



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

**EXISTENCIA DE PATRONES PARA UN MODELO
DEPREDADOR-PRESA DE REACCIÓN Y DIFUSIÓN**

Lic. Francisco Javier Vielma Leal

SERBIULA
Tullio Febres Cordero

DONACION

Trabajo de Grado para optar al título de Magister Scientiae en Matemáticas
Tutor: prof. Marcos Lizana
Mérida – Venezuela
Octubre de 2012

www.bdigital.ula.ve

www.bdigital.ula.ve





Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

**EXISTENCIA DE PATRONES PARA UN MODELO
DEPREDADOR-PRESA DE REACCIÓN Y DIFUSIÓN**

Lic. Francisco Javier Vielma Leal

Trabajo de Grado para optar al título de Magister Scientiae en Matemáticas

Tutor: prof. Marcos Lizana

Mérida – Venezuela

Octubre de 2012



Universidad de los Andes
Biblioteca Digital

www.bdigital.ula.ve

INTRODUCCIÓN

Antecedentes del problema: Cada vez que estudiamos la dinámica de las soluciones de una ecuación diferencial en derivadas parciales de tipo parabólico, es de vital importancia conocer o determinar sus equilibrios (soluciones del sistema elíptico) y el tipo de estabilidad que estos presentan, entonces surge la necesidad de establecer condiciones suficientes, para saber, por ejemplo, cuando aparecen soluciones estacionarias del sistema.

Este trabajo está motivado por el artículo de Marcos Lizana y Julio Marín [11] publicado en el 2005. En su investigación, al estudiar los efectos de la difusión sobre la estabilidad de un equilibrio homogéneo en un modelo bidimensional depredador-presa cociente-dependiente de reacción-difusión, establecieron condiciones sobre los coeficientes difusivos para que ocurriera la Inestabilidad de Turing y obtener la aparición de patrones, es decir, la aparición de una familia de soluciones estacionarias de dicho sistema parabólico. En su estudio se observa claramente que el concepto de Inestabilidad de Turing está ligado al concepto de excitabilidad de cierta matriz. Entre las referencias que podemos encontrar sobre matrices excitables, destaca el artículo de Cross [4] en 1978. Actualmente establecer condiciones necesarias y suficientes para que matrices de dimensiones mayores o iguales a 4×4 sean excitables, es un problema abierto y se puede observar un ejemplo bastante ilustrativo en el artículo de Van Den Driessche y R. A. Satnoianu [17] publicado en 2005.

Planteamiento del problema: Consideremos el siguiente sistema parabólico de reacción-difusión con condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneo

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = D\Delta w(t, x) + f(w(t, x)), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n}(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

Donde $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_k]$ es una matriz diagonal definida positiva de tamaño $k \times k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, conexo y acotado con frontera suave, $w(t, x) \in \mathbb{R}^k$ y $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un campo vectorial suave.

Vamos a suponer que $w \equiv w_0$, es un equilibrio no trivial y estable para el sistema cinético asociado a (0.1), es decir, $f(w_0) = 0$ y la matriz Jacobiana de f evaluada en w_0 es estable.

Entonces surgen las siguientes interrogantes:

- i) ¿Será que la solución w_0 seguirá siendo estable para el sistema (0.1)?
- ii) De no ser así, ¿Cuales son las propiedades que debe tener el campo vectorial f para poder desestabilizarlo?. ¿Entrará en juego la difusión (D).?
- iii) ¿Aparecerán soluciones estacionarias no homogéneas del sistema (0.1)?. ¿Podrían estas soluciones bifurcar localmente de w_0 cuando variamos la difusión?.

Es claro que éste es un problema de gran interés y riqueza matemática, pero por razones obvias nos vamos a restringir a trabajar con sistemas bidimensionales y tridimensionales de reacción-difusión. Así tendremos que los objetivos de nuestro trabajo son los siguientes:

Objetivo General:

Encontrar en el espacio de los parámetros de difusión las condiciones suficientes para que surjan soluciones homogéneas estables o inestables para un sistema bidimensional de reacción y difusión como en (0.1) y aplicar estos resultados a un sistema depredador-presa de reacción-difusión con respuesta funcional del tipo Holling *II*.

Objetivos Específicos:

Demostrar de forma detallada la caracterización para las matrices de tamaño 2×2 y 3×3 que son excitables, es decir, matrices que son estables pero existe una matriz diagonal D con coeficientes positivos tal que su diferencia no es estable. Este objetivo se alcanza siguiendo el artículo de Cross [4] en 1978.

Aplicar la caracterización de matrices excitables para determinar las regiones en el plano de los coeficientes difusivos donde puede ocurrir la inestabilidad de Turing para un sistema bidimensional de Reacción-Difusión sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneo.

Determinar condiciones necesarias para que ocurra una bifurcación de Turing para un sistema bidimensional de Reacción-Difusión sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneo, es decir, condiciones necesarias para que surjan soluciones no homogéneas estables o inestables del sistema elíptico asociado al sistema de reacción y difusión.

Aplicar los resultados obtenidos a algunos modelos particulares depredador-presa de reacción difusión.

www.bdigital.ula.ve

Contenido

1 Marco Teórico	7
§ 1.1 Formulación Abstracta de la Ecuación del Calor	7
§ 1.1.1 Definiciones y Resultados Preliminares	7
§ 1.1.2 La Ecuación del Calor y el Problema de Cauchy	8
§ 1.1.3 El Operador Laplaciano: Caso Unidimensional.	10
§ 1.1.4 Propiedades Espectrales del Operador Laplaciano Sujeto a Condi- ciones de Frontera del Tipo Neumann: Caso General.	13
§ 1.2 Semigrupo Analítico Generado por el Operador Laplaciano Sujeto a Condiciones de Frontera del Tipo Neumann Homogénea	18
§ 1.2.1 Semigrupo Analítico Generado por el Operador Laplaciano. Caso escalar	19
§ 1.2.2 Ecuación de Reacción-Difusión	24
§ 1.3 Existencia y Unicidad de las Soluciones de Sistemas de Reacción-Difusión en el Espacio de las Funciones Continuas	28
§ 1.3.1 Principios del Máximo	31
§ 1.3.2 Existencia y Unicidad	33
§ 1.4 Teoría de Bifurcación	36
§ 1.4.1 Teorema de la Función Implícita.	37
§ 1.4.2 Bifurcación de un Autovalor Simple para Operadores en Espacios de Banach	38
2 Formación de Patrones para Sistemas de Reacción-Difusión	47
§ 2.1 Matrices Excitables	47
§ 2.1.1 Definiciones	47
§ 2.1.2 Condiciones Necesarias para Matrices Fuertemente Estables.	48
§ 2.1.3 Condiciones Necesarias y Suficientes Para Matrices Fuertemente Estables de Tamaño 2×2 y 3×3	54
§ 2.2 Sistemas de Reacción-Difusión, Inestabilidad de Turing y Bifurcación Local	59
§ 2.2.1 Inestabilidad de Turing y Bifurcación Local	60
§ 2.2.2 Formación de Patrones	65
§ 2.2.3 Sistemas Depredador-Presa con Reacción-Difusión	71

www.bdigital.ula.ve

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 1

Marco Teórico

En este capítulo daremos las herramientas básicas para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial en derivadas parciales del tipo parabólico con condiciones de frontera tipo Neumann homogéneas en L_2 y en el espacio de las funciones continuas. Y probaremos un teorema abstracto de la teoría de bifurcación. Concretamente, demostraremos el Teorema 13.5, p.173 del libro de J. Smoller [18]. Allí este teorema está probado para aplicaciones sobre espacios finitos dimensionales. Utilizando el esquema de esa prueba daremos la demostración en espacios infinito dimensionales. De hecho es la forma como lo utilizaremos para la obtención de patrones.

§ 1.1 Formulación Abstracta de la Ecuación del Calor

En esta sección mostraremos como plantear la ecuación del calor como una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) en un espacio abstracto. Dedicaremos también esta sección al estudio de las propiedades espectrales más relevantes del operador Laplaciano, las cuales usaremos para probar que él genera un semigrupo analítico. Para este fin, introduciremos algunas definiciones y resultados preliminares.

§ 1.1.1 Definiciones y Resultados Preliminares

Denotemos por \mathbb{E} un espacio de Banach cualquiera y por $\mathcal{L}[\mathbb{E}]$ al espacio de todos los operadores lineales y continuos de \mathbb{E} en si mismo.

Definición 1.1 Una familia uniparamétrica $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores en $\mathcal{L}[\mathbb{E}]$ es un **semigrupo fuertemente continuo**, si se verifican las siguientes condiciones:

- i) $T(0) = id_{\mathbb{E}}$,
- ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para cada $t, s \geq 0$, y
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$, para cada $x \in \mathbb{E}$.

A los semigrupos fuertemente continuos también se les suele llamar semigrupos de tipo \mathbf{C}_0 , o simplemente semigrupos \mathbf{C}_0 . Cuando para cada $x \in \mathbb{E}$, un semigrupo \mathbf{C}_0 es una función analítica real en t sobre el intervalo $(0, \infty)$, se dice que el **semigrupo es analítico**.

Definición 1.2 Denotemos por $D(A) = \{x \in \mathbb{E} : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existe}\}$. Al operador $A : D(A) \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ definido como sigue

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x), \quad x \in D(A),$$

se le denomina el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

El siguiente resultado se encuentra probado en Pazy [15] p.p. 4-5.

Proposición 1.1 Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo \mathbf{C}_0 y sea A su generador infinitesimal. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones

i) Para cada $x \in \mathbb{E}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x.$$

ii) Para cada $x \in \mathbb{E}$, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ y

$$A\left(\int_0^t T(s)x \, ds\right) = T(t)x - x.$$

iii) Para cada $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

iv) Para cada $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x \, d\tau.$$

v) $\overline{D(A)} = \mathbb{E}$ y A es un operador lineal cerrado y no acotado.

§ 1.1.2 La Ecuación del Calor y el Problema de Cauchy

Denotemos por $L^2 = L^2(\Omega, \mathbb{R})$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado con frontera suave. Consideremos el operador lineal no acotado

$$\begin{aligned} Au &:= -\Delta u, \\ A : D(A) \subset L^2 &\longrightarrow L^2, \\ D(A) &= \left\{ \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde η es el vector unitario normal a $\partial\Omega$ y $H^2(\Omega, \mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev de todas las funciones $\varphi \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, tales que $D^\alpha\varphi \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\alpha = 1, 2$; las derivadas se entienden en un sentido débil.

Consideremos ahora el siguiente problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in D(A). \end{cases} \quad (1.2)$$

Supongamos probado que el operador $-A$ genera un semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Entonces el problema de Cauchy (1.2) tiene una única solución, definida para todo $t \geq 0$. En efecto, definamos $u(t) := T(t)u_0$. Por la proposición 1.1 se sigue que $T(t)x = u(t) \in D(A)$ y $u'(t) = T'(t)u_0 = -AT(t)u_0 = -Au(t)$ para $t \geq 0$; y $u(0) = T(0)u_0 = u_0$. Por lo tanto $u(t) := T(t)u_0$ es solución del P.V.I. (1.2).

Probemos ahora que dicha solución es única. Sabemos que $u(t) = T(t)u_0$ es solución de (1.2). Sea $v(t)$ otra solución de (1.2) y definamos $F(s) = T(t-s)v(s)$, con $s \in [0, t]$, y $t \geq 0$. Como $v(s) \in D(A)$, entonces por la proposición 1.1 $F(s)$ resulta diferenciable en s y

$$\frac{d}{ds}F(s) = AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) = AT(t-s)v(s) - T(t-s)Av(s) \equiv 0,$$

para todo $s \in [0, t]$. Por lo tanto $F(s) = \text{const}$ para todo $s \in [0, t]$. En particular $F(0) = F(t)$. Como $F(0) = T(t)v(0) = T(t)u_0 = u(t)$ y $F(t) = T(0)v(t) = v(t)$, entonces $u(t) = v(t)$ para todo $t \geq 0$. Lo cual concluye la prueba de la unicidad.

