}$, es decir por el lema 1.6.2 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S \subseteq \{1,2,...,n\} \times \mathbb{N} \subset A$ y S converge a $\{\infty\}$. Por lo tanto tenemos una sucesión $S \subset A$ convergente a $\{\infty\}$ y tal que $\{\infty\} \in \overline{A}$.

Finalmente de los items 1 y 2 podemos concluir que $S(\omega)$ es Fréchet. □

Lema 1.6.4 *$S(\omega)$ es secuencial.*

Demostración. Lineas arriba se probó que $S(\omega)$ es un espacio Fréchet. Así por la proposición 1.3.3 se tiene que $S(\omega)$ es secuencial. □

Lema 1.6.5 *El rango secuencial de $S(\omega)$ es 1, es decir $\Sigma(S(\omega)) = 1$.*

Demostración. Por el lema 1.6.3 se tiene que $S(\omega)$ es Fréchet y por el lema 1.4.8 concluimos que $\Sigma(S(\omega)) = 1$. □

1.7. El espacio de Arens

En la sección 1.2 se definió el espacio de Arens. Además se caracterizaron las sucesiones convergentes. Ahora calcularemos el rango secuencial de Arens.

Mostraremos que el rango secuencial de S_2 es 2, es decir $\Sigma(S_2) = 2$. En efecto

1. Consideremos $A \subseteq S_2$ tal que $A = \{\langle n,m\rangle : n,m \in \mathbb{N}\}$. Claramente $A^{(0)} = A$ por definición de operador secuencial. Ahora bien, $A^{(1)} = A \cup \{\langle n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$, ya que para $i \in \mathbb{N}$ fijo se tiene que $\langle i,m\rangle \to \langle i\rangle$ cuando $m \to \infty$. Por otra parte, $A^{(2)} = \{\varnothing\} \cup A^{(1)}$, ya que $\langle n\rangle \to \varnothing$ cuando $n \to \infty$. Si aplicamos de nuevo el operador secuencial a $A^{(2)}$ podemos notar que $A^{(3)} = A^{(2)}$ Por tanto, $\rho(A,S_2) = 2$.

2. Si consideramos $B \subseteq S_2$ tal que $B = \{\langle n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $B^{(0)} = B$. Además si aplicamos de nuevo el operador secuencial a $B^{(0)}$ tenemos que $B^{(1)} = \{\varnothing\} \cup B$, pues $\langle n\rangle \to \varnothing$ cuando $n \to \infty$. Nuevamente aplicamos el operador secuencial a $B^{(1)}$ para obtener: $B^{(2)} = B^{(1)}$. En consecuencia $\rho(B,S_2) = 1$. Cabe destacar que cualquier subsuseción de $\langle n\rangle$ converge a $\varnothing$ por tanto si consideramos un subconjunto con dicha subsucesión entonces se demuestra que el rango secuencial de dicho subconjunto en S_2 también es 1.

3. Si consideramos $C \subseteq S_2$ tal que C está formado por infinitos elementos de $\langle i,m\rangle$ e infinitos elementos de $\langle k,m\rangle$, con $i \neq k \in \mathbb{N}$, entonces dicha sucesión tiene punto de acumulación cuando $m \to \infty$, mas no es convergente. por ende $\rho(C,S_2) = 0$.

4. Si consideramos $D \subseteq S_2$ tal que $D = \{\varnothing\}$, entonces claramente se tiene $D^{(0)} = D$ y $D^{(1)} = D^{(0)}$ al aplicar dos veces consecutivas el operador secuencial. Por lo tanto $\rho(D,S_2) = 0$.

Finalmente, de los item (1),(2), (3) y (4) se puede concluir que:

$$\Sigma(S_2) = sup\{\sigma(A,S_2) : A \subseteq S_2\} = 2$$

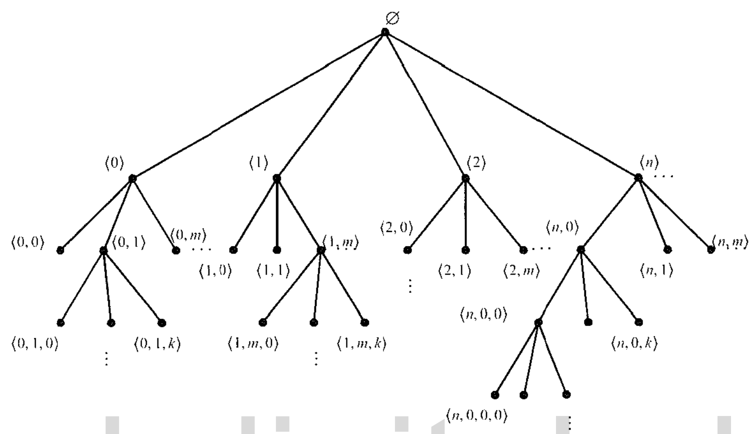
□

1.8. El espacio de Arkhangel'ski - Franklin S_ω

Consideremos el conjunto formado por las sucesiones finitas de números naturales:

$$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$$

Gráficamente



Definamos la siguiente Topología τ para el conjunto $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$:
Sea U un subconjunto de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, diremos que U es abierto sí, y sólo si, para todo $t \in U$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : t^\frown n \notin U\}$ es finito.

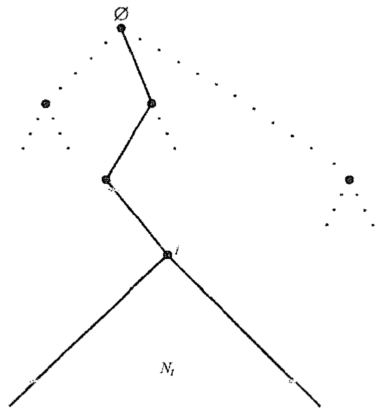
Al espacio $(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \tau)$ lo llamaremos espacio topológico de Arkhangel'ski - Franklin y lo denotaremos con S_ω .

Para cada $t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ se define:

$$N_t = \{x \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : t \le x\}.$$

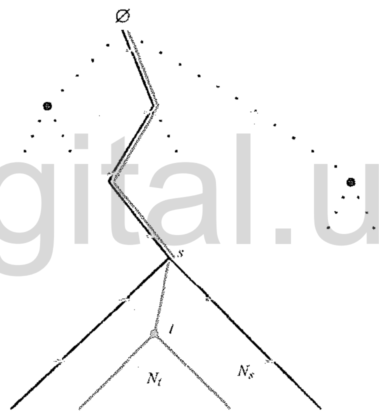
Note que N_t es un conjunto clopen (abierto-cerrado) en S_ω.

Gráficamente un conjunto N_t es de la forma:



Lema 1.8.1 *Sean s y t elementos de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, luego $s \leq t$ si, y sólo si, $N_t \subseteq N_s$.*

Gráficamente:



Observación 1.8.2 $s \perp t \Leftrightarrow N_s \cap N_t = \varnothing$

La forma de una sucesión convergente o divergente en el espacio de Arkhangel'ski - Franklin, esta dada de la siguiente forma:

Lema 1.8.3 *Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S_ω.*

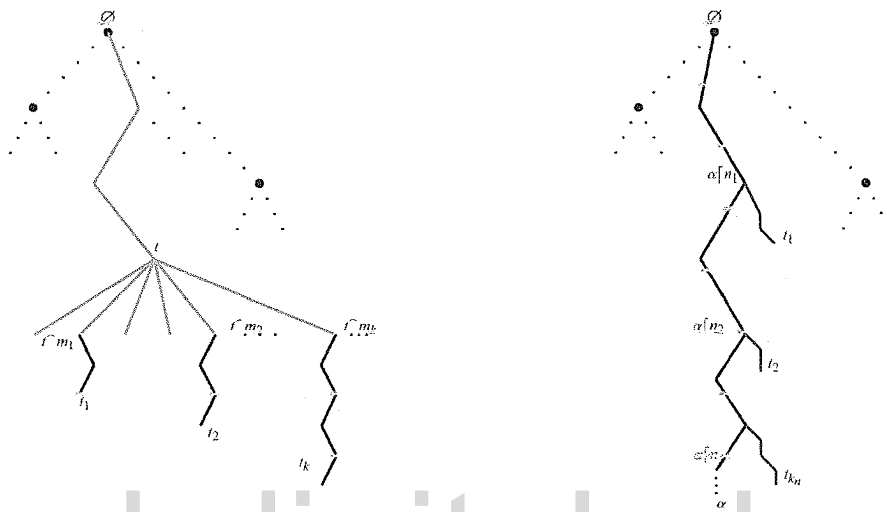
(i) *Si $(\exists t \in S_\omega)(\exists(m_n))(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tal que $t_n = t^\frown m_n$ con $\lim m_n = \infty$, entonces $t_n \to t$.*

(ii) *Si (t_n) tiene rango finito y no es eventualmente constante, entonces (t_n) no converge.*

(iii) *Si $(\exists\, A \subseteq \mathbb{N}$ infinito $)$, $(\exists t \in S_\omega)$ y $(\exists (m_k)_{k\in A} \uparrow)$ una sucesión tal que $(\forall k \in A)$ se tiene que $t^\frown m_k < t_k$, entonces (t_n) no converge.*

(iv) *Si* $(\exists\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, *tal que* $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\exists k \in \mathbb{N})$ *se tiene que* $\alpha[n \leq t_k$, *entonces* (t_n) *no converge.*

Antes de probar el lema, daremos la idea geométrica de las sucesiones consideradas en los items (iii) y (iv), respectivamente.



Demostración.

1. Probemos $[(i)]$.
   Sea U un conjunto abierto en S_ω que contiene a t. Así, se tiene que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : t^\frown n \notin U\}$ es finito. Esto implica que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(t_n)_{n\geq n_0}$ está en U. Por tanto, $t_n \to t$.

2. Probemos $[(ii)]$.
   Sin perdida de generalidad supongamos que $t_n = \{t_0, t_1, ..., t_k\}$ y $t_n \to t$. Consideremos $U = S_\omega \setminus \{t_n\}$ un abierto en S_ω que contiene a t. Claramente, tenemos un abierto U que contiene a t y tal que una cola de la sucesión no está en U. Por lo tanto, t_n no converge a t.

3. Probemos $[(iii)]$.
   La prueba la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que (t_n) converge a $s \in S_\omega$. El suponer que (t_n) converge a s implica que $s < t_k$, para todo $k \in A$. Pues de lo contrario si $t_k \leq s$ para algún $k \in A$ ó $t_k \perp s$ para todo $k \in A$, entonces el abierto N_s no contiene la subsucesión (t_k) ni una cola de ella, lo cual es una contradicción con lo supuesto.

   Por hipótesis, se sabe que $t^\frown m_k < t_k$. Así tenemos que: $s < t^\frown m_k$ o $t^\frown m_k < s$.

   a) Si $t^\frown m_k < s$, entonces $t_k \in N_s$ con k fijo pues m_k es una sucesión estrictamente creciente y estamos suponiendo que $t^\frown m_k < t_k$. En consecuencia casi toda la sucesión $(t_k)_{k\in A}$ no está en N_s. Por lo tanto, $(t_k)_k$ no converge a s. Generando una contradicción con la suposición. Por lo tanto $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

b) Si $s < t^\frown m_k$, entonces $s \leq t$.
Si $s = t$. Consideremos los siguientes conjuntos abiertos que contienen a $t^\frown m_k$ y no contienen a t_k.

$$V^k_{t^\frown m_k} = \{t^\frown m_k^\frown j : j > k\} \cup \{t^\frown m_k^\frown j^\frown u : j > k \quad \& \quad u \in S_\omega\}$$

Luego, $\bigcup V^k_{t^\frown m_k}$ es un abierto que contiene a $t^\frown m_k$ y no contiene a (t_k). Como la sucesión (m_k) es estrictamente creciente, pueden existir algunos $n \in \mathbb{N}$ tal que $t^\frown n \notin (t^\frown(m_k))$, así para estos $n's$ consideremos los abiertos N_n. Ahora consideremos

$$U = \{s^\frown n : n \in \mathbb{N}\} \cup N_n \cup \bigcup V^k_{t^\frown m_k}$$

El conjunto U es abierto y además contiene a s y no contiene a la subsucesión (t_k). Por lo tanto, la subsucesión (t_k) no converge a s. Obteniendo una contradicción con lo supuesto.
Si $s < t$, entonces basta considerar el conjunto abierto formado por U y todos los niveles necesarios que separan a s de t para encontrar la misma contradicción, es decir la subsucesión (t_k) no converge a s.

4. Probemos $[(iv)]$.
Supongamos que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $s \in S_\omega$. Como estamos suponiendo que $t_n \to s$, entonces cualquier conjunto abierto que contenga a s también debe contener una cola de la sucesión, probaremos que esto es falso. Podemos considerar que $s \leq t_{k_n}$ pues en caso contrario tendriamos que o bien $t_{k_n} < s$ o bien $s \perp t_{k_n}$ lo cual implicaria que, al considerar el clopen N_s toda la subsucesión (t_{k_n}) no está en dicho clopen.