Una consecuencia inmediata del razonamiento anterior es que la resolución de la ecuación con difusión sujeta a condiciones del tipo Neumann siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(t, x), & t > 0. \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{en } \partial\Omega. \\ u(0, x) = u_0, & u_0 \in D(A). \end{cases} \quad (1.3)$$

es equivalente a la resolución de la E.D.O. (1.2) en $D(A)$.

La siguiente proposición muestra que las soluciones de la ecuación del calor son bastante regulares en un sentido débil. Por ésta razón realizamos su demostración.

Proposición 1.2 *Sea $T(t)$ un semigrupo analítico en \mathbb{E} , espacio de Banach, y sea A su generador infinitesimal, entonces para todo $x \in \mathbb{E}$, $T(t)x \in D(A)$ para $t > 0$ y $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$.*

Demostración.-

Como $T(t)$ es un semigrupo analítico, entonces la aplicación $t \mapsto T(t)x$ es analítica real en $0 < t < \infty$ para cada $x \in \mathbb{E}$. Por lo tanto, dicha aplicación es diferenciable en $0 < t < \infty$ para cada $x \in \mathbb{E}$. Luego, para cada $x \in \mathbb{E}$ y $t > 0$ se verifica que :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h}x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - Id}{h}T(t)x.$$

De donde se sigue que $T(t)x \in D(A)$ para $t > 0$ y $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$. ■

§ 1.1.3 El Operador Laplaciano: Caso Unidimensional.

En esta subsección consideraremos la siguiente ecuación parabólica sujeta a condiciones de frontera del tipo Neumann homogénea

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, 0 < x < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & 0 < x < 1, \text{ y } f \in L^2(0, 1), \end{cases} \quad (1.4)$$

donde K es una constante positiva. El objetivo es formarnos una idea clara de las propiedades del espectro del operador de Laplace en el caso unidimensional, sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann homogénea. El caso del operador de Laplace sujeto a condiciones de frontera del tipo Dirichlet se analiza de manera similar.

La principal diferencia entre considerar el operador laplaciano sujeto a condiciones de borde del tipo Neumann y del tipo Dirichlet es que en el primer caso el cero es un autovalor del operador y los demás autovalores son positivos, mientras que en el segundo caso todos los autovalores son positivos.

Aplicando el método de separación de variables a la ecuación (1.4); es decir, buscando las soluciones de (1.4) de la forma $u(t, x) = T(t)\gamma(x)$, obtenemos que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = K \frac{\gamma''(x)}{\gamma(x)} = -\lambda;$$

donde λ es una constante a determinar, de modo que la ecuación (1.4) admita soluciones no triviales. Es claro que el problema de frontera que debemos resolver es

$$\gamma''(x) = -\frac{\lambda}{K}\gamma(x), \text{ con } \gamma'(0) = \gamma'(1) = 0$$

y $T(t) = T(0)e^{-\lambda t}$.

No es difícil mostrar que el problema de frontera no admite soluciones no triviales cuando λ es negativo. Cuando $\lambda \geq 0$, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden viene dada por

$$\gamma(x) = C_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{K}}x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{K}}x.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera, obtenemos que $\gamma(x)$ será una solución no trivial si, y sólo si,

$$\sqrt{\frac{\lambda}{K}} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Así, $\gamma_n(x) = \cos(n\pi x)$ es solución de $\gamma'' = (-\lambda_n/K)\gamma$ $n = 0, 1, 2, \dots$, y $\lambda_n = Kn^2\pi^2$.

Ahora definamos el operador lineal A , como sigue

$$A\phi(x) = -K\phi''(x), \quad 0 < x < 1,$$

donde ϕ es una función de clase C^2 sobre $[0, 1]$, con $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$.

Si ϕ y ψ pertenecen al dominio de A , entonces usando integración por partes obtenemos que

$$\langle A\phi, \phi \rangle = -K \int_0^1 \phi''(x)\phi(x)dx = K \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx \geq 0,$$

y

$$\langle A\phi, \psi \rangle = -K \int_0^1 \phi''(x)\psi(x)dx = -K \int_0^1 \phi(x)\psi''(x)dx = \langle \phi, A\psi \rangle.$$

Usando el Teorema de Friedrichs (teorema 2 en [20] página 317) el operador A puede ser extendido a un operador lineal auto-adjunto densamente definido en $L^2(0, 1)$ y preserva el espectro de A . Notemos que el dominio del operador A viene dado por

$$D(A) = \left\{ \phi \in L^2(0, 1) : A\phi \in L^2(0, 1), \text{ con } \phi'(0) = \phi'(1) = 0 \right\}.$$

Por los cálculos realizadas anteriormente, obtenemos que el espectro del operador A , al cual denotaremos por $\sigma(A)$, está formado por los autovalores $\lambda_n = Kn^2\pi^2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, y sus correspondientes autofunciones vienen dadas por

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(n\pi x) & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Es fácil mostrar que las autofunciones forman un sistema ortonormal; es decir

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^1 \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases} \quad (1.5)$$

Por otro lado, si $f \in L^2(0, 1)$, entonces f puede ser desarrollada en serie de Fourier de cosenos; es decir

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x),$$

donde $A_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Para $n \neq 0$ se tiene que

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \cos(n\pi x) dx,$$

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n &= \left(\int_0^1 f(x) \sqrt{2} \cos(n\pi x) dx \right) \sqrt{2} \cos(n\pi x), \\ &= \left(2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \right) \cos(n\pi x) = A_n \cos(n\pi x). \end{aligned}$$

Para $n = 0$, tenemos que $\frac{A_0}{2} = \int_0^1 f(x) dx$. Así, obtenemos que

$$\langle f, \phi_0 \rangle \phi_0 = \int_0^1 f(x) dx = \frac{A_0}{2}.$$

Por lo tanto,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

y por el teorema 9.12 en [2] página 155, podemos concluir que el conjunto de las autofunciones del operador Laplaciano sujeto a condiciones de tipo Neumann homogéneo; es decir el conjunto

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \cos(\pi x), \sqrt{2} \cos(2\pi x), \dots, \sqrt{2} \cos(n\pi x), \dots \right\}$$

es un conjunto ortonormal completo en $L^2(0, 1)$.

Por lo tanto la solución la podemos representar de la siguiente manera

$$u(t, x) = \langle f, \phi_0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle f, \phi_n(x) \rangle \phi_n(x).$$

En el caso del operador Laplaciano sujeto a condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneo tenemos que el espectro del operador está conformado por los autovalores $\lambda_n = K n^2 \pi^2$, con $n = 1, 2, \dots$ y sus correspondientes autofunciones vienen dadas por

$$\phi_n = \sqrt{2} \sin(n\pi x).$$

De esta manera el conjunto

$$\left\{ \sqrt{2} \sin(\pi x), \sqrt{2} \sin(2\pi x), \dots, \sqrt{2} \sin(n\pi x), \dots \right\}$$

también es un conjunto ortonormal completo en $L^2(0, 1)$.

§ 1.1.4 Propiedades Espectrales del Operador Laplaciano Sujeto a Condiciones de Frontera del Tipo Neumann: Caso General.

Estudiamos en esta subsección las propiedades espectrales más relevantes del operador Laplaciano. Antes de restringir nuestra atención a dicho operador, vamos a recordar algunas definiciones y resultados de la teoría de operadores en espacios de Hilbert.

Definición 1.3 Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado. Se dice que A es **monótono**, si

$$(Av, v) \geq 0, \quad \forall v \in D(A).$$

Si además $R(I + A) = H$, se dice que A es **maximal monótono**; es decir,

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f.$$

Definición 1.4 Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado. Se dice que el operador A es **simétrico** si $(Au, v) = (u, Av)$, $\forall u, v \in D(A)$. A es **autoadjunto**, si $A^* = A$, donde A^* denota el operador adjunto de A .

Definición 1.5 Sea X un espacio vectorial normado y $A : Y \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal. El **conjunto resolvente** de A , denotado como $\rho(A)$, es el conjunto de todos los escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

- i) $\overline{R(\lambda I - A)} = X$.
- ii) El operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe y es continuo.

El **espectro** de A , denotado como $\sigma(A)$, es el complemento del conjunto resolvente.

Se prueba que $\rho(A)$ es un conjunto abierto de \mathbb{C} , ver por ejemplo Backman [2], capítulo 19, p.318.

Consideremos los siguientes conjuntos

- i) $C\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \overline{R(\lambda I - A)} = X \text{ y } (\lambda I - A)^{-1} \exists \text{ y no es continuo}\},$
- ii) $R\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \overline{R(\lambda I - A)} \subsetneq X \text{ y } (\lambda I - A)^{-1} \exists\},$
- iii) $P\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda I - A)^{-1} \nexists\},$

los cuales llamaremos el espectro continuo, el espectro residual y el espectro puntual de A , respectivamente.

Utilizando la notación anterior es fácil ver que

$$\sigma(A) = C\sigma(A) \cup R\sigma(A) \cup P\sigma(A).$$

Lema 1.3 Sean X y Y dos espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces, el operador A^{-1} existe y es acotado sobre el rango de A si, y sólo si, existe algún $k > 0$ tal que $k\|x\| \leq \|Ax\|, \forall x \in X$.

La prueba se puede ver en Bachman [2], teorema 14.9, p. 241.

Proposición 1.4 (Brézis [3], prop. VII.6, p.113.) Sea A un operador maximal monótono. Entonces, A es simétrico si, y sólo, si A es autoadjunto.

Proposición 1.5 Sea A un operador no acotado densamente definido sobre un espacio de Hilbert. Si A es autoadjunto, entonces $\sigma(A)$ el espectro de A es real; y el espectro residual $R\sigma(A) = \emptyset$. Además, para todo $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, con $\beta \neq 0$, se verifica que

$$\|(A - \lambda I)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|\beta|}\|y\|, \quad \forall y \in R(A - \lambda I). \quad (1.6)$$

Demostración.-

Veamos que si $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$, entonces $\lambda \in \rho(A)$; es decir pertenece al conjunto resolvente de A . Lo cual evidentemente probaría que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Supongamos en primer lugar que $\lambda \in P\sigma(A)$. Entonces $\exists x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$; y por lo tanto,

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x).$$

Esto implica que $\lambda = \bar{\lambda}$. Lo cual es una contradicción, pues $\beta \neq 0$. Así, $\lambda \notin P\sigma(A)$.

Del razonamiento anterior también se desprende que el operador

$$(A - \lambda I)^{-1} : R(A - \lambda I) \rightarrow H$$

existe. Veamos entonces que $\lambda \in \rho(A)$ mostrando que:

- i) $(A - \lambda I)^{-1}$ es continua; y,
- ii) $\overline{R(A - \lambda I)} = H$.

Denotemos por $y = (A - \lambda I)x$. Un cálculo simple nos da

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|(A - \alpha)x - i\beta x, A - \alpha x - i\beta x\| \\ &= \|(A - \alpha)x\|^2 - i\beta(x, (A - \alpha)x) + i\beta((A - \alpha)x, x) + |\beta|^2\|x\|^2 \\ &= \|(A - \alpha)x\|^2 + |\beta|^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $|\beta|^2\|x\|^2 \leq \|y\|^2$; es decir, $\|x\| \leq \frac{1}{|\beta|}\|y\|$. De donde finalmente obtenemos (1.6) y por el lema 1.3, $(A - \lambda I)^{-1}$ es un operador continuo.

Probemos ahora que $\overline{R(A - \lambda I)} = H$.

Sea $N(A - \lambda I)$ el espacio nulo de $A - \lambda I$. Entonces (ver Brézis [3] pag.28),

$$\overline{R(A - \lambda I)} = N((A - \lambda I)^*)^\perp = N(A^* - \bar{\lambda}I)^\perp = N(A - \bar{\lambda}I)^\perp.$$

Como $Im\bar{\lambda} = -\beta \neq 0$, se demuestra fácilmente como al comienzo de la prueba que $(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$ existe, lo que implica que

$$N(A - \bar{\lambda}I) = 0.$$

Por lo tanto, se sigue que $\overline{R(A - \lambda I)} = H$; y por ende que $\lambda \in \rho(A)$.

Mostremos finalmente que $R\sigma(A) = \emptyset$.

Supongamos que $R\sigma(A) \neq \emptyset$, y sea $\lambda \in R\sigma(A) \subseteq \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Como $\lambda = \bar{\lambda}$ y A es autoadjunto, se cumple que

$$\{0\} = N(A - \lambda I) = N(A^* - \bar{\lambda}I) = N((A - \lambda I)^*).$$

Por lo tanto, por el Corolario II.17, p.28 del Brézis [3],

$$H = \{0\}^\perp = N((A - \lambda I)^*)^\perp = \overline{R(A - \lambda I)},$$

lo cual es una contradicción, pues $\lambda \in R\sigma(A)$. Así, $R\sigma(A)$ el espectro residual de A es vacío. ■

Lema 1.6 Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado. Si A es maximal monótono, entonces: $(I + A) : D(A) \rightarrow H$ es biyectivo, con inversa $(I + A)^{-1}$ acotada y $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$.

Demostración.-

Obviamente $I + A$ es sobreyectivo, pues A es maximal monótono. Veamos que $I + A$ es inyectivo. Supongamos que existe un $u \neq 0$ tal que $u + Au = 0$. De donde obtenemos que $(u, u) = -(Au, u)$. Como $(Au, u) \geq 0$, se sigue que $u = 0$. Lo cual prueba la inyectividad del operador $I + A$.

Por lo tanto, si $f \in H$, existe un único $u \in D(A)$ tal que

$$(u, u) + (Au, u) = (f, u)$$

o bien

$$\|u\|^2 = (u, u) \leq (f, u) \leq \|f\|\|u\| \quad \text{y} \quad \|u\| \leq \|f\|.$$

De esta manera el operador

$$f \xrightarrow{(I+A)^{-1}} u$$

es un operador lineal acotado de H en $D(A)$ y $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$. ■

Lema 1.7 Sea \mathbb{E} un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ un operador lineal. Entonces se cumple que:

- i) $\lambda \in P\sigma(A)$ si, y sólo si, $\lambda + 1 \in P\sigma(A + I)$.
- ii) $\lambda \in R\sigma(A)$ si, y sólo si, $\lambda + 1 \in R\sigma(A + I)$.
- iii) $\lambda \in C\sigma(A)$ si, y sólo si, $\lambda + 1 \in C\sigma(A + I)$.

Este Lema es una consecuencia inmediatamente de la siguiente identidad

$$(\lambda I - A)^{-1} = [(\lambda + 1)I - (A + I)]^{-1}.$$

Todos los resultados antes expuestos son válidos para cualquier operador que cumpla las condiciones requeridas en los enunciados. Ahora procederemos a estudiar el operador Laplaciano.

Proposición 1.8 El operador $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \rightarrow L^2$ es un operador autoadjunto. Donde $D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$. Por lo tanto, el espectro del operador $A = -\Delta$ es real.

Demostración.-

Sea $u \in D(A)$. Usando la identidad de Green en espacios de Sobolev, obtenemos que

$$(Au, u) = \int_{\Omega} (-\Delta u)u dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} u dS = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0.$$

Por lo tanto, A es un operador monótono.

Veamos ahora que A es maximal monótono; es decir, que : $R(I + A) = L^2$. Pero esto es una consecuencia del Teorema IX.26, Brézis [3], el cual afirma que para toda $f \in L^2$, la ecuación $u - \Delta u = f$, con condición de Neumann, posee una única solución $u \in H^2$.

Así para demostrar que A es autoadjunto sólo basta demostrar que A es simétrico. En efecto, si $u, v \in D(A)$ se tiene que:

$$(Au, v) = \int_{\Omega} (-\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dS = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

y

$$(u, Av) = \int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u dS = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Lo cual implica que $(Au, v) = (u, Av)$. ■

Hasta ahora lo que sabemos del espectro del operador $-\Delta$ sujeto a condiciones de borde del tipo Neumann es que es real. Ahora mostraremos que el espectro de $-\Delta$ es puntual y no-negativo.

Proposición 1.9 $\lambda = 0$ es un autovalor simple del operador Laplaciano definido sobre $D(A) = \{\varphi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) : \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) \text{ y } \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$.

Demostración.-

Es evidente que las funciones constantes son soluciones de :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

Veamos ahora que el autoespacio generado por el autovalor $\lambda = 0$ es de dimensión uno. Si existiese una solución v distinta de una constante del sistema (1.7), haciendo uso de la identidad de Green, obtenemos que:

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta v)v dx = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} v dS = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 0.$$

Como v es una función armónica, entonces es analítica y por lo tanto $\nabla v = 0$ en Ω . Lo cual implica que v es una función constante. Contradicción. ■

Proposición 1.10 El espectro del operador $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \rightarrow L^2$ es puntual, discreto y su único punto de acumulación es $+\infty$. Además se verifica que $\sigma(A) = P\sigma(A) \geq 0$, donde $\sigma(A) \geq 0$ significa que $\lambda \geq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$.

Demostración.-

Sabemos por el Lema 1.6 que el operador $(A + I)$ es biyectivo y que el operador $\tilde{T} = (A + I)^{-1}$ es acotado.

Como la inclusión i de $H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta, tenemos que el operador $T = i \circ \tilde{T} : L^2 \rightarrow L^2$ es también un operador compacto. Por lo tanto, por teorema VI.8, p.95, Brézis [3] sabemos que el espectro de T está formado por el elemento 0 y que todo elemento de él distinto del cero es un autovalor; además se verifica una de las siguientes situaciones :

- i) $\sigma(T) = \{0\}$,
- ii) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es finito,
- iii) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es una sucesión que tiende a 0.

Descartemos las situaciones i) y ii).

Sabemos por la proposición 1.9 que $\lambda = 0$ es un autovalor del operador A y esto implica de manera inmediata que $\mu = 1$ es un autovalor del operador T y la primera situación queda descartada.

Supongamos ahora que $\sigma(T) \setminus 0$ es finito. Es fácil verificar que 0 no es un autovalor de T , por lo tanto $\sigma(T) \setminus 0 = P\sigma(T) = \{\mu_n\}_{n=1}^k$ es finito. Observemos también que por ser A un operador autoadjunto, esto implica que el operador T también lo es. Por lo tanto, por el teorema VI.11 del Brézis [3], p.97, y por las Alternativas de Fredholm tenemos que:

$$L^2(\Omega, \mathbb{R}) = \bigoplus_{n=1}^k E_n$$

donde E_n es el autoespacio generado por el autovalor μ_n de T y $E_n = N(T - \mu_n I)$ es de dimensión finita para $1 \leq n \leq k$. Por lo tanto $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ es de dimensión finita. Contradicción.

De esta manera, $\sigma(T) \setminus 0$ es una sucesión que tiende a 0.

Así, por lo dicho anteriormente, por el lema 1.7 y por el hecho que:

$$\sigma(A + I) = \{\lambda : \lambda^{-1} \in \sigma(\tilde{T})\} = \{\lambda : \lambda^{-1} \in \sigma(T)\} \quad (1.8)$$

tenemos que $\sigma(A) = P\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n > 0$ para $n \geq 1$ y $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Veamos ahora que efectivamente $\sigma(A) = P\sigma(A) \geq 0$. Como A es maximal monótono, entonces si u es la autofunción asociada al autovalor λ , tenemos que:

$$(Au, u) = (\lambda u, u) = \lambda \|u\|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto $\lambda \geq 0$. ■

Como consecuencia inmediata del lema 1.7 y la igualdad (1.8), que ponen de manifiesto la correspondencia entre los autovalores del operador T descrito en la proposición anterior y el operador $A = -\Delta$ sujeto a condiciones de Neumann, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.11 *Existe una base Hilbertiana $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ formada por autofunciones asociadas a los autovalores del operador Laplaciano sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneas.*

§ 1.2 Semigrupo Analítico Generado por el Operador Laplaciano Sujeto a Condiciones de Frontera del Tipo Neumann Homogénea

En esta sección demostraremos que el operador Laplaciano sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann genera un semigrupo analítico. Se considerará también el caso vectorial, en el cual se definirá un nuevo operador que describa un sistema de ecuaciones de difusión sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann y se darán condiciones suficientes para que dicho operador genere un semigrupo analítico. En la subsección § 1.2.2 estudiaremos un sistema de ecuaciones de reacción-difusión y veremos cómo expresar la solución en función de un semigrupo analítico.

§ 1.2.1 Semigrupo Analítico Generado por el Operador Laplaciano. Caso escalar

En esta subsección demostraremos que el operador $A = -\Delta$ donde

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

induce un semigrupo analítico. Para demostrar esto usaremos esencialmente el siguiente teorema que se encuentra probado en Henry [9], pág.20.

Teorema 1.12 *Sea \mathbb{E} un espacio de Banach y A un operador lineal cerrado, $A : D(A) \rightarrow \mathbb{E}$, con $\overline{D(A)} = \mathbb{E}$. Si A es un **operador sectorial**, es decir, si para algún $\Phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, algún $M \geq 1$ y algún $a \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

$$i) \text{ El sector } S_{a, \Phi} = \{\lambda; \Phi \leq |\text{Arg}(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A) \quad y$$

$$ii) \|\lambda - A\|^{-1} \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in S_{a, \Phi},$$

entonces $-A$ es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$.

Usaremos también el Teorema de Hille-Yosida, cuya prueba se encuentra en Pazy [15], pág. 8, y cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 1.13 (Hille-Yosida) *Sea \mathbb{E} un espacio de Banach. Un operador lineal no acotado $-A$ es el generador infinitesimal de un \mathbf{C}_0 semigrupo de contracciones $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ si, y sólo si:*

$$i) -A \text{ es cerrado y } \overline{D(-A)} = \mathbb{E},$$

$$ii) \rho(-A) \supseteq \mathbb{R}^+ \quad y$$

$$iii) \text{ para cada } \lambda > 0 \text{ se cumple que } \|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Usemos este teorema para probar la siguiente proposición.

Proposición 1.14 *Sea $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \rightarrow L^2$, donde*

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

entonces $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal de un \mathbf{C}_0 semigrupo de contracciones.

Demostración.-

Veamos que se cumplen las condiciones del Teorema de Hille-Yosida. En efecto, de la sección anterior sabemos que $\sigma(A) \geq 0$, es decir, $\sigma(-A) \leq 0$ y $\rho(-A) \supseteq \mathbb{R}^+$. También por la proposición 1.8 el operador A es maximal monótono, por lo tanto, por la proposición VII.1, Brézis [3] pág. 101, el operador $-A$ cumple las siguientes afirmaciones:

- a) el operador $-A$ es cerrado y $D(-A)$ es denso en L^2 , y
 b) para todo $\lambda > 0$ se cumple que $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$, es decir:

$$\|(I + \lambda A)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(\lambda^{-1}I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

Así,

$$\|(\frac{1}{\lambda}I + A)^{-1}\| \leq |\lambda| \quad \forall \lambda > 0.$$

Poniendo $\mu = \frac{1}{\lambda} > 0$, para todo $\mu > 0$ tenemos que :

$$\|(\mu I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mu|}.$$

De esta manera, por el teorema 1.13 (Hille-Yosida), $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal de un \mathbf{C}_0 semigrupo. ■

Nos interesa ahora ver que $-A = \Delta$ no es sólo el generador infinitesimal de un \mathbf{C}_0 semigrupo sino además de un semigrupo analítico. Por lo tanto, veamos que el operador $A = -\Delta$ es un operador sectorial.

Proposición 1.15 *El operador $A = -\Delta : D(A) \subset L^2 \rightarrow L^2$ donde*

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

es un operador sectorial. Por lo tanto, $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$.