Si $s \leq t_{k_n}$ para infinitos elementos de la subsucesión, entonces construiremos un abierto que contiene a s y no contiene ningún elemento de la subsucesión. Como $s \leq t_{k_n}$, entonces $\{t_{k_n}(|s|) : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Así consideremos el siguiente conjunto abierto que contiene a s y no contiene a la subsucesión (t_{k_n}).

$$V^n_s = \{s^\frown j : j \geq n\} \bigcup \{s^\frown j^\frown t : j \geq n \quad \& \quad t \in S_\omega\}$$

Lo cual genera una contradicción con lo supuesto, por lo tanto si tomamos una sucesión como la del item iv, entonces (t_n) no converge.

El lema anterior nos permite concluir que las únicas sucesiones convergentes en S_ω son eventualmente de la forma $s^\frown n_i$ para alguna sucesión creciente de enteros $\langle n_i \rangle$, es decir:

Lema 1.8.4 *Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_\omega$ una sucesión. $t_n \to t \in S_\omega$ sí, y sólo si, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, existe (m_n) una sucesión tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $t_n = t^\frown m_n$ y el conjunto $\{n : m_n = k\}$ es finito, para cada n.*

Una razón muy importante de caracterizar las sucesiones convergentes en S_ω es que podemos construir una inyección continua entre S_ω y los números racionales entre 0 y 1.

Lema 1.8.5 *Existe $H : S_\omega \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ que satisface:*

1. *$H(t)$ es inyectiva*
2. $\lim_{i\to\infty} H(t^\frown i) = H(t)$

Demostración. Definamos:

$$H(\varnothing) = 0$$

$$H(\langle n\rangle) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$H(\langle n,m\rangle) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+m+2}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}}\right)$$

$$H(\langle n,m,k\rangle) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+m+2}} + \frac{1}{2^{n+m+k+3}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right)$$

$$\vdots$$

$$H(\langle n_0,n_1,...,n_{k-1}\rangle) = \frac{1}{2^{n_0+1}} + \frac{1}{2^{n_0+n_1+2}} + \frac{1}{2^{n_0+n_1+n_2+3}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+\sum_{i=0}^{k-1} n_i}}$$

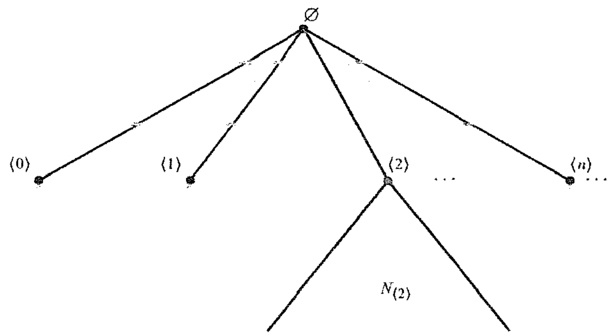
$H(t)$ así definida satisface las dos condiciones del lema. □

Lema 1.8.6 *S_ω es secuencial.*

Demostración. Sea $U \subseteq S_\omega$ secuencialmente abierto, probemos que U es abierto en S_ω. Consideremos $t \in U$, como U es secuencialmente abierto sabemos que cualquier sucesión $(t_n) \in S_\omega$ que converja a t hay una cola de la sucesión contenida en U. Luego, si consideramos la sucesión $t_n = t^\frown n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos notar que $\{n \in \mathbb{N} : t^\frown n \notin U\}$ es finito. Por lo tanto concluimos que U es abierto. Finalmente por el Teorema 1.2.8 se tiene que S_ω es secuencial. □

Otras propiedades del espacio S_ω son: es un espacio T_2, regular, cero dimensional, no tiene puntos aislados, numerable con topología analítica $\prod_3^0$ y no es primero numerable (en [6] muestran esto). Además, otra razón por la cual es importante tener caracterizadas las sucesiones convergentes en S_ω es que podemos mostrar que el rango secuencial de S_ω es ω_1, es decir $\Sigma(S_\omega) = sup\{\rho(A,S_\omega) : A \subseteq S_\omega\} = \omega_1$. Una pregunta muy natural es: ¿Cómo construir $T_\alpha \subseteq S_\omega$ cuyo $\rho(T_\alpha,S_\omega) = \alpha \leq \omega_1$?. Los siguientes lemas nos permitirán construir dichos subconjuntos.

Consideremos los conjuntos abiertos $N_{\langle n\rangle}$ con $n \in \mathbb{N}$. Gráficamente son de la forma:



Lema 1.8.7 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : S_\omega \to N_{\langle n\rangle}$ definida por $f(t) = \langle n\rangle^\frown t$, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.

1. Probaremos que f es inyectiva. Supongamos que $\langle n\rangle^\frown s = \langle n\rangle^\frown t$, donde $s = \langle s_0, s_1, ..., s_k\rangle$ y $t = \langle t_0, t_1, ..., t_r\rangle$. Puesto que $\langle n\rangle^\frown s = \langle n\rangle^\frown t$ entonces $\langle n, s_0, s_1, ..., s_k\rangle = \langle n, t_0, t_1, ..., t_r\rangle$. En consecuencia $\langle s_0, s_1, ..., s_k\rangle = \langle t_0, t_1, ..., t_r\rangle$. Por lo tanto $s = t$.

2. Probaremos que f es sobreyectiva. Consideremos $t \in N_{\langle n\rangle}$, entonces existe $s \in S_\omega$ tal que $t = \langle n\rangle^\frown s$. Así se tiene que $f(s) = t$.

3. Veamos que f es continua. Probaremos que f envia sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. En efecto, sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S_ω tal que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $t \in S_\omega$. Puesto que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a t en S_ω entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n = t^\frown m_n$, para todo $n \geq n_0$. Así aplicando f a (t_n) obtenemos que $f(t_n) = f(t^\frown m_n) = \langle n\rangle^\frown t^\frown m_n$. Ahora bien, podemos notar que $\langle n\rangle^\frown t^\frown m_n$ converge a $\langle n\rangle^\frown t$ y $f(t) = \langle n\rangle^\frown t$. En consecuencia $f(t_n)$ converge a $f(t)$. Por lo tanto f es continua.

4. Nos hace falta demostrar que f^{-1} es continua. Demostraremos que sucesiones convergentes en $N_{\langle n\rangle}$ proviene de sucesiones convergentes en S_ω. Consideremos $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset N_{\langle n\rangle}$ tal que $y_m \to y \in N_{\langle n\rangle}$. Cabe destacar que $y = \langle n\rangle^\frown f^{-1}(y)$ pues $f(f^{-1}(y)) = y$ y $f(f^{-1}(y)) = \langle n\rangle^\frown f^{-1}(y)$. Puesto que (y_m) es una sucesión convergente a y en $N_{\langle n\rangle} \subseteq S_\omega$ entonces existe $r_m \in \mathbb{N}$ tal que $y_m = y^\frown r_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Así para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\langle n\rangle^\frown f^{-1}(y_m) = y_m = \langle n\rangle^\frown f^{-1}(y)^\frown r_m$. Por ende $f^{-1}(y_m) = f^{-1}(y)^\frown r_m$. Lo cual muestra que $f^{-1}(y_m) \to f^{-1}(y)$. Por lo tanto f^{-1} es continua y finalmente f es un homeomorfismo. □

Lema 1.8.8 *Para todo $\alpha < \omega_1$ y todo $n \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto T en $N_{\langle n\rangle}$ tal que $\rho(T, N_{\langle n\rangle}) = \alpha$ y $\langle n\rangle \in T^{(\alpha)} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} T^{(\beta)}$.*

Demostración. La prueba la haremos por inducción.

1. Primero mostraremos el caso α finito que ilustra el comportamiento del operador secuencial en S_ω
   Caso base ($\alpha = k$).
   Consideremos $T_k = \{\langle n_0, n_1, n_2, ..., n_{k-1}\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1, ..., k-1\}$. Aplicando el operador secuencial obtenemos:

$$T_k^{(0)} = T_k$$

$$T_k^{(1)} = \{\langle n_0, n_1, n_2, ..., n_{k-2}\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1, ..., k-2\} \cup T_k^{(0)}$$

$$T_k^{(2)} = \{\langle n_0, n_1, n_2, ..., n_{k-3}\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1, ..., k-3\} \cup T_k^{(1)}$$

$$\vdots$$

$$T_k^{(k-2)} = \{\langle n_0, n_1\rangle : n_i \in \mathbb{N}, \forall i = 0, 1\} \cup T_k^{(k-3)}$$

$$T_k^{(k-1)} = \{\langle n_0\rangle : n_0 \in \mathbb{N}\} \cup T_k^{(k-2)}$$

$$T_k^{(k)} = \{\varnothing\} \cup T_k^{(k-1)}$$

$$T_k^{(k+1)} = T_k^{(k)}$$

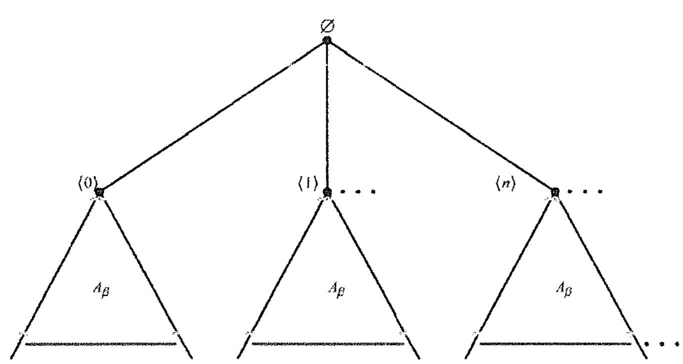
   por lo tanto se tiene que $\rho(T_k, S_\omega) = k$.

   Ahora supongamos que el lema es valido para todo $\beta < \alpha$.

2. caso α−sucesor ($\alpha = \beta + 1$).
   Aplicando la hipótesis inductiva para β, podemos considerar que existe $T_\beta \subseteq S_\omega$ tal que $\rho(T_\beta, S_\omega) = \beta$. Luego, por el lema 1.8.7, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \subseteq N_{\langle n\rangle}$ tal que $\rho(A_n, N_{\langle n\rangle}) = \beta$ y $\langle n\rangle \in A_n^{(\beta)} \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} A_n^{(\gamma)}$. Consideremos

$$T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

   que geométricamente es de la forma:



Así, aplicando el operador secuencial al conjunto T se tiene:

$$T^{(\gamma)} = \bigcup_n A_n^{(\gamma)} \quad con \quad \gamma \leq \beta \quad y \quad (\langle n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \notin \bigcup_{\gamma<\beta} A_n^{(\gamma)}$$

Luego, tenemos

$$T^{(\beta+1)} = \bigcup_n A_n^{(\beta)} \cup \{\varnothing\}$$

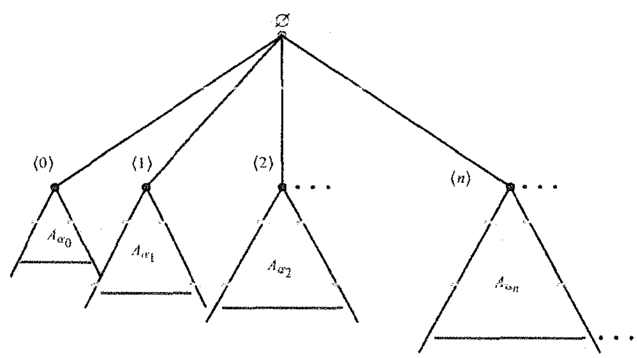
Además, $\langle n \rangle \in A_{\langle n \rangle}^{(\beta)} \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} A_n^{(\gamma)}$, es decir $(\langle n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{(\beta)}$

Por lo tanto, se tiene que $\rho(T, S_\omega) = \beta + 1 = \alpha$.

3. caso α−límite.
   Consideremos $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de ordinales convergiendo a α. Por hipótesis inductiva se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $T_n \subseteq S_\omega$ con $\rho(T_n, S_\omega) = \alpha_n$. Por el lema 1.8.7 se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \subseteq N_{\langle n \rangle}$ tal que $\rho(A_n, N_{\langle n \rangle}) = \alpha_n$ y $\langle n \rangle \in A_n^{(\alpha_n)} \setminus \bigcup_{\gamma<\alpha_n} A_n^{(\gamma)}$. Ahora, consideremos

$$T = \bigcup_{n\in N} A_n \cup \{\varnothing\}$$

que geométricamente es de la forma:



Por lo tanto, se tiene que $\rho(T, S_\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \alpha$.

Esto finaliza la inducción y demuestra que para todo $\alpha < \omega_1$, existe $T \subseteq S_\omega$ tal que $\rho(T, S_\omega) = \alpha$. Por lo tanto $\Sigma(S_\omega) \geq \omega_1$. Por otro lado, por el lema 1.4.2 se tiene que el operador clausura se estabiliza en ω_1− iteraciones, por lo tanto podemos concluir que $\Sigma(S_\omega) = \omega_1$. □

Capítulo 2

Correflexión secuencial

En el capítulo anterior definimos un espacio secuencial X como aquel espacio tal que cualquier subconjunto secuencialmente abierto en X es abierto en X. Definiremos una nueva topología usando como conjuntos abiertos los conjuntos secuencialmente abiertos de un espacio topológico (X,τ) dado.

2.1. Correflexión secuencial

Definición 2.1.1 *Sea (X,τ) un espacio topológico, consideremos σ_τ la colección de todos los conjuntos $\tau-$ secuencialmente abiertos.*

Lema 2.1.2 *σ_τ es una topología.*

Demostración.

1. $\varnothing$ y X están en σ_τ. Pues $\varnothing$ y X son $\tau-$ abiertos, entonces $\varnothing$ y X son $\tau-$ secuencialmente abiertos, ya que todo abierto es secuencialmente abierto . Por tanto se tiene que $\varnothing$ y X están en σ_τ.

2. Sea $\{U_\alpha\}$ una familia indizada de elementos de σ_τ, probemos que $\bigcup U_\alpha$ pertenece a σ_τ. Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ y $x \in \bigcup U_\alpha$. Probemos que hay una cola de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\bigcup U_\alpha$. En efecto, puesto que $x \in \bigcup U_\alpha$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_i$. Por hipótesis tenemos que U_i es secuencialmente abierto, así existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que (x_n) está en U_i, para todo $n \geq n_0$. En consecuencia (x_n) está en $\bigcup U_\alpha$, para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, se tiene que $\bigcup U_\alpha \in \sigma_\tau$.

3. Sean $U_1, ...U_m$ elementos de σ_τ, probemos que $\bigcap U_i$ está en σ_τ. Lo cual es equivalente a mostrar que $\bigcap U_i$ es $\tau-$ secuencialmente abierta. En efecto, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ y $x \in \bigcap U_i$. Como $x \in \bigcap U_i$ entonces x está en cada uno de los U_i, para $i = 1, ..., m$, además cada U_i es $\tau-$ secuencialmente abierto. En consecuencia, existen $n_i \in \mathbb{N}$ con $i = 1, ..., m$ tal que (x_n) está en U_i para todo $n \geq n_i$ con $i = 1, ..., m$. Consideremos $n_0 = max\{n_i : i = 1, ..., m\}$, luego (x_n) está en U_i para todo $n \geq n_0$ e $i = 1, ..., m$. Por ende, (x_n) está en $\bigcap U_i$ para todo $n \geq n_0$ y por lo tanto $\bigcap U_i$ es $\tau-$ secuencialmente abierta. □

A σ_τ la llamaremos la topología de la correflexión secuencial y (X, σ_τ) lo llamaremos espacio topológico de la correflexión secuencial. Muchas veces al espacio (X, σ_τ) lo denotaremos con σX, siempre y cuando esto no se preste a confusión. Podemos observar que la topología σ_τ es más fina que la topología τ, es decir $\tau \subseteq \sigma_\tau$. El siguiente lema muestra que las dos topologías τ y σ_τ tienen las mismas sucesiones convergentes.

Lema 2.1.3 (X, τ) (X, σ_τ) *poseen las mismas sucesiones convergentes.*

Demostración.

1. Puesto que $\tau \subseteq \sigma_\tau$, entonces toda sucesión $\sigma_\tau-$ convergente es $\tau-$ convergente.

2. Ahora probemos que toda sucesión $\tau-$ convergente es $\sigma_\tau-$ convergente. En efecto, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una suceción $\tau-$ convergente a $x \in X$ y consideremos $U \in \sigma_\tau$ tal que $x \in U$. Puesto que U es $\tau-$ secuencialmente abierto $x \in U$, entonces cualquier sucesión en X que converja a $x \in U$ se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión está en U a partir de n_0, es decir (x_n) está en U para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión $\sigma_\tau-$ convergente. □

Si una topología es más fina que otra, es decir $\tau \subseteq \rho$, entonces sus respectivas correflexiones σ_τ y σ_ρ mantienen la inclusión ($\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho$). Lo cual implica que σ_ρ es más fina que σ_τ.

Lema 2.1.4 *Consideremos τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X. Si $\tau \subseteq \rho$, entonces $\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho$.*

Demostración. Sea $A \in \sigma_\tau$, entonces A es $\tau-$ secuencialmente abierto. Veamos que A es $\rho-$ secuencialmente abierto. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\rho-$ convergente a $x \in A$, por el lema 2.1.3 se tiene que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\tau-$ convergente a $x \in A$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está en A para todo $n \geq n_0$. Esto muestra que A es $\rho-$ secuencialmente abierto. Por lo tanto $A \in \sigma_\rho$. □

Teorema 2.1.5 (X, σ_τ) *es un espacio secuencial.*

Demostración. Sea U un conjunto $\sigma_\tau-$ secuencialmente abierto, probemos que $U \in \sigma_\tau$. En efecto, sea $x \in U$. Como U es un conjunto $\sigma_\tau-$ secuencialmente abierto, entonces para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X el cual es $\sigma_\tau-$ convergente a $x \in U$ se tiene que existe una cola de la sucesión en U. Por el lema 2.1.3 se tiene que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\tau-$ convergente a x, en consecuencia existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\geq n_0}$ está en U. Luego, acabamos de probar que U es un conjunto $\tau-$ secuencialmente abierto. Por otro lado recordemos que los conjuntos $\tau-$ secuencialmente abiertos son los abiertos de σ_τ. Por lo tanto $U \in \sigma_\tau$. □

Otra manera de probar que un espacio topológico es secuencial es la siguiente:

Corolario 2.1.6 *Sea τ una topología sobre X. τ es secuencial si, y sólo si, $\tau = \sigma_\tau$.*

Demostración.

1. Supongamos que τ es secuencial probemos que $\tau = \sigma_\tau$. Claramente $\tau \subseteq \sigma_\tau$. Ahora nos hace falta probar que $\sigma_\tau \subseteq \tau$. En efecto, sea $U \in \sigma_\tau$, en consecuencia U es $\tau-$ secuencialmente abierto. Ahora bien, como τ es secuencial y U es $\tau-$ secuencialmente abierto entonces $U \in \tau$. Por lo tanto $\sigma_\tau \subseteq \tau$.

2. La prueba del recíproco se desprende del teorema 2.0.5. pues σ_τ es secuencial y por hipótesis $\tau = \sigma_\tau$. □

Si consideramos el espacio topológico (X, τ), el siguiente corolario muestra que la topología de la correflexión secuencial es la menor topología secuencial que contiene a τ.

Corolario 2.1.7 *Sea τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X. Si $\tau \subseteq \rho$ y ρ es secuencial entonces $\sigma_\tau \subseteq \rho$.*

Demostración. Consideremos τ y ρ dos topologías sobre el conjunto X tales que $\tau \subseteq \rho$ y ρ es secuencial. Como la topología ρ es más fina que la topología τ, es decir $\tau \subseteq \rho$ entonces por el lema 2.1.4 tenemos que $\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho$. Por otro lado sabemos que la topología ρ es secuencial así por el corolario 2.1.6 tenemos que $\sigma_\rho = \rho$. Finalmente se tiene que $\sigma_\tau \subseteq \sigma_\rho = \rho$, por lo tanto $\sigma_\tau \subseteq \rho$. □

El objetivo de este capítulo, aparte de mostrar la nueva topología de la correflexión secuencial, es estudiar propiedades muy relevantes del espacio de Arens y del espacio abanico secuencial. Más aún veremos cuándo un espacio topológico (X, τ) tiene una copia cerrada de los dos espacios mencionados. En este capítulo consideraremos espacios topológicos Hausdorff.

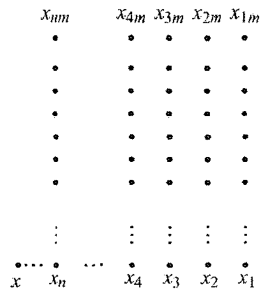
2.2. Espacio peine

Definición 2.2.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Consideremos el subespacio de X formado por:*

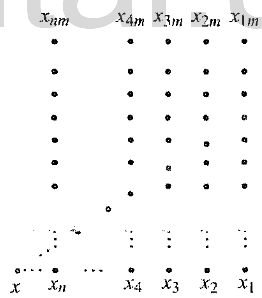
$$P = \{x\} \bigcup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

donde $(x_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones en* (X,τ) *tales que* $\lim_{m\to\infty} x_{nm} = x_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $x_{nm} \neq x_n$. *Además* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es también una sucesión en* (X,τ) *que converge a* $x \in X$ *con* $x_n \neq x$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Al subespacio* P *lo llamaremos espacio peine.*

Un peine luce gráficamente como:



Llamaremos una **diagonal en un peine** $P \subseteq X$ a una sucesión $(x_{n_i m})$ que converge a x, con n_i estrictamente creciente. Dicha sucesión de puntos puede lucir como los puntos "*marcados*" con color azul en la siguiente figura.



Ejemplo 2.2.2 *El espacio de Arens* (S_2) *es un peine sin diagonales. En el capítulo anterior se demostró que no existe una sucesión en el segundo nivel de Arens que converja a* $\varnothing$, *por esta razón* S_2 *es un peine sin diagonales.*

Lema 2.2.3 *[10, pag 187] Dado un espacio* X, σX *es homeomorfo a* S_2 *si, y sólo si,* X *es un peine sin diagonales.*

Demostración. Supongamos que σX es homeomorfo a S_2. Como σX y X tienen las misma sucesiones convergentes y S_2 es un peine sin diagonales, entonces X es un peine sin diagonales.

Ahora supongamos que $X = \{x\} \bigcup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{nm} : n,m \in \mathbb{N}\}$ un peine sin diagonales, con las misma condiciones presentadas en la definición 2.2.1. Puesto que X y σX poseen las mismas sucesiones convergentes, entonces σX también es un peine sin diagonales. Por otro lado, sabemos que σX es secuencial y S_2 es un peine secuencial sin diagonales. Por ende, podemos definir el siguiente homeomorfismo $F : \sigma X \to S_2$

$$\begin{cases} F(x_{nm}) = \langle n, m\rangle \\ F(x_n) = \langle n\rangle \\ F(x) = \varnothing \end{cases}$$

Claramente F es inyectiva. Además, F envia sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Por el lema 1.2.18 F es continua. Por ultimo, sucesiones convergentes en S_2 provienen de sucesiones convergentes en σX, por tanto F^{-1} es continua. □

Consideremos un espacio topológico (X, τ) y $A \subseteq X$. La clausura de A en (X, σ_τ) la denotaremos con $Cl_{\sigma X}(A)$ o con $Cl_\sigma(A)$ siempre y cuando no se preste a confusión. Además, denotaremos con $Cl^s_{\sigma X}(A)$ a la clausura secuencial del conjunto A con la topología de la correflexión. Por otro lado, recordemos del capítulo anterior que:

$$A^{(1)} = \{x \in X : x = \lim_n x_n \quad \& \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad en \quad A\}$$

y un espacio X es Fréchet si, para cualquier $x \in cl_X(A)$ existe una sucesión en A convergiendo a x. El espacio de Arens (S_2) no es Fréchet, en consecuencia ningún espacio regular, numerable, Fréchet contiene copias de S_2. En esta sección analizaremos este hecho con detenimiento. Un espacio X contiene una copia de Y, si existe $Z \subseteq X$ tal que Z es homeomorfo a Y.

Lema 2.2.4 *[10, pág 187] Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *σX es un espacio Fréchet,*
2. *$Cl_\sigma(A) = A^{(1)}$ para cada $A \subseteq X$,*
3. *$A^{(1)}$ es secuencialmente cerrado en X para cada $A \subseteq X$.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$.
Supongamos que σX es un espacio Fréchet y consideremos $A \subseteq X$. Verifiquemos $Cl_\sigma(A) \subseteq A^{(1)}$. En efecto, sea $x \in Cl_\sigma(A)$, puesto que σX es Fréchet entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es σ_τ convergente a x. Por el lema 2.1.3 se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ convergente a x. En consecuencia $x \in A^{(1)}$. Ahora verifiquemos que $A^{(1)} \subseteq Cl_\sigma(A)$, sea $x \in A^{(1)}$. Así, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ convergente a x, en consecuencia la suceción $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es σ_τ convergente a x. Por lo tanto $x \in Cl_\sigma(A)$.

$2 \Rightarrow 3$.

Sea $A \subseteq X$ probemos que $A^{(1)}$ es secuencialmente cerrado en X. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A^{(1)}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es τ convergente a x, en consecuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es σ_τ convergente a x. De la hipótesis se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $Cl_\sigma(A)$ por ende $x \in Cl_\sigma(A)$. Por lo tanto $x \in A^{(1)}$.

$3 \Rightarrow 1$.
Afirmamos que $A^{(1)} = Cl^s_{\sigma X}(A)$, para todo $A \subseteq X$ ($A^{(1)}$ es secuencialmente cerrado). La afirmación permite probar que σX es un espacio Fréchet. En efecto, sea $A \subseteq X$ y $x \in Cl_{\sigma X}(A)$. Puesto que σX es un espacio secuencial, entonces por el teorema 1.4.7 se tiene que $Cl_{\sigma X}(A) = Cl^s_{\sigma X}(A)$. Así, se tiene que $x \in Cl_{\sigma X}(A) = Cl^s_{\sigma X}(A) = A^{(1)}$. Por ende, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$. Por lo tanto, σX es un espacio Fréchet.