Demostración.-

Veamos primero que el sector

$$S_{\frac{\pi}{4}} = \{\lambda : \frac{\pi}{4} \leq |\text{Arg}(\lambda)| \leq \pi, \lambda \neq 0\} \subset \rho(A).$$

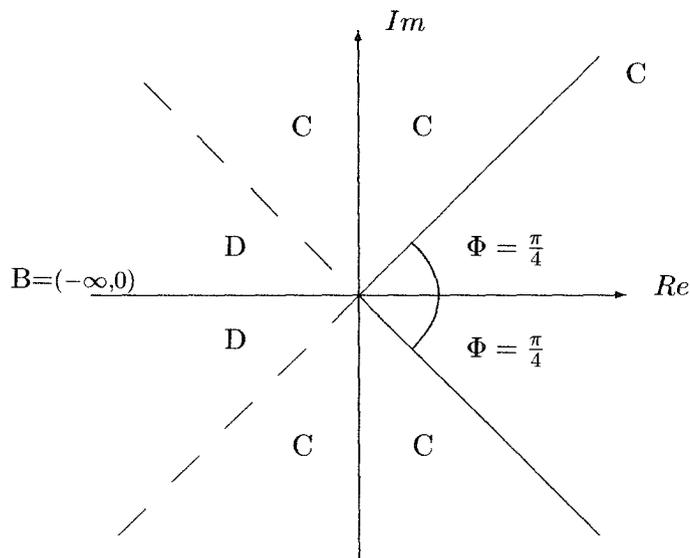
En efecto, como $\sigma(A) \geq 0$, entonces $\rho(A) \supset \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Además, el sector

$$S_{\frac{\pi}{4}} = \{\lambda : \frac{\pi}{4} \leq |\text{Arg}(\lambda)| \leq \pi, \lambda \neq 0\} \subset \mathbb{C} \setminus [0, \infty).$$

Por lo tanto $S_{\frac{\pi}{4}} \subset \rho(A)$.

Verifiquemos ahora que existe $M \geq 1$ tal que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{4}}.$$

Figura 1.1: $S_{\frac{\pi}{4}} = B \cup C \cup D$

Denotemos por :

$$B = (-\infty, 0)$$

$$C = \{\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C} : |\beta| \geq |\alpha| \text{ y } \beta \neq 0\} \text{ y}$$

$$D = \{\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C} : |\alpha| > |\beta|, \beta \neq 0 \text{ y } \alpha < 0\}.$$

De aquí se sigue, como se muestra claramente en la figura 1.1 que $S_{\frac{\pi}{4}} = B \cup C \cup D$.

Caso 1: Sea $\lambda = \alpha + \beta i \in (-\infty, 0)$.

Vimos en la proposición 1.14 que para todo $\mu > 0$ se cumple que $\|(I + \mu A)^{-1}\| \leq 1$, es decir,

$$\begin{aligned} \|(I + \mu A)^{-1}\| &= \|(\mu(\mu^{-1}I + A))^{-1}\| = \|(-\mu(-\mu^{-1}I - A))^{-1}\| = \\ &= |\mu^{-1}| \|(-\mu^{-1}I - A)^{-1}\| \leq 1. \end{aligned}$$

Sea $\mu > 0$ tal que $\mu = -\frac{1}{\lambda}$, entonces tenemos que:

$$|-\lambda| \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in (-\infty, 0).$$

Caso 2: Sea $\lambda = \alpha + \beta i \in C$, es decir, $|\beta| \geq |\alpha|$ y $\beta \neq 0$.

En la proposición 1.5 vimos que si $\lambda = \alpha + \beta i$ con $\beta \neq 0$ entonces se cumple que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\beta|}.$$

Ahora, como $|\beta| \geq |\alpha|$, entonces

$$|\lambda|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq 2|\beta|^2,$$

lo que implica que,

$$\frac{2}{|\lambda|^2} \geq \frac{1}{|\beta|^2},$$

es decir,

$$\frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \geq \frac{1}{\beta}.$$

Por lo tanto,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\beta|} \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|}.$$

Caso 3: Sea $\lambda = \alpha + \beta i \in D$, es decir, $|\alpha| > |\beta|$, $\beta \neq 0$ y $\alpha < 0$.

Como $-A$ es el generador infinitesimal de un \mathbf{C}_0 semigrupo de contracciones, entonces haciendo uso del corolario 3.6, Pazy [15] pág. 11, tenemos que :

$$\rho(-A) \supseteq \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

y para esos z se cumple

$$\|(zI + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}.$$

Escojamos ahora $z \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = -z$, es decir

$$\|(-\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda)|} = \frac{1}{|\alpha|}.$$

Como $|\lambda|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq 2|\alpha|^2$ y $\frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \geq \frac{1}{|\alpha|}$, entonces

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|}.$$

De esta manera, basta escoger $M = \sqrt{2}$ para que se cumpla que :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{4}}.$$

Por lo tanto el operador $A = -\Delta$ es un operador sectorial y $-A = \Delta$ es el generador infinitesimal del semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$. ■

Es importante señalar que en la prueba anterior se tomó el sector S_Φ con $\Phi = \frac{\pi}{4}$ por comodidad; la prueba sería análoga tomando cualquier $\Phi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Observemos que a pesar de saber que el operador $A = -\Delta$ sujeto condiciones de frontera del tipo Neumann genera un semigrupo analítico, aún no se tiene una expresión explícita de éste, razón por la cual se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 1.16 Consideremos el operador $A = -\Delta : D(A) \subset X \rightarrow X$ donde

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

El semigrupo analítico $\{T(t) = e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ admite la siguiente representación :

$$T(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (f, f_n) f_n,$$

donde $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la base ortonormal de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ formada por autofunciones del operador $A = -\Delta$.

Demostración.-

Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ la base ortonormal de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ formada por autofunciones del operador $A = -\Delta$ (ver corolario 1.11), es decir, para $n \geq 0$, f_n satisface :

$$\begin{cases} \Delta f_n = -\lambda_n f_n, & \text{en } \Omega. \\ \frac{\partial f_n}{\partial \eta} = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

donde λ_n es el autovalor asociado a f_n .

Sea $f \in L^2$ y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ el semigrupo analítico generador por $-A$, entonces se tiene que :

$$\text{i) } f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, f_n) f_n,$$

$$\text{ii) } u(t) = T(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) f_n,$$

donde $u(t)$ es solución del P.V.I. :

$$\begin{aligned} u_t &= -Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) &= f \end{aligned} \tag{1.10}$$

y $c_n(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ para $n \geq 0$ son funciones diferenciables a determinar.

Por el sistema 1.9 y por el P.V.I. 1.10 tenemos que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c'_n(t) f_n = u_t = \Delta u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \Delta f_n = \sum_{n=0}^{\infty} -\lambda_n c_n(t) f_n.$$

Además, por i) y ii) obtenemos que :

$$T(0)f = f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, f_n) f_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) f_n.$$

Por lo tanto, por ser $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ base ortonormal de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ obtenemos que para cada $n \geq 0$, c_n satisface la siguiente E.D.O. :

$$c'_n(t) = -\lambda_n c_n(t), \quad t > 0 \tag{1.11}$$

$$c_n(0) = (f, f_n).$$

Por lo tanto,

$$c_n(t) = (f, f_n) e^{-\lambda_n t},$$

así,

$$T(t)f = e^{-tA} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (f, f_n) f_n \quad \blacksquare$$

§ 1.2.2 Ecuación de Reacción-Difusión

En esta sección consideraremos la siguiente ecuación semilineal :

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in L_n^2 \end{cases} \tag{1.12}$$

donde el operador $A = -D\Delta : D(A) \subset L_n^2 \rightarrow L_n^2$ es tal que

$$D(A) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R})^n : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$$

Llamemos a $X = L_n^2$ y veamos cómo está definida la función f . Sabemos por la sección anterior que el operador A es sectorial, por lo tanto las potencias fraccionales del operador $A_1 = A + aI$, con $a > 0$ están bien definidas, y los espacios $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ dotados con la norma del gráfico $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$ están bien definidos para $0 \leq \alpha \leq 1$, para detalles ver Henry [9]. La función f está definida de la siguiente manera:

$f : U \subset X^\alpha \rightarrow X$, donde U es un subconjunto abierto de X^α para algún $\alpha \in [0, 1)$ y f es una función localmente Lipschitz.

Se define una solución del P.V.I. (1.12) en $(0, T)$ como una función continua $u : [0, T) \rightarrow X$ tal que: $u(0) = u_0$; para todo $t \in (0, T)$ $u(t) \in D(A)$, u_t exista, la aplicación $t \mapsto f(u(t))$ sea localmente Hölder continua, $\int_0^\rho \|f(u(t))\| dt < \infty$ para algún $\rho > 0$ y la ecuación diferencial (1.12) se satisface en $(0, T)$.

Relacionemos ahora la solución del P.V.I. (1.12) con la solución de una ecuación integral que involucra el semigrupo analítico generado por el operador $-A = D\Delta$. Del lema 3.3.2, Henry [9], pág. 53, se tiene que para todo $T > 0$ se cumple que si $u : [0, T) \rightarrow X$ es una solución del P.V.I. (1.12) entonces se cumple

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s)) ds, \quad t \in (0, T], \quad (1.13)$$

donde $T(t)$ es el semigrupo analítico generado por el operador $-A = D\Delta$; y recíprocamente, si $u : (0, T] \rightarrow X^\alpha$ es una función continua, $\int_0^\rho \|f(u(s))\| ds < \infty$ para algún $\rho > 0$, y la ecuación integral (1.13) se satisface para todo $t \in (0, T]$, entonces $u : (0, T] \rightarrow X^\alpha$ es solución del P.V.I. (1.12) en $(0, T)$.

Es este resultado el que permite obtener el siguiente teorema de existencia y unicidad local para el P.V.I. (1.12) cuya prueba se encuentra en Henry [9], pág. 54.

Teorema 1.17 *Consideremos el P.V.I. (1.12), entonces para cada $u_0 \in U$ existe $T = T(u_0) > 0$ tal que el P.V.I. (1.12) posee única solución $u : (0, T) \rightarrow X^\alpha$ con $u(0) = u_0$.*

Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones de reacción-difusión sujeto a condiciones de Neumann:

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u + f(u) & , \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

donde D es una matriz real de dimensiones $n \times n$ cuyos autovalores tienen parte real positiva y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función C^2 . Gran cantidad de problemas en áreas aplicadas son modelados por el sistema (1.14), por lo tanto el objetivo que se persigue es plantear dicho sistema en forma abstracta como en (1.12). Para ello definamos el siguiente operador de evolución:

$f^e : X^\alpha \longrightarrow X$ donde $f^e(u)(x_0) = f(u(x_0))$ y $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$.

Veamos que f^e está bien definida. En efecto, por el teorema 4.3, Pazy [15], p.243, se sabe que si $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$ se cumple que:

$$X^\alpha \subset C(\bar{\Omega}),$$

por lo tanto $f^e(u) = f \circ u(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$ y $f^e(u) \in X$.

Veamos ahora que f^e es localmente Lipschitz, es decir, que para $r > 0$ existe $k = k(\alpha) > 0$ tal que $\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2_\Omega} \leq k\|u_1 - u_2\|_\alpha$ si $\|u_1\|, \|u_2\| \leq r$.