Probaremos la afirmación.

Verifiquemos que $A^{(1)} \subseteq Cl^s_{\sigma X}(A)$, para todo $A \subseteq X$. Sea $x \in A^{(1)}$. Así, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A que es $\tau-$ convergente a x. Por ende, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A también es $\sigma_\tau-$ convergente a x. Puesto que x es el límite de una sucesión $\sigma_\tau-$ convergente en A, entonces se tiene que $x \in Cl^s_{\sigma X}(A)$.
Ahora, mostraremos que $Cl^s_{\sigma X}(A) \subseteq A^{(1)}$, para todo $A \subseteq X$. Puesto que, $Cl^s_{\sigma X}(A) = \bigcap\{B : A \subseteq B \ \ \& \ \ B \ \ \textit{secuencialmente cerrado}\}$, $A \subseteq A^{(1)}$ y $A^{(1)}$ es secuencialmente cerrado, entonces se tiene claramente la inclusión. □

El siguiente Teorema tomado de [10, pag 187], solo presenta la prueba ($3 \Rightarrow 1$), nosotros completamos la demostración

Teorema 2.2.5 *[10, pág 187] Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *σX es un espacio Fréchet,*
2. *Cualquier peine de X tiene una diagonal,*
3. *X no contiene ningun subespacio que tiene a S_2 como su correflexión secuencial.*

Demostración.

$(1) \Rightarrow (2)$.
Sea $P = \{x\} \bigcup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma X$ un peine, probemos que P tiene una diagonal. En efecto, tomemos $A \subseteq P$ tal que $A = \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$. Luego, tenemos que

$x \in Cl_\sigma(A)$. Por otro lado, por hipótesis tenemos que σX es Fréchet, así existe una sucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en A tal que $y_i \to x$. Esto implica que la sucesión (y_i) intersecta a cada sucesión $(x_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ en una cantidad finita de puntos, pues de lo contrario la sucesión (y_i) estaría para un n fijo en la sucesión $(x_{nm})_m$. Esto no puede ocurrir ya que $x_{nm} \to x_n$ y acabamos de decir que $y_i \to x$. En consecuencia podemos construir una subsucesión (x_{n_im}) de la sucesión (y_i) con n_i estrictamente creciente, tal que $x_{n_im} \to x$. Por lo tanto P tiene una diagonal.

$(2) \Rightarrow (3)$ por reducción al absurdo.
Sea P un subespacio de X tal que σP es homeomorfo a S_2. Puesto que S_2 es un peine sin diagonales y σP es homeomorfo a S_2, entonces σP es un peine sin diagonales. Así esta suposición trae como consecuencia una contradicción con la hipótesis, ya que todo peine de X tiene una diagonal.

$(3) \Rightarrow (1)$ probaremos $\neg(1) \Rightarrow \neg(3)$.
Supongamos que σX no es Fréchet. Por el lema 2.2.4 existe un subconjunto A de X tal que $A^{(1)}$ no es cerrado en σX. Puesto que σX es secuencial, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $A^{(1)}$ convergiendo a $x \in X\backslash A^{(1)}$. Podemos asumir que los x_n son todos distintos y $x_n \notin A$. Por otro lado, como X es T_2 entonces podemos considerar $\{V_n\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos dos a dos disjuntos de X tal que $x_n \in V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $(x_{nm})_m$ en $A \cap V_n$ convergiendo a x_n. Sea

$$C = \{x\} \bigcup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Claramente C es un peine de x en X. Por el item (3) se tiene que σC no es homeomorfo a S_2. Así por el lema 2.2.3, C tiene una diagonal. Sea $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una diagonal en C que converge a $y \in C$. Si $y \neq x$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $y \in V_i$. Así, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in V_i$ para todo $k \geq k_0$, lo cual es una contradicción. Luego C tiene una diagonal convergiendo a x, por ende $x \in A^{(1)}$, lo cual también es una contradicción. Por lo tanto σX es Fréchet. □

La siguiente terminología proviene del alemán. La "G"viene de Gebiet que significa çonjunto abierto ", y la "δ"de Durchschnitt que significa ïntersección"

Definición 2.2.6 *Un punto x de un espacio X es llamado G_δ regular , si existe una sucesión de vecindades de x en X tal que la intersección de sus clausuras es $\{x\}$.*

Teorema 2.2.7 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si (X, τ) es Hausdorff y numerable, entonces cada punto del espacio X es G_δ regular.*

Demostración. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de (X, τ). Consideremos $x \in X$, probemos que x es $G_\delta-$ regular. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x = x_0$. Puesto que (X, τ) es Hausdorff, entonces existen abiertos U_0 y V_0 de x_0 y x_1, respectivamente, tal que $U_0 \cap V_0 = \varnothing$. Así, separamos x_0 de x_1. Ahora bien, si $x_2 \in V_0$. Tenemos que ya existen los abiertos disjuntos de x_0 y x_2 que separan a los puntos mencionados. En caso contrario, si $x_2 \notin V_0$, entonces como (X,τ) es Hausdorff, existen abiertos U_1 y V_1 de x_0 y x_2, respectivamente, tales que $U_1 \cap V_1 = \varnothing$. Consideremos, $W_0 = U_0$ y $W_1 = U_0 \cap U_1$ abiertos de x_0 tales que x_1 y x_2 no están en W_0 ni en W_1. Además, cabe destacar que x_1 y x_2 no están en $\overline{W_0}$, ni en $\overline{W_1}$, pues si $x_1 \in \overline{W_0}$ entonces $V_0 \cap W_0 \neq \varnothing$ esto produce una contradicción. Por otro lado, si $x_1 \in \overline{W_1}$ entonces $V_1 \cap W_1 \neq \varnothing$, lo cual nos lleva a una contradicción. Análogamente se demuestra que x_2 no está en $\overline{W_0}$, ni en $\overline{W_1}$.

Ahora bien, supongamos que para los primeros $(n-1)$ puntos del espacio X, segun la enumeración antes mencionada, hemos encontrado abiertos tales que $x_0 \in W_{n-1}$, $x_i \in V_i$ y $x_i \notin \overline{W_{n-1}}$ para todo $i = 1, 2, ..., (n-1)$. Consideremos x_0 y x_n, sin pérdida de generalidad supondremos que $x_n \notin V_n$ para todo $n = 0, 1, ..., n-1$. Como (X,τ) es Hausdorff, se tiene que existen abiertos disjuntos U_n y V_n de x_0 y x_n, respectivamente. Luego, consideremos $x_0 \in W_n = U_0 \cap U_1 \cap ... \cap U_n$, el cual es un vecindad de x_0. Además, ningún x_i con $i = 1, 2, ..., n$ está en $\overline{W_n}$. Finalmente, hemos encontrado una sucesión $\{W_n\}$ de vecindades de x_0, con $W_{n+1} \subset W_n$ y tal que $\{x_0\} = \bigcap\{\overline{W_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto x_0 es G_δ− regular. □

El teorema anterior permite demostrar que los siguientes ejemplos son espacios en los cuales cada punto es G_δ regular.

Ejemplo 2.2.8 *Todos los puntos del espacio de Arens S_2 son G_δ regular. Pues en el capítulo anterior se probó que S_2 es Hausdorff y claramente S_2 es numerable. Por lo tanto, por el teorema 2.2.7 se concluye lo afirmado.*

Ejemplo 2.2.9 *Todos los puntos del espacio abanico secuencial $S(\omega)$ son G_δ regular. En efecto, por el lema 1.6.1 se tiene que $S(\omega)$ es Hausdorff, además $S(\omega)$ es numerable. Por lo tanto, por el teorema 2.2.7 se tiene lo afirmado.*

Ejemplo 2.2.10 *Todos los puntos del espacio Arkhangel'ski - Franklin S_ω son G_δ regular.*

No conocemos un espacio topológico X Hausdorff en el cual un punto no sea G_δ− regular. Sospechamos que el espacio formado por las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual no es G_δ−regular. Así dejamos abierta esa pregunta.

Lema 2.2.11 *[10, pág 188] Sea X un espacio en el cual cada punto es G_δ regular. Si X no contiene ningún sub-espacio cerrado Y tal que σY es homeomorfo a S_2, entonces σX es un espacio Fréchet.*

Demostración. Por el teorema 2.2.5 , solo necesitamos probar: si X contiene un subespacio S tal que σS es homeomorfo a S_2, entonces S contiene un subespacio cerrado T de X tal que σT es homeomorfo a S_2. Sea

$$S = \{x\} \bigcup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Consideremos una sucesión $\{G_\delta\}$ de vecindades abiertas de x en X tal que $G_{k+1} \subset G_k$ y $\{x\} = \bigcap\{Cl(G_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Puesto que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \in G_k$. Ahora bien, la sucesión $\{x_{n_k m}\}_m$ converge a x_{n_k}; para todo $m \in \mathbb{N}$, así existe un $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k m_k} \in G_k$ para $m \geq m_k$. Sea

$$T = \{x\} \bigcup \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_{n_k m} : k \in \mathbb{N}, m \geq m_k\}.$$

Claramente T es un peine sin diagonales, además T es cerrado. En efecto, Si $p \in X \backslash T$ entonces $p \in X \backslash Cl(G_k)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, consideremos

$$F = \{x_{n_i} : i < k\} \bigcup \{x_{n_i m} : i < k, m \geq m_i\}$$

el cual es compacto en X. Luego existe una vecindad W que contiene a p tal que $W \bigcap F = \varnothing$, así $W \bigcap (X \backslash Cl(G_k)) \bigcap T = \varnothing$. En consecuencia, T es cerrado en X. Por el lema 2.2.3 se tiene que σT es homeomorfo a S_2, pues T es un abanico sin diagonales. □

Cabe destacar que el siguiente corolario no presenta demostración en [10, pág 189], ya que el autor dice antes de mencionar el corolario que la demostración se desprende del hecho que: todo subespacio cerrado de un espacio secuencial es secuencial. En este trabajo hacemos la siguientes observación, nos parece que en la hipótesis del corolario hace falta pedirle al espacio X que sea secuencial, pues sino no tiene sentido la observación que hace S. Lin antes de enunciar el corolario. Presentaremos el enunciado del corolario como pensamos que es correcto.

Corolario 2.2.12 *Sea X un espacio topológico secuencial en el cual cada punto es G_δ regular. Si X contiene una copia de S_2, entonces X contiene una copia cerrada de S_2.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico secuencial en el cual cada punto es G_δ regular y X tiene una copia de S_2, probemos que la copia de S_2 es cerrada. puesto que X y σX poseen las mismas sucesiones convergentes entonces se tiene que σX tiene una copia de S_2. Esto implica a la vez que σX no es Fréchet. Por el contrarecíproco del lema 2.2.11, existe $Y \subseteq X$ cerrado tal que $\sigma Y \approx S_2$. Por otro lado, sabemos que X es secuencial y $Y \subseteq X$ cerrado, entonces tenemos que Y es secuencial. Finalmente por el corolario 2.1.6 se tiene que $\sigma Y = Y$. por lo tanto, la copia de S_2 es cerrada. □

No conocemos un ejemplo de un espacio que contenga copias de S_2, pero no contenga copias cerradas. Presentaremos, sin muchos detalles, dos ejemplos que muestran lo dicho anteriormente. Un espacio topológico X es completamente metrizable, si este admite una métrica d tal que (X, d)

es completo. Además, un espacio completamente metrizable separable es llamado **polaco**. $\mathbb{R}$ es un espacio polaco y $\mathbb{Q}$ es un ejemplo de un espacio que no es polaco.

En [1, Pág 13] muestran lo siguiente: Si $Y \subseteq X$, X polaco y Y cerrado, entonces Y es polaco. Así, el primer ejemplo es:

Ejemplo 2.2.13 *Todo espacio polaco no numerable contiene una copia de $\mathbb{Q}$, pero no contiene una copia cerrada de $\mathbb{Q}$. Consideremos, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ polaco. Si suponemos que $\mathbb{R}$ posee una copia cerrada de $\mathbb{Q}$ entonces, la copia de $\mathbb{Q}$ es un polaco. Esto genera una contradicción, pues $\mathbb{Q}$ no es polaco.*

Para construir el otro ejemplo debemos recordar el Teorema de Hurewicz, presentado en [1, pág 39]

Teorema 2.2.14 *(Teorema de Hurewicz) Sea X un espacio polaco. X contiene una copia cerrada de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ si, y sólo si, X no es unión numerable de compactos.*

Puesto que $\mathbb{R} = \bigcup_n[-n, n]$, por el teorema de Hurewiez se tiene que $\mathbb{R}$ no contiene una copia cerrada de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

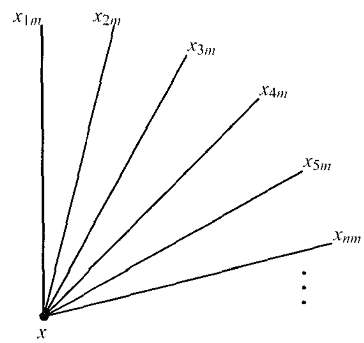
2.3. Espacio abanico

Definición 2.3.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Consideremos el subespacio de X formado por:*

$$S = \{x\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

donde $(x_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en X que convergen a $x \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $x_{nm} \neq x_{lk}$ para todo $n \neq l \in \mathbb{N}$. Al subespacio S lo llamaremos espacio abanico.