En efecto, como $f \in C^2$, entonces dado $\rho > 0$ existe $L(\rho) > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L(\rho)\|x - y\|$ si $\|x\|, \|y\| \leq \rho$. Por el lema 1.6.1, Henry [9] se sabe que para $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$ las siguientes inclusiones son continuas:

- i) $X^\alpha \subset C(\Omega, \mathbb{R}^n)$,
- ii) $X^\alpha \subset X = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

por lo tanto, usando i) existe $l > 1$ tal que:

$$\sup_{x_0 \in \Omega} \|u(x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq l\|u\|_\alpha, \quad u \in X^\alpha$$

Ahora, dado $r > 0$ sea $\rho = lr$, entonces:

$$\|f(u_1(x_0)) - f(u_2(x_0))\| \leq L(lr)\|u_1(x_0) - u_2(x_0)\| \quad \text{si } \|u_1\|_\alpha, \|u_2\|_\alpha \leq r \quad \text{y } x_0 \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2} \leq L(lr)\|u_1 - u_2\|_{L^2} \quad \text{si } \|u_1\|_\alpha, \|u_2\|_\alpha \leq r.$$

Como la inclusión ii) es continua, existe $k > 0$ tal que:

$$\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2} \leq k\|u_1 - u_2\|_\alpha$$

es decir, f^e es localmente Lipschitz, hecho que permite plantear la ecuación (1.14) de manera abstracta como el P.V.I. siguiente:

$$\begin{cases} u_t + Au = f^e(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X^\alpha \end{cases} \quad (1.15)$$

donde el operador $A = -D\Delta : D(A) \subset X \longrightarrow X$ es tal que

$$D(A) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$$

Por lo tanto, por la ecuación (1.13) se cumple que si $u : [0, T) \rightarrow X$ es una solución del P.V.I. (1.15) entonces se cumple que:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f^e(u(s)) ds, \quad t \in (0, T] \quad (1.16)$$

donde $T(t)$ es el semigrupo analítico generado por el operador $-A = D\Delta$.

www.bdigital.ula.ve

§ 1.3 Existencia y Unicidad de las Soluciones de Sistemas de Reacción-Difusión en el Espacio de las Funciones Continuas

Xavier Mora en 1983 (ver [14]) logró aclarar el problema de la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de reacción y difusión en el espacio de las funciones continuas. El cuál dependía de la prolongabilidad del operador de Laplace a un operador cerrado y no acotado que fuera el generador infinitesimal de un semigrupo analítico en el espacio de las funciones continuas y preservara el espectro del operador de Laplace, ver Thm. 2.4, p.41 en [14]. Esta sección está basada en el capítulo 7, p.p 119-132 del libro de Hal L. Smith [8].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado con frontera suave, es decir, $\partial\Omega$ puede ser localmente descrita por una función de clase C^4 con gradiente no nulo. $\eta = \eta(x)$ denota la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$ en el punto $x \in \partial\Omega$ y $\frac{\partial}{\partial\eta} = \eta \cdot \nabla$ denota la derivada direccional en la dirección de η . Consideremos el siguiente sistema de reacción-difusión.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = D\Delta u(t, x) + F(x, u(t, x)), & t > 0, x \in \Omega \\ \delta \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) + \alpha(x)u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = \phi(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (1.17)$$

Donde

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top, F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^\top, \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^\top, D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n], d_i > 0, \forall i = 1 \dots n, \delta = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n] \text{ y } \alpha(x) = \text{diag}[\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)].$$

Notemos que las condiciones de frontera antes planteadas no cubren todas las posibles situaciones que puedan presentarse, pero para nuestros fines esto será suficiente. Si $\delta \equiv I$ y $\alpha(x) \equiv 0$, estamos en presencia de condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneo. Las condiciones de frontera de tipo Robin homogéneo se obtienen poniendo $\delta \equiv I$ y $\alpha_i(x) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. En ambos casos, el dato inicial ϕ pertenece a $C(\bar{\Omega})$, donde

$$C(\bar{\Omega}) = (C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \text{ y } \|\phi\|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\phi(x)\|.$$

Cuando $\delta \equiv 0$ y $\alpha \equiv I$, son condiciones de frontera de tipo Dirichlet. En este caso el dato inicial ϕ pertenece a $C_0(\bar{\Omega})$, donde $C_0(\bar{\Omega})$ es el subespacio de $C(\bar{\Omega})$ definido de la siguiente forma

$$C_0(\bar{\Omega}) := C_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) = \{\phi \in C(\bar{\Omega}) : \phi(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\}.$$

Probaremos que (1.17) genera un sistema semidinámico sobre un espacio adecuado. Comenzaremos expresando el sistema (1.17) como una ecuación diferencial ordinaria en el espacio de Banach $X = \prod_{i=1}^n X_i$ donde, $X_i = C(\bar{\Omega})$, en el caso de que las condiciones de frontera sean del tipo Robin o Neumann, ó $X_i = C_0(\bar{\Omega})$, en el caso Dirichlet. En cualquier caso, la norma de X está definida por $\|\phi\|_X = \sum_{i=1}^n \|\phi_i\|_{X_i}$.

Para cada $i = 1, \dots, n$, sea A_i^0 el operador diferencial

$$A_i^0 : D(A_i^0) \rightarrow X_i \quad \text{definido por} \quad A_i^0(u_i) = d_i \Delta u_i.$$

Donde $D(A_i^0) = \{u_i \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega}) : A_i^0 u_i \in C_0(\bar{\Omega})\}$ en el caso Dirichlet, y $D(A_i^0) = \{u_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : A_i^0 u_i \in C(\bar{\Omega}), \alpha_i(x)u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial \eta}(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\}$, en el caso Neumann o Robin.

La clausura A_i de A_i^0 en X_i genera un semigrupo analítico¹ de operadores acotados $T_i(t)$, para $t \geq 0$, tal que $u_i(t) = T_i(t)\phi_i$ es solución de la ecuación diferencial abstracta en X_i dada por

$$\begin{cases} u_i'(t) = A_i u_i(t) \\ u_i(0) = \phi_i \in D(A_i) \end{cases} \quad (1.18)$$

Una propiedad importante de este semigrupo es que $\forall t > 0$, $T_i(t) : X_i \rightarrow X_i$ es un operador compacto². Además, $u_i(t, x) = u_i(t)(x) = [T_i(t)\phi_i](x)$ es una solución clásica del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, x) = d_i \Delta u_i(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \delta_i \frac{\partial u_i}{\partial \eta}(t, x) + \alpha_i(x)u_i(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u_i(x, 0) = \phi_i(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.19)$$

es decir, $u_i(t, x)$ satisface la ecuación, las condiciones de frontera, tiene derivadas $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_k}$ continuas $\forall (t, x) \in \Omega \times (0, +\infty)$, y $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ son continuas sobre $\bar{\Omega} \times (0, +\infty)$. Más aún, $u_i(t, x)$ es continua sobre $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ y $u_i(x, 0) = \phi_i(x) \forall x \in \Omega$.

¹Ver Xavier Mora Thm. 2.4, pag. 41 en [14]

²Esto se deduce del estimado (4.3), Capítulo 7 pag. 134 de Hal L. Smith en [8]

Definamos un operador $T(t) : X \rightarrow X$ como sigue

$$[T(t)](x) = \left([T_1(t)](x_1), [T_2(t)](x_2), \dots, [T_n(t)](x_n) \right).$$

Es claro que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de operadores sobre X , cuyo generador in-

finitesimal $A : D(A) = \prod_{i=1}^n D(A_i) \rightarrow X$ viene dado por

$$A(x) = \left(A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_n(x_n) \right),$$

y $u(t, x) = [T(t)\phi](x)$ es solución del sistema (1.17) sin el término de reacción.

En cuanto al término de reacción del sistema (1.17), asumamos que $F \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y que, bajo condiciones de frontera del tipo Dirichlet, $F_i(x, u) = 0$ siempre que $x \in \partial\Omega$ y $u_i = 0$. Definamos la función $f : X \rightarrow X$ como sigue $[f(\phi)](x) = F(x, \phi(x))$. Es claro que f es el operador de evaluación.

Así, la Ecuación (1.17) es equivalente a la siguiente ecuación diferencial ordinaria en X

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = \phi, & t > 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Es obvio que la equivalencia es válida solamente si $\phi \in D(A)$. Es fácil probar que la ecuación diferencial (1.20) es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds \quad (1.21)$$

para todo $\phi \in D(A)$. Como es de suponer, la ecuación integral (1.21), en general, admite más soluciones que la ecuación (1.20), es por esta razón que a las soluciones de (1.21) se les denomina solución moderada. Con más precisión $u : [0, \tau) \rightarrow X$ es una solución moderada de la ecuación integral (1.21) si es continua y satisface (1.21) sobre $[0, \tau)$.

Más adelante el Teorema 1.21, bajo las condiciones de suavidad establecidas anteriormente, dará condiciones suficientes para la existencia y unicidad de una solución moderada no prolongable de la ecuación integral (1.21). Así podremos definir un semiflujo sobre el espacio X de la siguiente manera

$$\Phi_t : X \rightarrow X, \text{ definida por } \Phi_t(\phi) = u(t, \phi),$$

donde $u(t, \phi)$ es la única solución moderada no prolongable de (1.21), con $u(0, \phi) = \phi$. Más aún dicha solución moderada de (1.21) es también una solución de la ecuación diferencial (1.20) y por tanto una solución clásica del sistema (1.17).

Como es de esperarse, los puntos de equilibrios juegan un papel fundamental en la dinámica de las soluciones del sistema (1.17). Mas precisamente,

Definición 1.6 Diremos que una solución u_0 de (1.17), es un equilibrio, si u_0 es una solución clásica independiente del tiempo, es decir, u_0 es solución del sistema elíptico asociado a (1.17), por lo tanto, $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ y satisface

$$\begin{cases} 0 = D\Delta u_0(x) + F(x, u_0(x)), & t > 0, x \in \Omega \\ \delta \frac{\partial u_0}{\partial \eta}(x) + \alpha(x)u_0(x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

§ 1.3.1 Principios del Máximo

Los principios del máximo juegan un papel muy importante en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Estos son una herramienta fundamental para establecer la existencia de conjuntos positivamente invariantes y comparar soluciones de diferentes ecuaciones parabólicas. Aplicaremos dichos principios para mostrar que el semigrupo $T_i(t)$ generado por (1.19) es positivamente invariante.

Consideremos el siguiente operador parabólico general de segundo orden:

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^N a_i(t, x) D_i u - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Para la función $u(t, x)$ con $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ para algún $T > 0$. Donde el símbolo $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y los coeficientes $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$ y $a_i(t, x)$ son continuos sobre $[0, T] \times \bar{\Omega}$.

Definición 1.7 A es uniformemente parabólico sobre $(0, T) \times \Omega$ si existe una constante positiva μ tal que para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \mu \|\xi\|^2, \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega$$

En lo que sigue A será un operador uniformemente parabólico sobre $(0, T) \times \Omega$, para algún $T > 0$ y $Q = (0, T) \times \partial\Omega$.

El siguiente principio establece que una solución no constante de una desigualdad diferencial en derivadas parciales elíptica sobre $(0, T) \times \Omega$, si alcanza su máximo entonces lo debe alcanzar en un punto que pertenece a la frontera de la región $(0, T) \times \Omega$.

Proposición 1.18 (Robert C. Mcowen, [16] pág. 327-332) (*Principio del Máximo Fuerte*) Sea $u(t, x)$ una función continua sobre $[0, T] \times \bar{\Omega}$, tal que $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ existen y son continuas sobre $[0, T] \times \Omega$ y

$$Au(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega \quad (1.23)$$

Si u alcanza su máximo en $[0, T] \times \bar{\Omega}$ en un punto $p = (\bar{t}, \bar{x}) \in (0, T] \times \Omega$, entonces $u(t, x) = u(p)$, para todo $(t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$, tal que $t \leq \bar{t}$. Si $Au(t, x) \leq 0$ y u alcanza su mínimo en $[0, T] \times \bar{\Omega}$ en un punto $p = (\bar{t}, \bar{x}) \in (0, T] \times \Omega$, entonces se cumplen las mismas conclusiones.

El siguiente principio establece que, la derivada direccional en dirección a la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$ de las soluciones no constantes de (1.23), debe ser positiva en el punto de la frontera donde dicha solución alcanza su máximo.

Proposición 1.19 (Robert C. Mcowen, [16] pág. 327-332) Sea $u(t, x)$ una función que satisface las hipótesis de la proposición anterior y además $\frac{\partial}{\partial x_i}$ existen y son continuas sobre $((0, T] \times \bar{\Omega}) \cup Q$. Si u alcanza su máximo en $[0, T] \times \bar{\Omega}$ en un punto $p = (\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ y $u(t, x) < u(p)$, $\forall (t, x) \in (0, T] \times \Omega$, entonces $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p) > 0$. De manera análoga si $Au(t, x) \leq 0$ y u alcanza su mínimo sobre $[0, T] \times \bar{\Omega}$ en un punto $p = (\bar{t}, \bar{x}) \in Q$ y $u(t, x) > u(p)$, $\forall (t, x) \in (0, T] \times \Omega$, entonces $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p) < 0$.

Sea

$$X_i^+ = \{\phi_i \in C(\bar{\Omega}) : \phi_i(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}\}$$

el cono de las funciones no negativas en X_i con su correspondiente relación de orden parcial sobre X_i^+ ; es decir, $\phi_i \leq \psi_i$ si y sólo si $\phi_i(x) \leq \psi_i(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. El siguiente resultado muestra que $T_i(t)$ es positivamente invariante en este cono.

Corolario 1.20 El semigrupo $T_i(t)$ es positivamente invariante. Es decir,

$$T_i(t)X_i^+ \subset X_i^+, \quad \forall t \geq 0.$$

Más aún, si $\phi_i > 0$ y $u_i(t, x) = [T_i(t)\phi](x)$, entonces $u_i(t, x) > 0$ para todo $t > 0$ y $x \in \bar{\Omega}$ en el caso de condiciones de frontera tipo Neumann o Robin y para $t > 0$ y $x \in \Omega$ en el caso de condiciones de frontera tipo Dirichlet, además para este último caso $\frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) < 0$ para todo $(t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega$.

Demostración.- Notemos que el operador $A_i^0 = d_i\Delta$ es uniformemente parabólico. Sea $\phi_i \geq 0$ y $u(t, x) = [T_i(t)\phi](x)$.

Condiciones de frontera de tipo Dirichlet Razonemos por reducción al absurdo, y supongamos que existe $q = (t^*, x^*) \in (0, \infty) \times \bar{\Omega}$ tal que $u(q) < 0$. Elijamos $T > t^*$ y sea $p = (\bar{t}, \bar{x})$ el punto donde u alcanza su mínimo sobre $[0, T] \times \bar{\Omega}$, claramente $p \in (0, T] \times \Omega$ y $u(p) < 0$, de donde por el principio del máximo fuerte se tiene que $u(t, x) = u(p)$ para todo $(t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$, en particular, $u(0, \bar{x}) = u(p)$, pero $u(0, \bar{x}) = \phi_i$, lo cual es una contradicción.

Condiciones de frontera de tipo Robin Nuevamente si suponemos por el absurdo que $u(q) < 0$ para algún $q = (t^*, x^*) \in (0, \infty) \times \bar{\Omega}$, se tiene imitando el razonamiento anterior que $\bar{x} \in \partial\Omega$ y $u(t, x) > u(p)$, para todo $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, donde $p = (\bar{t}, \bar{x})$ es el punto donde u alcanza su mínimo sobre $[0, T] \times \bar{\Omega}$. Consideremos ahora los siguientes casos: (i) $\bar{t} < T$. Entonces $p \in (0, T) \times \partial\Omega$, de donde por la

Proposición 1.19 $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p) < 0$, lo cual contradice las condiciones de frontera.

(ii) $\bar{t} = T$. Entonces $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p) \leq 0$, lo cual nuevamente contradice las condiciones de frontera.

Condiciones de frontera de tipo Neumann Supongamos que $\phi_i(\bar{x}) > 0$ para algún $\bar{x} \in \bar{\Omega}$. Sea v solución de la ecuación con condiciones de frontera tipo Robin y $w = v - u$. Entonces w satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = d_i \Delta w(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \eta}(t, x) + v(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ w(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1.24)$$

Veamos que $w(t, x) \leq 0$ para $(t, x) \in [0, +\infty) \times \bar{\Omega}$. Supongamos por el absurdo que $w(q) > 0$ para algún $q \in (0, +\infty) \times \bar{\Omega}$. Sea $T > 0$ tal que $q \in [0, T] \times \bar{\Omega}$ y $p = (\bar{t}, \bar{x})$ el punto donde w alcanza el máximo sobre $[0, T] \times \bar{\Omega}$. Claramente $w(p) > 0$ y $\bar{t} > 0$. Además $\bar{x} \in \partial\Omega$, en efecto; si $\bar{x} \in \Omega$, entonces $p \in (0, T) \times \Omega$, así por el principio del máximo fuerte $w(t, x) = w(p)$ para todo $(t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$, en particular $w(\bar{x}, 0) = w(p) > 0$, lo cual es una contradicción. Así, $p \in (0, T) \times \partial\Omega$, ya que $v(p) > 0$,

se tiene que $\frac{\partial w}{\partial \eta}(p) \leq 0$, lo cual contradice las condiciones de frontera, así $w(t, x) \leq 0$, es decir, $v(t, x) - u(t, x) \leq 0$, de donde por ser v solución del problema con condiciones de frontera tipo Robin se sigue que $u(t, x) \geq 0$, tal y como se quería mostrar. Así, en este caso $u(t, x) \geq 0$, para todo $(t, x) \in [0, +\infty) \times \bar{\Omega}$. ■

§ 1.3.2 Existencia y Unicidad

En esta subsección retornaremos al sistema de reacción-difusión (1.17) con la finalidad de establecer condiciones suficientes para que las soluciones de dicho sistema existan y permanezcan en cierto subconjunto cerrado y convexo X_Λ de X .

Sea Λ un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de \mathbb{R}^n y

$$X_\Lambda = \{\phi \in X : \phi(x) \in \Lambda, \forall x \in \bar{\Omega}\}.$$

En el caso de condiciones de frontera del tipo Dirichlet $X_\Lambda \neq \emptyset$ si y sólo si $0 \in \Lambda$.

Condiciones suficientes para que X_Λ sea positivamente invariante con respecto al semiflujo generado por (1.17) son dadas a continuación:

- 1) La condición de Nagumo para que Λ sea positivamente invariante respecto de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} u'(t) = F(x, u(t)) \\ u(0) = x_0, \text{ con } x_0 \in \Lambda \end{cases} \quad (1.25)$$

es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{dist}(\Lambda, v + hF(x, v))}{h} = 0, \quad \forall (x, v) \in \bar{\Omega} \times \Lambda.$$

- 2) Que X_Λ sea positivamente invariante respecto al semigrupo lineal $T(t)$, es decir:

$$T(t)X_\Lambda \subset X_\Lambda, \quad \forall t \geq 0.$$

El siguiente teorema es demostrado en el libro de Hal L. Smith. [8] p.p. 127.

Teorema 1.21 *Supongamos que se cumplen 1) y 2). Entonces $\forall \phi \in X_\Lambda$, el sistema (1.17) admite una única solución "mild" no prolongable*

$$\begin{aligned} u &: [0, \sigma) \rightarrow X \\ u(t) &= u(t, \phi) \in X_\Lambda. \end{aligned}$$

donde $\sigma = \sigma(\phi) \leq +\infty$. Además:

- a) $u(t)$ es continuamente diferenciable sobre $(0, \sigma)$, $u(t) \in D(A)$ y satisface (1.20) sobre $(0, \sigma)$.
- b) $u(t) = [u(t)](x)$ es una solución clásica de (1.17)
- c) si $\sigma(\phi) < +\infty$, entonces

$$\|u(t)\| \rightarrow +\infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow \sigma \text{ donde } \|u(t)\| = \sup_{t \in [0, \sigma)} \|u(t)\|_X$$

- d) si $\sigma(\phi) = +\infty$, $\forall \phi \in X_\Lambda$, entonces $\Phi_t(\phi) = u(t, \phi)$ es un semiflujo sobre X_Λ .
- e) si B es un subconjunto cerrado y acotado de X_Λ , $t > 0$ y $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} \Phi_t(B)u(t) = u(t, \phi) \in X_\Lambda$ es acotado en X_Λ , entonces $\Phi_{t_0}(B)$ tiene clausura compacta en X_Λ .

Observe que el cono $X_+ = \prod_{i=1}^n X_i^+$ en X es justamente X_Λ con $\Lambda = \mathbb{R}_+^n$, el conjunto de vectores de tamaño n con todas sus componentes no negativas. Esto nos permite enunciar el siguiente corolario.

Corolario 1.22 Sea $\Lambda = \mathbb{R}_+^n$ y supongamos que $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface que

$$F_i(x, u) \geq 0, \text{ siempre que } (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^n \text{ y } u_i = 0,$$

entonces las condiciones 1) y 2) pasan para $X_\Lambda = X_+$ y se obtiene el Teorema 1.21.

Demostración.- Por el Corolario 1.20 obtenemos que 2) se cumple.

Sea $(x, v) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^n$. Si $v_i > 0$ entonces $v_i + hF_i(x, v) > 0$, $\forall h > 0$, con $0 < h \ll 1$. Si $v_i = 0$, entonces por hipótesis $v_i + hF_i(x, v) = hF_i(x, v) \geq 0$, $\forall h > 0$. Así $v + hF(x, v) \in \mathbb{R}_+^n \forall 0 < h \ll 1$ y 1) se cumple. ■

www.bdigital.ula.ve

§ 1.4 Teoría de Bifurcación

En esta sección resumiremos los resultados básicos que nos permitan demostrar el Teorema 13.5, p.173 del libro de J. Smoller [18]. Allí este teorema está demostrado para aplicaciones sobre espacios finitos dimensionales. Utilizando el esquema de esa prueba daremos la demostración en espacios infinito dimensionales. De hecho es la forma como lo utilizaremos para la obtención de patrones.

Muchos problemas conllevan a resolver un problema de la forma

$$f(\lambda, x) = 0; \quad (1.26)$$

donde f es un operador definido de $\mathbb{R} \times B_1$ en B_2 , con B_1 y B_2 espacios de Banach. En nuestro caso, dicho operador proviene de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo elíptico que depende de un parámetro escalar.

Estamos interesados en la estructura del conjunto solución, es decir del conjunto

$$f^{-1}(0) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times B_1 : f(\lambda, x) = 0\}. \quad (1.27)$$

Mas precisamente buscaremos condiciones sobre f que nos permitan determinar cuando una solución (λ_0, x_0) de (1.26) pertenece a una curva de soluciones $(\lambda, x(\lambda))$ al menos localmente, es decir, para $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$ (esto se lee λ suficientemente cercano a λ_0). También vamos a indagar sobre cuando (λ_0, x_0) pertenece a varias curvas de soluciones $(\lambda, x_1(\lambda)), (\lambda, x_2(\lambda)), \dots$. Esta última pregunta nos lleva naturalmente al concepto de un punto de bifurcación.

Definición 1.8 Sea (λ_0, x_0) una solución de (1.26) y $\Gamma(\lambda) := (\lambda, x(\lambda))$ una curva de soluciones de (1.26) definida en un entorno de λ_0 con $\Gamma(\lambda_0) := (\lambda_0, x(\lambda_0)) = (\lambda_0, x_0)$. Diremos que (λ_0, x_0) es un **punto de bifurcación** con respecto a Γ si toda vecindad del punto (λ_0, x_0) en $\mathbb{R} \times B_1$ contiene soluciones de (1.26) las cuales no están sobre Γ . A las soluciones de (1.26) cercanas a (λ_0, x_0) que no están sobre Γ se les llaman soluciones de Bifurcación.

Observe que la definición no nos garantiza la existencia de una rama continua de soluciones de bifurcación que provengan de (λ_0, x_0) . Entonces nos podemos realizar varias preguntas de interés:

- i) Dada una curva Γ de soluciones de (1.26), ¿Qué condiciones garantizan que ésta contenga un punto de bifurcación?. Obviamente si el teorema de la función implícita es aplicable en un punto, la bifurcación no puede ocurrir allí.
- ii) ¿Cómo es la estructura de $f^{-1}(0)$ cerca de un punto de bifurcación?.
- iii) Si el conjunto de bifurcación es, digamos, una curva Γ' ¿podría ésta ser continuada en el infinito?. ¿ Γ' contendrá puntos de bifurcación?

- iv) Para problemas en los cuales las soluciones de (1.26) son equilibrios de una ecuación dada, ¿Se podrá inferir información concerniente a las propiedades de estabilidad de la solución de bifurcación?