Gráficamente este espacio luce como:



Una **diagonal en un espacio abanico** S es una sucesión $(x_{n_i m_i}) \in S$ que converge a $x \in S$ y tal que n_i es escrictamente creciente para todo $n_i \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.3.2 *$S(\omega)$ es un abanico sin diagonales. Por el lema 1.6.2 no se puede construir una sucesión que intersecte infinitas secciones verticales y que converja al punto ∞, por lo tanto $S(\omega)$ es un abanico sin diaginales.*

Lema 2.3.3 *[10, pág 190] Sea (X, τ) un espacio topológico. σX es homeomorfo a $S(\omega)$ sí, y solo si, X es un abanico sin diagonales.*

Demostración. Primero supongamos que σX es homeomorfo a $S(\omega)$. Puesto que X y σX poseen las mismas sucesiones convergentes y $S(\omega)$ es un abanico sin diagonales, entonces X es un abanico sin diagonales.

Ahora, supongamos que $X = \{x\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es un abanico sin diagonales como en la definición 2.3.1. Puesto que, X y σX poseen las mismas sucesiones convergentes y X es un abanico sin diagonales, entonces σX es un abanico sin diagonales. Además, sabemos que σX es secuencial y $S(\omega)$ es un abanico secuencial sin diagonales, por ende podemos considerar el siguiente homeomorfismo $G : \sigma X \to S(\omega)$ definido por:

$$\begin{cases} G(x_{nm}) = (n, m) \\ G(x) = \infty \end{cases}$$

Claramente, se tiene que G es inyectiva, además es continua por el lema 1.2.18. Falta probar que G^{-1} es continua, para ello recordemos que sucesiones convergentes en $S(\omega)$ provienen de sucesiones convergentes en σX. Por lo tanto, σX es homeomorfo a $S(\omega)$. □

Lema 2.3.4 *[10, pág 191] Supongamos que X contiene un abanico S en un punto x sin diagonales que converjan a x. Si x es G_δ regular en X, entonces S contiene un subespacio cerrado T de X tal que σT es homeomorfo a $S(\omega)$.*

Demostración. Sea $S = \{x\} \bigcup \{x_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde las sucesiones $\{x_{nm}\}_m$ convergen a x, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como x es G_δ regular, entonces existe una sucesión $\{W_n\}$ de vencindades abiertas de x en X tal que $\{x\} = \bigcap\{Cl(W_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m(1, n) \in \mathbb{N}$ con $x_{nm(1,n)}$ en W_{n+1}. Consideremos $D_1 = \{x_{nm(1,n)} : n \in \mathbb{N}\}$ y $V_1 = X \backslash D_1$, entonces cualquier subsucesión de D_1 no converge a x. Así V_1 es un conjunto secuencialmente abierto que contiene a x. Por inducción construiremos $D_i = \{x_{nm(1,n)} : n \in \mathbb{N}\}$ y $V_i = X \backslash (D_1 \bigcup D_2 \bigcap \ldots \bigcap D_i)$ tal que

$x_{nm(i+1,n)} \in W_{n+i+1} \bigcap V_i$ y $m(i,n) < m(i+1,n)$; para cada $i \in \mathbb{N}$. Así la sucesión $\{x_{nm(i,n)} : i \in \mathbb{N}\}$ converge a x para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_{nm(i,n)} \in W_k$, si $n + i \geq k$. Sea

$$T = \{x\} \bigcup \{x_{nm(i,n)} : i, n \in \mathbb{N}\}$$

T es un abanico sin diagonal, por construcción. Además, T es cerrado. En efecto, $T \backslash W_k$ es finito para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $p \in Cl(W_k)$ con p un punto de acumulación de T en X. Por lo tanto $p = x$, es decir, x es el único punto de acumulación de T. Por el lema 2.3.3 σT es homeomorfo a $S(\omega)$, pues T es un abanico sin diagonales. □

Corolario 2.3.5 *[10, pág 191] Sea (X, τ) un espacio topológico en el cual cada punto es G_δ regular. Si (X, τ) contiene una copia de $S(\omega)$, entonces X contiene una copia cerrada de $S(\omega)$.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico en el cual cada punto es $G_\delta-$ regular. Supongamos que (X, τ) contiene un subespacio S tal que $S \approx S(\omega)$. Como $S \approx S(\omega)$ y $S(\omega)$ es un abanico sin diagonales, entonces S es un abanico sin diagonales, además por hipótesis cada punto es $G_\delta-$ regular. Por el lema 2.3.4, S contiene un subespacio cerrado T de X tal que $\sigma T \approx S(\omega)$. Por otro lado, ya que S es secuencial y $T \subseteq S$ cerrado entonces T es secuencial. En consecuencia por el corolario 2.1.6, tenemos que $\sigma T \approx T$. Así se obtiene que σT es cerrado. Por lo tanto (X, τ) contiene una copia cerrada de $S(\omega)$. □

Capítulo 3

Espacios con rango secuencial ω_1

El objetivo en este capítulo es determinar el rango secuencial de algunos espacios y si es posible determinar hasta qué punto S_ω es un espacio 'test' para los espacios con rango secuencial ω_1, es decir, para cuáles espacios de rango ω_1 se puede mostrar que contiene una copia de S_ω. Diremos que X contiene una copia de Y, si existe $Z \subseteq X$ tal que Z es homeomorfo a Y. En el capítulo 1 se dio una breve introducción sobre el espacio de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual, denotado por $C_p(X)$. En este capítulo profundizaremos más sobre $C_p(X)$, además definiremos y mostraremos algunas relaciones entre inmersiones.

Un homeomorfismo entre dos espacios topologícos X e Y, es una función biyectiva y bicontinua entre los espacios dados. Una inmersión topológica entre los espacios X e Y es una función inyectiva, abierta sobre su imagen y continua. Claramente si existe un homeomorfismo entre dos espacio, este también es una inmersión topológica, el recíproco es falso.

Definición 3.0.1 *Una función $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es secuencialmente continua, si dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $a \in X$, entonces $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a) \in Y$*

Una función continua es secuencialmente continua, el recíproco en general no es cierto.

Definición 3.0.2 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Diremos que $F : X \to Y$ es una inmersión secuencial si:*

1. *F es inyectiva,*
2. *F es secuencialmente continua,*

3. *Sucesiones convergentes en el rango de F provienen de sucesiones convergentes en el dominio de F.*

Si existe una inmersión topológica entre dos espacios topológicos X e Y, entonces ésta inmersión también es secuencial. Además, la imagen de X bajo la inmersión secuencial será llamada una copia secuencial de X en Y. Finalmente consideraremos, en este trabajo, otro tipo de inmersión.

Definición 3.0.3 *Una función $H : S_\omega \to Z$ definida por $t \to z_t$ es una $F-$ inmersión si satisface :*

1. $\lim_{i\to\infty} z_{t^\frown i} = z_t$ *para cualquier* $t \in S_\omega$;
2. *Si* $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* S_ω *tal que existe* $t \in S_\omega$, *y* $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *con* $t^\frown m_i < t_i$, $m_i < m_{i+1}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *entonces* $(z_{t_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *no tiene punto límite en* Z;
3. $z_s \neq z_t$ *para todo* $s \neq t \in S_\omega$.

Esta función la denominamos una $F-$ *inmersión*, por Fremlin. A la imagen de S_ω bajo la $F-$ inmersión sera llamada una $F-$ copia de S_ω en Z. Claramente de las definiciones 3.0.2 y 3.0.3, tenemos que si existe una inmersión secuencial entre el espacio de Arkhangel'skiĭ-Franklin (S_ω) y un espacio topológico Z, entonces ésta también es una F-inmersión. Una pregunta natural es que si los siguientes recíprocos se cumplen: si $H : S_\omega \to Y$ es una F-inmersión, entonces H es una inmersión secuencial y H es una inmersión topológica. Más adelante, en este capítulo, responderemos esto. Ahora veremos que si existe una inmersión secuencial $F : X \to Y$, entonces se cumplen algunas condiciones entre el operador secuencial, el rango secuencial de subconjuntos y el rango entre espacios.

Teorema 3.0.4 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Si $F : X \to Y$ es una inmersión secuencial, entonces para todo $A \subseteq X$ se cumple:*

1. $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$, *para todo* $\alpha \leq \omega_1$.
2. $\rho(A, X) = \rho(F(A), F(X))$.
3. $\Sigma(X) \leq \Sigma(Y)$.

Demostración.

1. La prueba del item 1 la haremos por inducción.

   a) Caso base $(\alpha = 1)$.

1) Sea $x \in (F(A))^{(1)}$. Por definición de operador secuencial se tiene que, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $F(A)$ tal que $x_n \to x$. Puesto que, F es una inmersión secuencial, entonces existe una sucesión (y_n) en A tal que $F(y_n) = (x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $y_n \to y$. Luego, se tiene que $y \in A^{(1)}$. Por ende, tambíen se tiene que $F(y) \in F(A^{(1)})$. Pero $F(y) = x \in F(A^{(1)})$. Por tanto, $F(A^{(1)}) \subseteq (F(A))^{(1)}$.
2) Sea $x \in F(A^{(1)})$. Como F es una inyección entre X e Y, entonces F es una biyección entre X y $F(X)$. Así, existe $y \in A^{(1)}$ tal que $F(y) = x$. Por otro lado, tenemos que si $y \in A^{(1)}$ entonces existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $y_n \to y$. En consecuencia, se tiene que $F(y_n)$ está en $F(A)$. Luego $F(y_n) \to F(y) \in (F(A))^{(1)}$. Por lo tanto, $F(A^{(1)}) \subseteq (F(A))^{(1)}$.

Ahora supongamos que el item 1 del teorema es valido para $\beta < \alpha$.

b) Caso $\alpha-$ sucesor $(\alpha = \beta + 1)$.
Aplicando la hipótesis inductiva para β, podemos considerar que $F(A^{(\beta)}) = (F(A))^{(\beta)}$. Luego tenemos que $F(A^{(\alpha)}) = F(A^{(\beta+1)})$. Pero $F(A^{(\beta+1)}) = F((A^{(\beta)})^{(1)})$. Ahora bien aplicando el caso base y la hipótesis inductiva se tiene:

$$F((A^{(\beta)})^{(1)}) = (F(A^{(\beta)}))^{(1)} = ((F(A)^{(\beta)}))^{(1)} = (F(A))^{\beta+1}$$

Además, $(F(A))^{\beta+1} = (F(A))^{(\alpha)}$. Por tanto, se tiene que $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$.

c) Caso $\alpha-$ límite.
Consideremos $A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}$. Así, se tiene $F(A^{(\alpha)}) = F(\bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)})$. Como F es una inmersión secuencial, tenemos que $F(\bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(A^{(\beta)})$. Por hipótesis inductiva sabemos que para cualquier $\beta < \alpha$ se cumple $F(A^{(\beta)}) = (F(A))^{(\beta)}$, por ende se tiene $\bigcup_{\beta<\alpha} F(A^{(\beta)}) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(A)^{(\beta)}$. Pero $\bigcup_{\beta<\alpha} F(A)^{(\beta)} = (F(A))^{(\alpha)}$. Por lo tanto, queda probado que $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$ para $\alpha-$ límite.

2. Probemos el item 2.

Sea $\rho(A,X) = \alpha$. luego sabemos por definición de rango secuencial de un subconjunto de un espacio que, $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$. Aplicando F a esta ultima igualdad tenemos que, $F(A^{(\alpha)}) = F(A^{(\alpha+1)})$. Por el item 1 de este teorema tenemos: $(F(A))^{(\alpha)} = (F(A))^{(\alpha+1)}$. Por ende, $\rho(F(A),F(X)) \leq \rho(A,X)$. Por otro lado, puesto que F es una inmersión secuencial y acabamos de probar $\rho(F(A),F(X)) \leq \rho(A,X)$, entonces $\rho(F^{-1}(B),X) \leq \rho(B,F(X))$ ya que F^{-1} tambíen es una inmersión secuencial. En consecuencia, si consideramos $F^{-1}(B) = A$, tendriamos que $\rho(A,X) \leq \rho(F(A),F(X))$. Por lo tanto, $\rho(F(A),F(X)) = \alpha$.