Para nuestro propósito, en esta sección, atacaremos sólo el problema de encontrar puntos de bifurcación. Todos los problemas mencionados anteriormente están muy bien discutidos en el libro de Joel Smoller, [18], Capítulo 13.

§ 1.4.1 Teorema de la Función Implícita.

Sean X y Y espacios de Banach, $B(X, Y)$ denota el conjunto de los operadores lineales y acotados de X en Y , y sea $f \in C(\Omega, Y)$, donde Ω es un abierto en X .

Definición 1.9 Diremos que f es Fréchet diferenciable en el punto $a \in \Omega$, si existe un operador $T \in B(X, Y)$ tal que

$$\| f(a + \xi) - f(a) - T \cdot \xi \| = o(\| \xi \|) \text{ cuando } \| \xi \| \rightarrow 0.$$

El operador T es llamado la derivada de Fréchet de f en a .

Ahora vamos a introducir la notación necesaria para la derivada de funciones definidas sobre espacios productos. Sean B_1 , B_2 y B_3 espacios de Banach y sea U un conjunto abierto en el espacio producto $B_1 \times B_2$. Sea $f : U \rightarrow B_3$, y $u = (u_1, u_2) \in U$, definimos la sección transversal, $U_1 = \{x_1 \in B_1 : (x_1, u_2) \in U\}$.

Diremos que f es diferenciable con respecto a la variable x_1 en el punto (u_1, u_2) , si la función

$$g : U_1 \rightarrow B_3, \quad g(x_1) = f(x_1, u_2)$$

es diferenciable en el punto u_1 . Cuando esto ocurra, escribiremos $dg_{u_1} = D_1 f(u_1, u_2)$, donde dg_{u_1} es un operador lineal del espacio U_1 en el espacio B_3 . Diremos que f es diferenciable con respecto a x_1 sobre U , si esta es diferenciable con respecto a x_1 en cada punto $u \in U$. De manera similar se define la derivada de f con respecto a la segunda variable.

Por supuesto, las propiedades usuales para derivadas parciales ocurren en este contexto general. En particular, si f es diferenciable en el punto $u = (u_1, u_2) \in U$, entonces f es diferenciable con respecto a las variables x_1 y x_2 en u , y para todo $(\xi_1, \xi_2) \in B_1 \times B_2$, se tiene que

$$df_u(\xi_1, \xi_2) = D_1 f(u) \cdot \xi_1 + D_2 f(u) \cdot \xi_2.$$

Más aún, el operador

$$D : U \rightarrow B_3 \\ (x_1, x_2) \mapsto (D_1 f(x_1, x_2), D_2 f(x_1, x_2))$$

pertenece al espacio $C(U, B(U_1, B_3) \times B(U_2, B_3))$. Finalmente, si $f \in C(U, B_3)$ y f es continuamente diferenciable con respecto a ambas variables, es decir, $D_1f : U \rightarrow B(U_1, B_3)$ y $D_2f : U \rightarrow B(U_2, B_3)$ son continuas, entonces $f \in C^1(U, B_3)$. ver el libro de Joel Smoller, [18], pág. 170.

Teorema 1.23 (Robert C. Mcowen, [16] pág. 240) (*Teorema de la Función Implícita en espacios de Banach*)

Sea $f \in C(U, B)$ donde U es un conjunto abierto en $\Lambda \times B_1$, y Λ, B_1 son espacios de Banach. Asuma que $f(\lambda_0, u_0) = 0$ para algún $(\lambda_0, u_0) \in U$ y que f es continuamente diferenciable en la segunda variable en una vecindad de (λ_0, u_0) .

Si el operador $D_2f(\lambda_0, u_0)$ es un isomorfismo, entonces existe una función continua $u = u(\lambda)$ definida en una vecindad N_{λ_0} de λ_0 , tal que $u(\lambda_0) = u_0$, y $f(\lambda, u(\lambda)) \equiv 0$ en N_{λ_0} . Esas son las únicas soluciones de $f(\lambda, u) = 0$ en N_{λ_0} . Finalmente, si $f \in C^k(U, B)$, entonces $u \in C^k(N_{\lambda_0}, B)$.

§ 1.4.2 Bifurcación de un Autovalor Simple para Operadores en Espacios de Banach

De acuerdo al teorema anterior, podemos esperar que ocurra una bifurcación en (λ_0, u_0) si $D_2f(\lambda_0, u_0)$ es singular. Sin embargo, si $D_2f(\lambda_0, u_0)$ es singular, no necesariamente (λ_0, u_0) es un punto de bifurcación. Para aclarar mejor estas ideas consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1 Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(\lambda, x) = \lambda - x^3$. Es obvio que $F(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0$. Sin embargo,

$$F(\lambda, x) = 0 \Leftrightarrow \lambda - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\lambda}.$$

Es decir, la ecuación $F(\lambda, x) = 0$ determina de manera única a x como función de λ . Observe que $\frac{\partial F}{\partial x}$ no cambia de signo en el punto $(0, 0)$. Por lo tanto el punto $(0, 0)$ no es un punto de bifurcación.

Ejemplo 1.2 Consideremos

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ G(\lambda, x) &= \lambda - x^2. \end{aligned}$$

Entonces, $G(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial G}{\partial x}(0, 0) = 0 \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no es invertible y

$$G(\lambda, x) = 0 \Leftrightarrow \lambda - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Es decir, el $(0, 0)$ es un punto de bifurcación. Notemos que $\frac{\partial G}{\partial x}$ cambia de signo en el punto $(0, 0)$.

El siguiente resultado no es más que un Teorema de Bifurcación en Espacios de Banach y es de vital importancia para demostrar la aparición de patrones en sistemas bidimensionales de reacción-difusión. Antes de probar este teorema, vamos a demostrar un Lema auxiliar el cual es muy útil cuando estamos trabajando en espacios de Banach.

Definición 1.10 Sea $G \subset X$ un subespacio cerrado de un espacio de Banach X . Se dice que un subespacio Z de X es un suplementario topológico de G si:

- i) Z es cerrado
- ii) $G \cap Z = \{0\}$ y $G + Z = X$

En este caso todo $x \in X$ se escribe de forma única $x = y + z$ con $y \in G$ y $z \in Z$.

Lema 1.24 (ver Brézis [3], pág. 21-22) *Todo subespacio $G \subset X$ de dimensión finita admite un suplementario topológico.*

Demostración.- Sea e_1, e_2, \dots, e_n una base de G . Entonces todo $y \in G$ se representa de la siguiente forma $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Definamos un funcional lineal y continuo de la siguiente manera

$$\varphi_i : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_i(y) = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es claro que $\varphi_i \in G'$ (el espacio dual de G) y además

$$\|\varphi_i\|_{G'} = \sup_{y \in G, \|y\| \leq 1} |\varphi_i(y)| = \sup_{y \in G, \|y\|=1} |\varphi_i(y)|.$$

Definamos ahora

$$p : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = \|\varphi_i\|_{G'} \cdot \|x\|.$$

Es fácil verificar que

- i) $p(x) \geq 0, \forall x \in X$.
- ii) $\forall x, y \in X$ se tiene que $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- iii) para $\alpha > 0$ y $x \in X$ se tiene que $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.
- iv) $\varphi_i(x) \leq p(x), \forall x \in G$.

Entonces por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional lineal $\widehat{\varphi}_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a φ_i , es decir

$$\varphi_i(y) = \widehat{\varphi}_i(y), \quad \forall y \in G \quad \text{y} \quad \widehat{\varphi}_i(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Además

$$\|\widehat{\varphi}_i\|_{X'} = \sup_{y \in X, \|y\|=1} |\widehat{\varphi}_i(y)| \geq \sup_{y \in G, \|y\|=1} |\widehat{\varphi}_i(y)| = \sup_{y \in G, \|y\|=1} |\varphi_i(y)| = \|\varphi_i\|_{G'}$$

y

$$\|\widehat{\varphi}_i\|_{X'} = \sup_{y \in X, \|y\|=1} |\widehat{\varphi}_i(y)| \leq \sup_{y \in X, \|y\|=1} p(y) = \sup_{y \in X, \|y\|=1} \|\varphi_i\|_{G'} \cdot \|x\| = \|\varphi_i\|_{G'}.$$

Por lo tanto $\widehat{\varphi}_i$ es acotado y $\|\widehat{\varphi}_i\|_{X'} = \|\varphi_i\|_{G'}$.

Mostremos ahora que $Z = \bigcap_{i=1}^n (\widehat{\varphi}_i)^{-1}(0)$ es un suplementario topológico de G .

Como $(\widehat{\varphi}_i)^{-1}(0) = \{x \in X : \widehat{\varphi}_i(x) = 0\} = N(\widehat{\varphi}_i)$, entonces Z es cerrado. Si $x \in G \cap Z$, entonces $0 = \widehat{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) = x_i, \forall i = 1, \dots, n$ y por tanto $x = 0$. Por último si $x \in X$, entonces $x = y + z$ con $y \in G$ y $z \in Z$, donde

$$y = \sum_{i=1}^n \widehat{\varphi}_i(x) e_i \quad y \quad z = x - \sum_{i=1}^n \widehat{\varphi}_i(x) e_i \in Z. \blacksquare$$

Teorema 1.25 (*Bifurcación de un Autovalor Simple para Operadores en Espacios de Banach. J. Smoller [18], pág. 173.*)

Sea $f \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$, donde X y Y son espacios de Banach. Y sean $L_0 = D_2 f(\lambda_0, 0)$ y $L_1 = D_1 D_2 f(\lambda_0, 0)$. Supongamos que

- i) $f(\lambda, 0) \equiv 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) El núcleo de L_0 ($N(L_0)$) es uni-dimensional, generado por u_0 .
- iii) El rango de L_0 ($R(L_0)$) tiene co-dimensión 1, es decir, $\dim[Y/R(L_0)] = 1$
- iv) $L_1 u_0 \notin R(L_0)$.

Sea Z cualquier subespacio cerrado de X tal que $X = \text{Span}\{u_0\} \oplus Z$, es decir, cualquier $x \in X$ se puede escribir de manera única como $x = \alpha u_0 + z$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $y z \in Z$. Entonces existe un $\delta > 0$ y una función continuamente diferenciable $(\lambda, \phi) : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \times Z$ tal que

- 1) $\lambda(0) = \lambda_0$
- 2) $\phi(0) = 0$
- 3) $f(\lambda(s), s \cdot (u_0 + \phi(s))) = 0$, para $|s| < \delta$.

Más aún, existe una vecindad de $(\lambda_0, 0)$ tal que cualquier solución de $f(\lambda, x) = 0$ pertenece al graf $[(\lambda, \phi)]$ o es de la forma $(\lambda, 0)$.