3. Probemos el item 3.

Lineas arribas demostramos que $\rho(A,X) = \rho(F(A),F(X))$, por ende se tiene:

$$\Sigma(X) = \sup\{\rho(A,X) : A \subseteq X\} = \sup\{\rho(F(A),F(X)) : F(A) \subseteq F(X)\} \leq \Sigma(Y).$$

$\square$

Como consecuencia del teorema 3.0.4 se tiene:

Corolario 3.0.5 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Si $F : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces para todo $A \subseteq X$ se cumple:*

1. $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$, *para todo* $\alpha \leq \omega_1$.
2. $\rho(A,X) = \rho(F(A),Y)$.
3. $\Sigma(X) = \Sigma(Y)$.

Demostración. Puesto que $F : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces F también es una inmersión secuencial. Así, por el teorema 3.0.4 se tiene que, para todo $A \subseteq X$ se cumple:

1. $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$, para todo $\alpha \leq \omega_1$.
2. $\rho(A,X) = \rho(F(A),F(X))$.
3. $\Sigma(X) \leq \Sigma(Y)$.

Ahora bien, como F es un homeomorfismo, entonces $F(X) = Y$. Por lo tanto, se tiene que: $\rho(A,X) = \rho(F(A),F(X)) = \rho(F(A),Y)$, para todo $A \subseteq X$. Además, $\sum(Y) \leq \sum(X)$ pues F es sobreyectiva. Lo cual permite demostrar que $\Sigma(X) = \Sigma(Y)$. $\square$

De forma similar se puede mostrar el siguiente lema.

Lema 3.0.6 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff. Si $F : S_\omega \to Z$ es una F-inmersión, entonces para todo $A \subseteq S_\omega$ se cumple:*

1. $F(A^{(\alpha)}) = (F(A))^{(\alpha)}$, *para todo* $\alpha \leq \omega_1$.
2. $\rho(A,S_\omega) = \rho(F(A),F(S_\omega))$.
3. $\Sigma(S_\omega) \leq \Sigma(Z)$.

3.1. Espacio de funciones continuas $C_p(X)$

En esta sección definiremos y daremos algunas propiedades, de nuestro interés, sobre el espacio de las funciones continuas. Es importante acotar que el espacio de las funciones continuas ha sido muy estudiado por grandes matemáticos, entre ellos encontramos Arkhangel'skiĭ quien desarrollo un libro sobre este espacio [3]. De hecho, es un espacio muy útil tanto en topología como en análisis.

Sean X e Y espacios topológicos, sobre el conjunto Y^X de todas las funciones de X en Y, podemos considerar la topología producto. Nuestro principal objeto de estudio serán los conjuntos

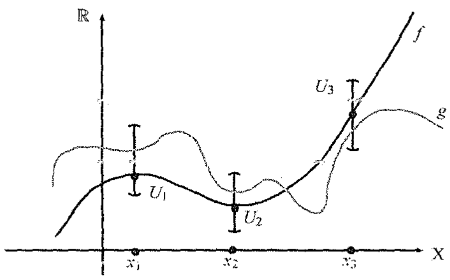
$$C(X,Y) = \{f \in Y^X : f \quad continua\}$$

equipados con la topología heredada de Y^X, a la cual se le llama topología de la convergencia puntual; en general, denotaremos por $C_p(X,Y)$ a los espacios así obtenidos, pero en el caso en que $Y = \mathbb{R}$ escribiremos simplemente $C_p(X)$.

Una vecindad básica para una función f en $C_p(X)$ es determinada por una sucesión finita $x_1, x_2, ..., x_n$ de puntos en X y un $\epsilon > 0$ de la siguiente manera:

$$U_f(x_1, x_2, ..., x_n; \epsilon) = \{g \in C_p(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon, \quad para \quad i = 1, ..., n\}$$

Así, una vecindad básica alrededor de la función f consiste en todas las funciones g que estan cerca de f en una cantidad finita de puntos. Dicha vecindad básicas aparece ilustrada en la siguiente figura y consiste en todas las funciones g cuyas gráficas intersectan los tres intervalos verticales dibujados.



La razón por la que llamamos a ésta la topología de la convergencia puntual proviene del siguiente Teorema.

Teorema 3.1.1 *Una sucesión de funciones (f_n) converge a la función f en la topología de la convergencia puntual si, y sólo si, para cada $x \in X$, la sucesión $f_n(x)$ de puntos de Y converge al punto $f(x)$.*

La demostración de este Teorema se encuentra en [9, pag 321-322]

En gereral no es cierto que si $A \subseteq C_p(X)$ y $g \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión (f_n) en A tal que lím $f_n = g$. Es decir que $C_p(X)$ no es Fréchet, en general.

Definición 3.1.2 *Un subconjunto A de un espacio topológico X es secuencialmente denso en su clausura si, y solo si, para cualquier $f \in \overline{A}$ existe una sucesión $(f_n) \in A$ que converge a f.*

En este capítulo estamos considerando espacios topológicos Hausdorff. Por ende es importante tener en cuenta que $C_p(X)$ es Hausdorff, pues $\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$ lo es.

El siguiente resultado, muestra que algunas propiedades topológicas se pueden caracterizar en términos de propiedades conjuntistas de los espacios dominios. La ca-racterización de la metrizabilidad y de los axiomas de numerabilidad en los espacios $C_p(X)$ es la siguiente:

Teorema 3.1.3 *[3] Para cualquier espacio X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $|X| \leq \aleph_0$

(ii) $C_p(X)$ *es un espacio primero numerable.*

(iii) $C_p(X)$ *es un espacio segundo numerable.*

(iv) $C_p(X)$ *es un espacio metrizable.*

Demostración.

1. $iii) \Rightarrow ii)$
   Si B es una base numerable para la topología de $C_p(X)$, entonces el subconjunto de B formado por aquellos elementos de la base que contienen al punto $f(x)$ es una base numerable en $f(x)$. Por tanto, $C_p(X)$ es primero numerable.

2. $ii) \Rightarrow i)$
   Supongamos que $|X| > \aleph_0$ y que $C_p(X)$ es primero numerable. Veamos que la función constantemente cero, denotada por $\overline{0}$, no tiene una base numerable. En efecto, Sea $\{V_n\}_n$ la colección numerable de abiertos para $\overline{0}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\overline{x_n} = (x_i^n)_{i=1}^{m_n}$ y $k_n \in \mathbb{N}$ tal que
   $$U_{\overline{0}}(\overline{x_n}, \frac{1}{k_n}) \subseteq V_n.$$
   Sea $A = \bigcup_n \{x_i^n : 1 \leq i \leq m_n\}$. Como A es numerable y $|X| > \aleph_0$, entonces existe $y \in X \setminus A$. Por el lema de Urizohn, se tiene que existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x_i^n) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m_n$ y $f(y) = 1$. Por lo tanto, $f \in U_{\overline{0}}(\overline{x_n}, \frac{1}{k_n}) \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f \notin U_{\overline{0}}(y, 1)$. Luego, $U_{\overline{0}}(y, 1)$ es un entorno de $\overline{0}$ distinto de todos los V_n lo cual es una contradicción. □

3. $i) \Rightarrow iii)$
Como $\mathbb{R}$ es segundo numerable y $|X| \leq \aleph_0$, entonces $\mathbb{R}^X$ es segundo numerable. Por otro lado, puesto que $C_p(X) \subseteq \mathbb{R}^X$, entonces $C_p(X)$ es segundo numerable.

4. $i) \Rightarrow iv)$
Como $\mathbb{R}$ es metrizable y $|X| \leq \aleph_0$, entonces $\mathbb{R}^X$ es metrizable. Por otro lado, puesto que $C_p(X) \subseteq \mathbb{R}^X$, entonces $C_p(X)$ es metrizable.

5. $iv) \Rightarrow ii)$
Es trivial. □

Lo importante del Teorema anterior es que los espacios $C_p(\mathbb{N})$ y $C_p(\mathbb{Q})$ son primero numerables y separables, por ende también son secuenciales. Mientras que $C_p(\mathbb{R})$ no es primero numerable. El siguiente lema, cuya demostración se encuentra en [3, pág 54], dice que $C_p([0,1])$ no es secuencial y por lo tanto $C_p(\mathbb{R})$ tampoco, pues podemos extender de manera continua las funciones continuas definidas en $[0,1]$ a todos los valores reales, haciéndolas constantes fuera del intervalo $[0,1]$.

Lema 3.1.4 *[3] El espacio $C_p([0,1])$ no es secuencial.*

Construir espacios topológicos X tales que $\Sigma(C_p(X)) = 1$ no es trivial, presentaremos dos ejemplos tomados de [7, pág 378]) que muestran lo dicho:

Ejemplo 3.1.5 *Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto que intersectado con cualquier conjunto de medida cero es numerable (es decir, si X es un conjunto Sierpinski), entonces $\Sigma(C_p(X)) = 1$.*

Ejemplo 3.1.6 *Sea X un espacio compacto. $\Sigma(C_p(X)) = 1$ sí, y sólo si, $[0,1]$ no es imagen continua de X.*

En particular, $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$. Pues $[0,1]$ es la imagen continua de $2^{\mathbb{N}}$ y $2^{\mathbb{N}}$ es compacto, entonces por el ejemplo 3.1.6 se tiene $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$. Más adelante demostraremos que si $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$, entonces $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) = \omega_1$.

Lineas arriba mostramos que $C_p([0,1])$ no es secuencial. Ahora por el ejemplo 3.1.6 podemos concluir que $\Sigma(C_p([0,1])) \neq 1$ y más adelante mostraremos que $\Sigma(C_p([0,1])) = \omega_1$. Obteniendo así un ejemplo de un espacio que no es secuencial pero posee rango secuencial muy grande.

Terminaremos esta sección mostrando que si una función entre S_ω y $C_p(X)$ satisface ciertas condiciones, entonces la función es una inmersión secuencial.

Teorema 3.1.7 *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Si $F : S_\omega \to C_p(X)$ satisface:*

(i) F es inyectiva,

(ii) F es secuencialmente continua,

(iii) Cualquier sucesión $(t_k) \in S_\omega$, tal que existe $t \in S_\omega$ y existe una sucesión estrictamente creciente (m_k) con $t^\frown m_k < t_k$, entonces $F(t_k)$ no converge,

(iv) Si $(\exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $(\exists k \in \mathbb{N})$ con $\alpha\lceil n \leq t_k$, entonces $F(t_k)$ no converge,

entonces F es una inmersión secuencial.

Demostración. Solo hace falta mostrar que sucesiones convergentes en $F(S_\omega)$ provienen de sucesiones convergente en S_ω, es decir, si $F(t_k)$ es una sucesión que converge a $F(t) \in F(S_\omega)$, entonces $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $t \in S_\omega$. La prueba la haremos por contrareciproco. Sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión que no converge a $t \in S_\omega$, entonces probemos que la sucesión $F(t_k)$ no converge. Por la caracterización de las sucesiones no convergentes en S_ω se tiene que la sucesión (t_k) es de la forma:

1. $(\exists\ A \subseteq \mathbb{N}$ infinito $)$, $(\exists t \in S_\omega)$ y $(\exists (m_k)_{k\in A} \uparrow)$ una sucesión tal que $(\forall k \in A)$ se tiene que $t^\frown m_k < t_k$. o bien
2. $(\exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, $(\exists k \in \mathbb{N})$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$ se tiene que $\alpha\lceil n \leq t_k$, entonces (t_n) no converge

En cualquiera de los dos caso se tiene, por hipótesis item (iii) y (iv)) respectivamente, $F(t_k)$ no converge. Esto culmina la prueba que F es una inmersión secuencial. □

3.2. Rango secuencial de $C_p(X)$

Teorema 3.2.1 *(Fremlin [7]) Sea X un espacio topológico Hausdorff no vacío. El rango secuencial de $C_p(X)$ es: 1 ó ω_1.*

Demostración. Supongamos que $\Sigma(C_p(X)) \neq 1$. Por la definición de rango secuencial se tiene que existe $P \subseteq C_p(X)$ tal que $\rho(P, C_p(X)) > 1$. El conjunto P es un peine sin diagonales, es decir $P = \{f\} \cup \{f_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{f_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ tal que:

(i) $f_i(x) = \lim_{j\to\infty} f_{ij}(x)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $x \in X$,

(ii) $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$.

En efecto, $f(x)$ no es límite de ninguna sucesión en $\{f_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$, pues si eso ocurriera, $\sigma P \approx S(\omega)$ y por el lema 1.6.5 se tiene que $\rho(\sigma P, C_p(X)) = 1$ produciendo una contradicción con lo supuesto. Lo que demuestra que P es un peine sin diagonales. Por otro lado, consideremos

$$h_{ij}(x) = i|f_{ij}(x) - f_i(x)|$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Observemos que:

(i) $h_{ij}(x)$ es continua, pues es composición de funciones continuas.

(ii) $\lim_{j\to\infty} h_{ij}(x) = 0$

Demostración. $\lim_{j\to\infty} h_{ij}(x) = \lim_{j\to\infty} i|f_{ij}(x)-f_i(x)| = i|\lim_{j\to\infty} f_{ij}(x)-f_i(x)| = i|f_i(x)-f_i(x)| = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

(iii) Si consideramos $\langle h_{m(i),n(i)}(x)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\langle m(i)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, entonces $\langle h_{m(i),n(i)}(x)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ no esta acotada en $\mathbb{R}^X$.

Demostración. Supongamos que $\langle h_{m(i),n(i)}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathbb{R}^X$. Luego

$|f_{m(i),n(i)}(x)-f(x)| = |f_{m(i),n(i)}(x)-f_{m(i)}(x)+f_{m(i)}(x)-f(x)| \leq |f_{m(i),n(i)}(x)-f_{m(i)}(x)|+|f_{m(i)}(x)-f(x)|$

De la definición de $h_{ij}(x)$ tenemos que :

$$|f_{m(i),n(i)}(x) - f_{m(i)}(x)| = m_{(i)}^{-1} h_{m(i),n(i)}(x)$$

Así, se tiene:

$$|f_{m(i),n(i)}(x) - f(x)| \leq m_{(i)}^{-1} h_{m(i),n(i)}(x) + |f_{m(i)}(x) - f(x)|$$

Luego, haciendo tender $m(i)$ a ∞, obtenemos: $|f_{m(i),n(i)}(x) - f(x)| \to 0$. En consecuencia $f_{m(i),n(i)}(x) \to f(x)$ el cual genera una contradicción pues P es un peine sin diagonales.

En consecuencia el conjunto $S = \{0\} \bigcup \{h_{ij}(x) : i, j \in \mathbb{N} \quad \& \quad x \in X\}$, es un abanico sin diagonales.

Para demostrar que el rango secuencial de $C_p(X)$ es ω_1, debemos construir una F-inmersión entre S_ω y $C_p(X)$. Consideremos $t \in S_\omega$ y definamos:

$$J_t = \{(i, j) : \exists u, \quad u^\frown i^\frown j \leq t\}$$

Por ejemplo, si $t = \langle 0, 1, 2\rangle$, entonces $J_t = \{(0, 1), (1, 2)\}$

$$g_t(x) = max(\{0\} \bigcup \{h_{ij}(x) : (i, j) \in J_t\})$$

El siguiente lema muestra algunas propiedades sobre J_t y g_t

Lema 3.2.2 *Para $x \in X$ fijo, $t, s \in S_\omega$ se cumplen las siguientes relaciones:*

1. *Si $t \leq s$, entonces $J_t \subseteq J_s$.*
2. *Si $t \leq s$, entonces $g_t(x) \leq g_s(x)$.*
3. *Si $t \leq t^\frown n$, entonces o bien $g_{t^\frown n}(x) = g_t(x)$ o bien $g_{t^\frown n}(x) = h_{i_k n}(x)$, donde i_k es el ultimo elemento de la sucesión t*
4. *Si $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que si $t \in S_\omega$ y $\langle m(i) \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente con $t^\frown m(i) < t_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $g_{t^\frown m(i)^\frown i_n}(x)$ no está acotada.*

Demostración.

Demostración del item 1.
Sea $(i, j) \in J_t$. Por definición de J_t, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $u^\frown i^\frown j \leq t$. Por hipótesis se tiene $t \leq s$. Así $u^\frown i^\frown j \leq t \leq s$. Por lo tanto, $(i, j) \in J_s$. Esto muestra que $J_t \subseteq J_s$.

Demostración del item 2.
Consideremos $(i, j) \in J_t$ tal que $g_t(x) = h_{ij}(x)$. Por hipótesis tenemos que $t \leq s$ así por el item 1 tenemos que $J_t \subseteq J_s$. En consecuencia, $(i, j) \in J_s$. Por lo tanto, $h_{ij}(x) \leq g_s(x)$. Esto muestra que $g_t(x) \leq g_s(x)$.

Demostración del item 3.
Si $J_{t^\frown n} = \emptyset$, entonces $J_t = \emptyset$. Esto permite mostrar que $g_{t^\frown n}(x) = g_t(x) = 0$. Por otro lado, si $J_{t^\frown n} \neq \emptyset$, entonces existe $(i, j) \in J_{t^\frown n}$ tal que $g_{t^\frown n}(x) = h_{ij}(x)$. Analizaremos dos casos.

caso 1: Si $(i, j) \in J_t$, entonces $g_{t^\frown n}(x) = g_t(x)$.
Sabemos que $g_t(x) \leq g_{t^\frown n}(x)$, además tenemos que $g_{t^\frown n}(x) = h_{ij}(x)$ y $h_{ij}(x) \leq g_t(x)$. Por lo tanto, se tiene que $g_{t^\frown n}(x) = g_t(x)$.

caso 2: Si $(i, j) \notin J_t$, entonces $i = i_k$ y $j = n$.
Como $(i, j) \notin J_t$, entonces $g_{t^\frown n}(x) = h_{ij}(x) = h_{i_k n}(x)$.

Demostración del item 4.
Supongamos que $g_{t^\frown m(i)^\frown i_n}(x)$ está acotado, es decir existe $M > 0$, tal que $|g_{t^\frown m(i)^\frown i_n}(x)| \leq M$. Esto implica, en particular, que $h_{m_i i_n}(x) = m_i |f_{m_i i_n}(x) - f_{m_i}(x)|$ está acotada. Por ende, $|f_{m_i i_n}(x) - f_{m_i}(x)| \leq \frac{M}{m_i}$ siempre que $m_i \neq 0$. Si hacemos m_i muy grande, entonces $f_{m_i i_n}(x)$ está muy cerca de $f(x)$. Lo cual es una contradicción, ya que P es una peine sin diagonales. □

Continuando con la demostración del teorema de Fremlin. Consideremos

$$F : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por $F(t)(x) = g_t(x)$, con $x \in X$. Mostraremos que F cumple con las condiciones (i) y (ii) de la definición de F-inmersión, pero F no es inyectiva.

Probemos que: si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \to t \in S_\omega$, entonces $F(t_k) \to F(t) \in C_p(X)$.

Sea $(t_k) \in S_\omega$ una sucesión tal que $t_k \to t$. Por el lema **??** se tiene que existe una sucesión estrictamente creciente (n_k) y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n = t^\frown n_k$ con $\lim n_k = \infty$. Luego aplicando F a la sucesión tenemos que: $F(x)(t_k) = F(x)(t^\frown n_k) = g_{t^\frown n_k}(x)$.

Ahora, consideremos:

$$\{k_i\} = \{k : g_{t^\frown n_k}(x) = g_t(x)\}$$
$$\{s_i\} = \{k : g_{t^\frown n_k}(x) = h_{i_k n_k}(x)\}$$

Así, la sucesión $g_{t^\frown n_k}(x)$ la dividimos en dos subsucesiones :

caso 1: $g_{t^\frown n_{k_i}}(x) = g_t(x)$ ó,
En tal caso, $\lim_{n_{k_i}\to\infty} g_{t^\frown n_{k_i}}(x) = g_t(x)$. Por lo tanto, $F(x)(t^\frown n_{k_i}) \to F(x)(t)$.

caso 2: $g_{t^\frown n_{k_i}} = h_{i_k n_k}(x)$
En tal caso, si $\{s_i\}$ es infinito se tiene que $h_{i_k n_k}(x) = 0$ y $g_t(x) = 0$. En efecto, como $g_{t^\frown n_k}(x) = h_{i_k n_k}(x)$, entonces $\lim_{n_{s_i}\to\infty} g_{t^\frown n_{s_i}}(x) = \lim_{n_{s_i}\to\infty} h_{i_k n_{s_i}}(x) = \lim_{n_{s_i}\to\infty} i_k|f_{i_k n_{s_i}}(x) - f_{i_k}(x)| = 0$. Además, $0 \leq g_t(x) \leq g_{t^\frown n_{s_i}}(x)$. Por lo tanto, $g_t(x) = 0$. □

Probemos que: Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que si $t \in S_\omega$, y $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $t^\frown m_i < t_i$, $m_i < m_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $F((t_i)_{i\in\mathbb{N}})$ no tiene punto límite en $C_p(X)$

Sea $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S_ω como en la hipótesis. Puesto que $t^\frown m_i < t_i$, entonces existe $i_n \in \mathbb{N}$ tal que $t^\frown m_i^\frown i_n \leq t_i$. Luego, $(m_i, i_n) \in J_{t_i}$ en consecuencia $h_{m_i i_n}(x) \leq g_{t_i}(x)$. Ahora bien, por hipótesis sabemos que la sucesión (m_i) es estrictamente creciente por ende $h_{m_i i_n}(x)$ no está acotada. Así, $g_{t_i}(x)$ no está acotada. Por lo tanto, $g_{t_i}(x)$ no puede converger, ya que $g_{t_i}(x) = h_{i_k i_k}(x) \geq h_{m_i i_n}(x) = m_i|f_{m_i i_n}(x) - f_{m_i}(x)|$ y $m_i|f_{m_i i_n}(x) - f_{m_i}(x)|$ no converge cuando $m_i \to \infty$. □

Probemos que: F no es inyectiva.
Sean $t = \langle i\rangle$ y $s = \langle j\rangle$ dos elementos en el primer nivel de S_ω tales que $t \neq s$, entonces $J_t = J_s = \varnothing$. Por ende se tiene que, $g_t(x) = g_s(x) = 0$, para $x \in X$ fijo. Por lo tanto F no es inyectiva. □

Como F no es inyectiva, entonces debemos modificar un poco a la función F para obtener una F- inmersión entre S_ω y $C_p(X)$, sin que F pierda la condición 1 y 2 de la definición de $F-$inmersión. Para ello consideremos la familia de combinaciones racionales lineales de los $g_t(x)$, es decir

$$\Lambda = \{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i g_t(x) : \lambda_i \in \mathbb{Q} \quad \& \quad g_t(x) \in C_p(X)\}$$

Esta familia sólo puede contener una cantidad numerable de funciones constantes, entonces existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que la función contantemente δ no es una combinación racional lineal de los g_t. Así, definamos la siguiente función:

$$G : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por:

$$G(t)(x) = F(t)(x) + \delta H(t).$$

Donde $H(t)$ es la inyección continua construida en 1.8.5. G es secuencialmente continua, pues F y H son secuencialmente continuas. Además G satisface la condición (ii) de la definición de F−inmersión, ya que $g_{t_i}(x)$ no converge si la sucesión (t_i) satisface las hipótesis. Por ultimo G es inyectiva. En efecto

Supongamos que $G(t)(x) = G(s)(x)$. Por definición de G se tiene que , $g_t(x) + \delta H(t) = g_s(x) + \delta H(s)$. Lo cual implica, $g_t(x) - g_s(x) = \delta H(s) - \delta H(t)$. Por ende, como H es inyectiva entonces $\delta = \frac{1}{H(s)-H(t)}(g_t(x) - g_s(x))$ generando una contradicción, pues δ no está en Λ. Por lo tanto, G es inyectiva.

Puesto que $\Sigma(S_\omega) = \omega_1$ y G es una F−inmersión entre S_ω y $C_p(X)$, entonces se tiene que $\omega_1 = \Sigma(S_\omega) \leq \Sigma(C_p(X))$. Además, por el lema 1.4.2 tenemos que $\Sigma(C_p(X)) \leq \omega_1$. Por lo tanto, $\Sigma(C_p(X)) = \omega_1$ □

La inmersión que construye Fremlin para demostrar el Teorema 3.2.1 no es una inmersión secuencial. Consideremos $\alpha = 0^\omega$, una rama infinita de ceros y definamos la sucesión $t_k = 0^{k\frown}\langle k\rangle$. Por el lema 1.8.3 se tiene que la sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no converge. Sin embargo, aplicando la inmersión que construye Fremlin a esta sucesión obtenemos que $G(t_k)$ converge. En efecto, puesto que $J_{t_k} = \{(0,0),(0,k)\}$, entonces $g_{t_k} = max(\{0\} \cup \{h_{(0,0)}(x), h_{(0,k)}(x)\}) = 0$. Además, $H(t_k)$ converge a $\frac{1}{2}$ cuando $k \to \infty$ por el lema 1.8.5. Por lo tanto, $G(t_k)$ converge a $\frac{1}{2}\delta$.

Nuestro aporte al gran universo matemático es presentar una demostración un poco más general del Teorema de Fremlin 3.2.1. Construiremos una inmersión secuencial entre S_ω y $C_p(X)$, para el caso en que $\Sigma(C_p(X)) \neq 1$.

Supongamos que $\Sigma(C_p(X)) \neq 1$. Por la definición de rango secuencial se tiene que existe $P \subseteq C_p(X)$ tal que $\rho(P, C_p(X)) > 1$. El conjunto P es un peine sin diagonales, es decir $P = \{f\} \bigcup \{f_i : i \in \mathbb{N}\} \bigcup \{f_{ij} : i,j \in \mathbb{N}\}$ tal que:

(i) $f_i(x) = \lim_{j\to\infty} f_{ij}(x)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $x \in X$,

(ii) $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$.

En efecto, $f(x)$ no es límite de ninguna sucesión en $\{f_{ij} : i,j \in \mathbb{N}\}$, pues si eso ocurriera, $\sigma P \approx S(\omega)$ y por el lema 1.6.5 se tiene que $\rho(\sigma P, C_p(X)) = 1$ produciendo una contradicción con lo supuesto. Lo que demuestra que P es un peine sin diagonales. Por otro lado, consideremos

$$h_{ij}(x) = i|f_{ij}(x) - f_i(x)|$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Observemos que:

(i) $h_{ij}(x)$ es continua, pues es composición de funciones continuas.

(ii) $\lim_{j\to\infty} h_{ij}(x) = 0$

Demostración. $\lim_{j\to\infty} h_{ij}(x) = \lim_{j\to\infty} i|f_{ij}(x)-f_i(x)| = i|\lim_{j\to\infty} f_{ij}(x)-f_i(x)| = i|f_i(x)-f_i(x)| = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

(iii) Si consideramos $\langle h_{m(i),n(i)}(x)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\langle m(i)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, entonces $\langle h_{m(i),n(i)}(x)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ no esta acotada en $\mathbb{R}^X$.

Demostración. Supongamos que $\langle h_{m(i),n(i)}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathbb{R}^X$. Luego

$|f_{m(i),n(i)}(x)-f(x)| = |f_{m(i),n(i)}(x)-f_{m(i)}(x)+f_{m(i)}(x)-f(x)| \leq |f_{m(i),n(i)}(x)-f_{m(i)}(x)|+|f_{m(i)}(x)-f(x)|$

De la definición de $h_{ij}(x)$ tenemos que :

$$|f_{m(i),n(i)}(x) - f_{m(i)}(x)| = m_{(i)}^{-1}h_{m(i),n(i)}(x)$$

Así, se tiene:

$$|f_{m(i),n(i)}(x) - f(x)| \leq m_{(i)}^{-1}h_{m(i),n(i)}(x) + |f_{m(i)}(x) - f(x)|$$

Luego, haciendo tender $m(i)$ a ∞, obtenemos: $|f_{m(i),n(i)}(x) - f(x)| \to 0$. En consecuencia $f_{m(i),n(i)}(x) \to f(x)$ el cual genera una contradicción pues P es un peine sin diagonales.

En consecuencia el conjunto $S = \{0\} \bigcup \{h_{ij}(x) : i, j \in \mathbb{N} \quad \& \quad x \in X\}$, es un abanico sin diagonales.

Ahora, consideremos para $t \in S_\omega$ lo siguiente:

$$J_t = \{(i.j) : \exists u, \quad u^\frown i^\frown j \leq t\}$$

$$K_t = J_t \cup \{(|t|, t(|t| - 1))\}$$

$$g_t(x) = max(\{0\} \bigcup \{h_{ij}(x) : (i, j) \in K_t\})$$

Definamos la siguiente función:

$$F : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por $F(t)(x) = g_t(x)$, con $x \in X$. Líneas arriba probamos que F cumple con las condiciones (i) y (ii) de la definición de F-inmersión, pero F no es inyectiva.

Por otra parte definamos la siguiente función:

$$I : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por:

$$I(\varnothing)(x) = F(\varnothing)(x)$$
$$I(t\frown n) = \text{máx}(I(t), F(t\frown n), h_{(|t|+1,n)})$$

Observemos que, $F(t) \leq I(t) \leq I(t\frown n)$. Además I es una función secuencialmente continua y satisface las condiciones (iii) y (iv) del Teorema 3.1.7. En efecto

1. I es secuencialmente continua.
   Sea $(t\frown n)$ una sucesión convergente a $t \in S_\omega$. Consideremos $I(t\frown n)$, probemos que la sucesión formada por las imagenes de $t\frown n$ converge a $I(t)$.

$$\lim_{n\to\infty} I(t\frown n) = \text{máx}\left(\lim_{n\to\infty} I(t), \lim_{n\to\infty} F(t\frown n), \lim_{n\to\infty} h_{(|t|+1,n)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} I(t\frown n) = \text{máx}\left(I(t), F(t), 0\right)$$

   Como $0 \leq F(t) \leq I(t)$, entonces $\lim_{n\to\infty} I(t\frown n) = I(t)$. Por lo tanto, I es secuencialmente continua.

2. Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que si $t \in S_\omega$, y $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $t\frown m_i < t_i$, $m_i < m_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $I((t_i)_{i\in\mathbb{N}})$ no tiene punto límite en $C_p(X)$.
   En efecto, si aplicamos I a la sucesión (t_i) podemos notar que $I(t_i) \geq F(t\frown m_i\frown n_i)$, pues por el lema 3.2.2 se tiene que si $t\frown m_i\frown n_i \leq t_i$, entonces $(m_i, n_i) \in J_{t\frown m_i\frown n_i} \subseteq J_{t_i}$. Esto permite concluir que $I(t_i)$ no está acotada, pues $F(t\frown m_i\frown n_i)$ con (m_i) estrictamente creciente no está acotada. Por lo tanto $I(t_i)$ no converge.

3. Si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S_ω tal que si $(\exists\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $(\exists k \in \mathbb{N})$ con $\alpha\lceil n \leq t_{k_n}$, entonces $I(t_k)$ no tiene punto límite en $C_p(X)$.

   En efecto, considerando una sucesión como en la hipótesis del item 3 y aplicando I a dicha sucesión podemos notar que $I(t_{k_n}) \geq I(\alpha\lceil n) \geq h_{(n,\alpha(n-1))}$. Luego para $n \in \mathbb{N}$ estrictamente crecientes se tiene que $h_{(n,\alpha(n-1))}$ no esta acotada, por lo tanto $I(t_{k_n})$ no esta acotada. En consecuencia, $I(t_{k_n})$ no converge.

La función I no es inyectiva si $I(t^\frown n) = F(t^\frown n)$ pues recordemos que esta condición no se cumplen para F, si se considera $t = \langle n\rangle$. Por ende tomaremos la función

$$I : S_\omega \to C_p(X)$$

definida por:

$$I(\varnothing)(x) = F(\varnothing)(x)$$
$$I(t^\frown n) = \text{máx}(I(t), F(t^\frown n), h_{(|t|+1,n)}) + \delta H(t)$$

I es una inmersión secuencial entre S_ω y $C_{p(X)}$ y $\Sigma(S_\omega) = \omega_1$, entonces por el teorema 3.0.4 tenemos que $\omega_1 = \Sigma(S_\omega) \leq \Sigma(C_p(X))$. Además, por el lema 1.4.2 tenemos que $\Sigma(C_p(X)) \leq \omega_1$. Por lo tanto, se tiene que $\Sigma(C_p(X)) = \omega_1$. □

Más aún, S_ω se puede sumergir secuencialmente en un subespacio de $C_p(X)$, obteniendo así una copia secuencial de S_ω en $C_p(X)$.

Proposición 3.2.3 *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \rho)$ es una inmersión secuencial, entonces $f(X) \approxeq^{sec} X$. Más aún, $(X, \sigma_\tau) \approxeq (f(X), \sigma_{\rho\lceil f(X)})$.*

Corolario 3.2.4 *Sea (X, τ) espacio topológico. Si $\Sigma(C_p(X)) \geq 2$, entonces existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $S_\omega \approxeq^{sec} Y$. Más aún $S_\omega \approxeq \sigma Y$.*

3.3. Conclusiones

Nuestro principal objetivo en este trabajo fue presentar algunas condiciones topológicas suficientes para que un espacio topológico (X, τ) contenga una çopia"de S_ω. Como ya vimos nos enfocamos en el Teorema de Fremlin para cumplir el objetivo. Mostramos que si $\Sigma(C_p(X)) \geq 2$, entonces existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $S_\omega \approxeq^{sec} Y$ y más aún $S_\omega \approxeq \sigma Y$. En la introducción al capítulo 3 hicimos una observación importante entre las inmersiones, el siguiente diagrama nos recuerda tal observación

$$F : S_\omega \to C_p(X) \quad es \quad una \quad inmersion \quad topologica$$
$$\Downarrow$$
$$F : S_\omega \to C_p(X) \quad es \quad una \quad inmersion \quad secuencial$$
$$\Downarrow$$
$$F : S_\omega \to C_p(X) \quad es \quad una \quad inmersion \quad tipo \quad Fremlin$$

Lo que nos dice es que: si S_ω se puede sumergir topológicamente en $C_p(X)$, entonces S_ω también se puede sumergir secuencialmente en $C_p(X)$ y más aún, si S_ω se puede sumergir secuencialmente en $C_p(X)$, entonces S_ω también se puede F-sumergir en $C_p(X)$.

Bajo un enfoque diferente al desarrollado en esta monografía, mostraremos lo dicho anteriormente. Consideremos el espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Stevo Todorcevic y Carlos Uzcátegui [11] mostraron que si (X, τ) es un espacio topológico Hausdorff, T_2, regular y con topología analítica, entonces X es homeo-morfo a un subespacio numerable de $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. El espacio Arkhangel'skiĭ-Franklin S_ω satisface dichas hipótesis, es decir S_ω es: T_2, regular y posee topología Π_3^0 [6], entonces S_ω es homeomorfo a un subespacio numerable de $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. Obteniendo así que $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ contiene una copia topológica de S_ω. Además $\sum(C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})) = \omega_1$

Lineas arribas probamos que la $F-$inmersión que construye Fremlin para demostrar el Teorema 3.2.1 no es una inmersión secuencial. Ahora mostraremos un espacio que contiene una copia secuencial de S_ω, por ende también una $F-$ copia de S_ω, y no contiene una copia topológica de S_ω. Consideremos el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Puesto que $[0, 1]$ es imagen continua de $2^{\mathbb{N}}$, entonces por el ejemplo 3.1.6 tenemos que $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) \neq 1$. Aplicando el Teorema 3.2.1 tenemos que $\Sigma(C_p(2^{\mathbb{N}})) = \omega_1$, por ende $C_p(2^{\mathbb{N}})$ contiene una copia secuencial de S_ω y también una $F-$copia de S_ω. Por otro lado $C_p(2^{\mathbb{N}})$ no contiene una copia topológica de S_ω. Pues, por los resultados de Arkhangel'skiĭ-Bella [4] se tiene que S_2 no se puede sumergir topológicamente en $C_p(2^{\mathbb{N}})$. Así, S_ω no se puede sumergir topológicamente en $C_p(2^{\mathbb{N}})$ ya que S_2 es un subespacio de S_ω $(S_2 \hookrightarrow S_\omega)$.

En conclusión $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ de S_ω, pero esto no ocurre con $C_p(2^{\mathbb{N}})$

3.4. Preguntas

A continuación mostraremos una lista de preguntas que no se abordaron en esta monografía:

1. Determinar las condiciones topológicas para que un espacio topológico numerable (X, τ) contenga una copia topológica de S_ω

2. ¿ Todo espacio topológico numerable X con $\Sigma(X) = \omega_1$ contienes copias topológicas de S_ω?

3. ¿ Para cuales espacios métricos X se tiene que $C_p(X)$ contiene una copia de S_ω?

4. ¿ Cada punto de $C_p(X)$ es $G_\delta-$ regular?

5. ¿ El cuadrado de $S(\omega)$ es secuencial?

Bibliografía

[1] Alexander S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, *Springer-Verlag*, 1994.

[2] A. V. Arkhangel'skiĭ and S. P. Franklin, Ordinal invariants for topological spaces. *Mich. Math. J.*, 15:313–320, 1968.

[3] A. V. Arkhangel'skiĭ, Topological function space. *Mathematics and its applications(Soviet series).*volumen 78, 1992.

[4] A. V. Arkhangel'skiĭ and A. Bella, Coutable fan-tightness versus countable tightness. *Comment. Math. Univ.Carolinae*, 37,3:567–578, 1996.

[5] S. Baber and J. R. Boone. Test spaces for infinite sequential order. *Topology and its Applications*, 14:229–240, 1982.

[6] C. Uzcátegui. On the complexity of the subspaces of S_ω. *Fund. Math.*, 176:1–16, 2003.

[7] D. H. Fremlin. Sequential convergence in $C_p(X)$. *Comment Math. Univ. Carolinae*, 35:371–382, 1994.

[8] Gerardo Delgadillo and Miguel Lopez. Espacios de Fréchet Urysohn. *Revista de ciencias básicas UJAT.*, 8:29-56, 2009.

[9] James R. Munkres, Topología, *Prentice Hall*, 2002.

[10] Shou Lin. A note on the Arens space and sequential fan. *Topology and its Applications.*, 185-196, 1997.

[11] Stevo Todorcevic and Carlos Uzcátegui. Analytic topologies over countable sets. *Topology and its applications*, 111:299–326, 2001.

[12] Stevo Todorcevic and Carlos Uzcátegui. Analytic k-spaces. *Topology and its applications*, 111:299–326, 2002.

[13] Stevo Todorcevic, Topics in topology, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1997.

[14] S. M. Srivastava, A course On Borel Sets, *Springer-Verlag*, 1998.

[15] J. E. Vaughan, Two spaces homeomorphic to $Seq(p)$, *Comment. Math. Univ. Carolinae* **42**, 209–218, 2001.

Índice alfabético