Demostración.- Definamos la siguiente aplicación

$$r : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y, \text{ dada por}$$

$$r(\lambda, u) = f(\lambda, u) - L_0 u - (\lambda - \lambda_0)L_1 u.$$

Es claro que $r \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ y satisface

a) $r(\lambda, 0) \equiv 0$. Esto se deduce inmediatamente a partir de la definición de r y el hecho de que $f(\lambda, 0) \equiv 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $D_2 r(\lambda_0, 0) = 0$. Basta recordar que por hipótesis $L_0 = D_2 f(\lambda_0, 0)$, por lo tanto

$$\|r(\lambda_0, \xi) - r(\lambda_0, 0)\| = \|f(\lambda_0, \xi) - f(\lambda_0, 0) - L_0 \xi\| = o(\|\xi\|) \text{ cuando } \|\xi\| \rightarrow 0.$$

c) $D_1 D_2 r(\lambda_0, 0) = 0$. Basta recordar que por hipótesis $L_1 = D_1 D_2 f(\lambda_0, 0)$. Y como

$$D_2 r(\lambda, u) = D_2 f(\lambda, u) - L_0 - (\lambda - \lambda_0)L_1 \quad \text{y} \quad D_1 D_2 r(\lambda, u) = D_1 D_2 f(\lambda, u) - L_1,$$

$$\text{entonces } D_1 D_2 r(\lambda_0, 0) = D_1 D_2 f(\lambda_0, 0) - L_1 = 0.$$

d) Sea $M > 0$ si $|\lambda - \lambda_0| \leq M$, entonces, $\|r(\lambda, u)\| = o(\|u\|)$. Basta observar que

$$\|r(\lambda, u) - r(\lambda, 0) - D_2 r(\lambda, 0)u\| = o(\|u\|) \text{ cuando } \|u\| \rightarrow 0. \quad (1.28)$$

$$\lim_{|\lambda - \lambda_0| \rightarrow 0} \frac{\|D_2 r(\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0), 0) - D_2 r(\lambda_0, 0)\|}{|\lambda - \lambda_0|} = D_1 D_2 r(\lambda_0, 0) = 0. \quad (1.29)$$

Así, dado $\epsilon > 0$, de (1.28) existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\|u\| < \delta_1$ entonces

$$\frac{\|r(\lambda, u)\|}{\|u\|} < \frac{\epsilon}{2} + \|D_2 r(\lambda, 0)\|. \quad (1.30)$$

Luego de (1.29), existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|\lambda - \lambda_0| < \delta_2$, entonces

$$\|D_2 r(\lambda, 0)\| < \frac{\epsilon}{2M} |\lambda - \lambda_0| \quad (1.31)$$

Así de (1.30) y (1.31) existe $\delta > 0$ tal que si $\|u\| + |\lambda - \lambda_0| < \delta$ entonces

$$\frac{\|r(\lambda, u)\|}{\|u\|} < \frac{\epsilon}{2} + \|D_2 r(\lambda, 0)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2M} |\lambda - \lambda_0| < \epsilon.$$

Lo cual concluye la prueba.

Entonces podemos reescribir f de la siguiente forma

$$f(\lambda, u) = L_0 u + (\lambda - \lambda_0)L_1 u + r(\lambda, u).$$

Además

$$D_2 f(\lambda, 0) = L_0 + (\lambda - \lambda_0)L_1 + D_2 r(\lambda, 0) \quad (1.32)$$

Como $N(L_0)$ es un subespacio cerrado de X y la $\dim(N(L_0)) = 1$ entonces por el Lema 1.24, $N(L_0)$ admite un suplementario topológico Z , es decir, existe un subespacio cerrado Z de X tal que $X = N(L_0) \oplus Z$.

La idea ahora es introducir una función auxiliar y un nuevo parámetro s de modo que podamos aplicar inmediatamente el teorema de la función implícita en un espacio adecuado. Definamos una función auxiliar $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times Z \rightarrow Y$ como sigue

$$F(s, \lambda, z) = \begin{cases} \frac{f(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s}, & \text{si } s \neq 0 \\ D_2f(\lambda, 0)(u_0 + z), & \text{si } s = 0 \end{cases}.$$

Mostremos que F es continua. Sea $(s, \lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$. Si $s \neq 0$, entonces

$$F(s, \lambda, z) = \frac{f(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s}$$

y es claro que F es continua en (s, λ, z) . Si $s = 0$, de la parte **a)** se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))(u_0 + z) - r(\lambda, 0)(u_0 + z)}{s \cdot (u_0 + z)} \\ &= D_2r(\lambda, 0)(u_0 + z). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Así, de (1.32) y (1.33) se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{(s, \lambda, z) \rightarrow (0, \lambda_0, z)} F(s, \lambda, z) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s} \\ &= L_0(u_0 + z) + (\lambda - \lambda_0)L_1(u_0 + z) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s} \\ &= L_0(u_0 + z) + (\lambda - \lambda_0)L_1(u_0 + z) + D_2r(\lambda, 0)(u_0, z) \\ &= D_2f(\lambda, 0)(u_0 + z). \end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración de la continuidad.

Además $F(0, \lambda_0, 0) = D_2f(\lambda_0, 0)(u_0 + z) = L_0u_0 = 0$. Sea $r > 0$, entonces F es diferenciable con respecto a λ , $\forall (s, \lambda, z) \in \mathbb{B}_r(0, \lambda_0, 0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times Z$, es decir, probaremos que $\forall (s, \lambda, z) \in \mathbb{B}_r(0, \lambda_0, 0)$ existe $D_2F_{(s, \lambda, z)} \in B(\mathbb{R}, Y)$ tal que

$$\|F(s, \lambda + \hat{\lambda}, z) - F(s, \lambda, z) - D_2F_{(s, \lambda, z)}\hat{\lambda}\| = o(\|\hat{\lambda}\|) \text{ cuando } \|\hat{\lambda}\| \rightarrow 0.$$

En efecto, definamos $D_2F_{(s, \lambda, z)} : \mathbb{R} \rightarrow Y$ como sigue

$$D_2F_{(s, \lambda, z)}\hat{\lambda} = \begin{cases} L_1(u_0 + z)\hat{\lambda} + \frac{D_1r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))\hat{\lambda}}{s}, & \text{si } s \neq 0 \\ L_1(u_0 + z)\hat{\lambda} + D_2D_1r(\lambda, 0)(u_0 + z)\hat{\lambda}, & \text{si } s = 0 \end{cases}.$$

Del hecho que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_1 r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_1 r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))(u_0 + z) - D_1 r(\lambda, 0)(u_0 + z)}{s \cdot (u_0 + z)} \\ &= D_2 D_1 r(\lambda, 0)(u_0 + z) \end{aligned}$$

se desprende que $D_2 F_{(s,\lambda,z)}$ es acotado. Además dado $(s, \lambda, z) \in \mathbb{B}_r(0, \lambda_0, 0)$ con $s \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\|F(s, \lambda + \widehat{\lambda}, z) - F(s, \lambda, z) - D_2 F_{(s,\lambda,z)} \widehat{\lambda}\| = \\ &\|L_1(u_0 + z) \widehat{\lambda} + \frac{r(\lambda + \widehat{\lambda}, s \cdot (u_0 + z))}{s} - \frac{r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s} - D_2 F_{(s,\lambda,z)} \widehat{\lambda}\| = \\ &\left\| \frac{r(\lambda + \widehat{\lambda}, s \cdot (u_0 + z))}{s} - \frac{r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s} - \frac{D_1 r(\lambda, s \cdot (u_0 + z)) \widehat{\lambda}}{s} \right\| = o(\|\widehat{\lambda}\|), \end{aligned}$$

cuando $\|\widehat{\lambda}\| \rightarrow 0$. Si $s = 0$, entonces

$$\begin{aligned} &\|F(0, \lambda + \widehat{\lambda}, z) - F(0, \lambda, z) - D_2 F_{(0,\lambda,z)} \widehat{\lambda}\| = \\ &\|D_2 f(\lambda + \widehat{\lambda}, 0)(u_0 + z) - D_2 f(\lambda, 0)(u_0 + z) - L_1(u_0 + z) + D_2 D_1 r(\lambda, 0)(u_0 + z) \widehat{\lambda}\| = \\ &\|D_2 r(\lambda + \widehat{\lambda}, 0)(u_0 + z) - D_2 r(\lambda, 0)(u_0 + z) - D_2 D_1 r(\lambda, 0)(u_0 + z) \widehat{\lambda}\| = o(\|\widehat{\lambda}\|), \end{aligned}$$

cuando $\|\widehat{\lambda}\| \rightarrow 0$. Lo cual concluye la demostración de la diferenciabilidad con respecto a λ .

Probemos ahora que F es diferenciable con respecto a z , $\forall (s, \lambda, z) \in \mathbb{B}_r(0, \lambda_0, 0)$, es decir, probaremos que $\forall (s, \lambda, z) \in \mathbb{B}_r(0, \lambda_0, 0)$ existe $D_3 F_{(s,\lambda,z)} \in B(\mathbb{Z}, Y)$ tal que

$$\|F(s, \lambda, z + \xi) - F(s, \lambda, z) - D_3 F_{(s,\lambda,z)} \xi\| = o(\|\xi\|) \quad \text{cuando } \|\xi\| \rightarrow 0.$$

Definamos $D_3 F_{(s,\lambda,z)} : Z \rightarrow Y$ como sigue

$$D_3 F_{(s,\lambda,z)} \xi = L_0 \xi + (\lambda - \lambda_0) L_1 \xi + D_2 r(\lambda, s \cdot (u_0 + z)) \xi.$$

Es claro que $D_3 F_{(s,\lambda,z)}$ es acotado. Además dado $(s, \lambda, z) \in \mathbb{B}_r(0, \lambda_0, 0)$ con $s \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\|F(s, \lambda, z + \xi) - F(s, \lambda, z) - D_3 F_{(s,\lambda,z)} \xi\| = \\ &\left\| \frac{r(\lambda, s \cdot (u_0 + z + \xi))}{s} - \frac{r(\lambda, s \cdot (u_0 + z))}{s} - D_2 r(\lambda, s \cdot (u_0 + z)) \xi \right\| = o(\|\xi\|) \end{aligned}$$

cuando $\|\xi\| \rightarrow 0$. Si $s = 0$, entonces

$$\begin{aligned} & \|F(s, \lambda, z + \xi) - F(s, \lambda, z) - D_3 F_{(s, \lambda, z)}\| = \\ & \|D_2 r(\lambda, 0)(u_0 + z + \xi) - D_2 r(\lambda, 0)(u_0 + z) - D_2 r(\lambda, 0)\xi\| = o(\|\xi\|), \end{aligned}$$

cuando $\|\xi\| \rightarrow 0$.

Así F es diferenciable con respecto a la variable $(\lambda, z) \forall (s, \lambda, z) \in \mathbb{B}_r(0, \lambda_0, 0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times Z$. Además, se verifica

$$D_{(\lambda, z)} F_{(s, \lambda, z)}(\bar{\lambda}, \xi) = D_2 F_{(s, \lambda, z)} \bar{\lambda} + D_3 F_{(s, \lambda, z)} \xi$$

y es acotado en una vecindad de $(0, \lambda_0, 0)$.

Consideremos ahora el operador $T : \mathbb{R} \times Z \rightarrow Y$ definido como sigue

$$T(\bar{\lambda}, \xi) = D_{(\lambda, z)} F_{(0, \lambda_0, 0)} = D_2 F_{(0, \lambda_0, 0)} \bar{\lambda} + D_3 F_{(0, \lambda_0, 0)} \xi.$$

Es claro que T es una transformación lineal y acotada. Como $\mathbb{R} \times Z$ es un espacio cerrado entonces T es cerrado. Por otra parte se tiene que $T(\bar{\lambda}, \xi) = 0$ si y solo si $L_0 \xi = \bar{\lambda} L_1 u_0$. Pero $L_1 u_0 \notin R(L_0)$, entonces necesariamente debe ocurrir que $T(\bar{\lambda}, \xi) = 0 \Leftrightarrow (\bar{\lambda}, \xi) = (0, 0)$. Así $N(T) = 0$ y por tanto T es un operador inyectivo.

Dado $y \in Y$, si $y \in R(L_0)$, entonces existe $(0, \xi) \in \mathbb{R} \times Z$, tal que $T(0, \xi) = y$. Si $y \notin R(L_0)$, entonces consideramos el elemento $y + R(L_0)$ del espacio cociente $Y/R(L_0)$. Como $\dim[Y/R(L_0)] = 1$ entonces $\exists y_0 \notin R(L_0)$ tal que

$$\widehat{\lambda} y_0 + R(L_0) = y + R(L_0) \Leftrightarrow y - \widehat{\lambda} y_0 \in R(L_0) \Leftrightarrow y = L_0 \xi + \widehat{\lambda} y_0.$$

Como $\dim[Y/R(L_0)] = 1$, entonces $\text{Span}\{y_0 + R(L_0)\} = \text{Span}\{L_1 u_0 + R(L_0)\}$. Por lo tanto existe $(\bar{\lambda}, \xi) \in \mathbb{R} \times Z$, tal que $y = L_0 \xi + \bar{\lambda} L_1 u_0$. Lo cual a su vez implica que T es un operador sobreyectivo.

Así hemos probado que el operador T es invertible y como consecuencia del teorema de la inversa acotada obtenemos que T^{-1} es una transformación lineal acotada; es decir, existe una constante $k > 0$ tal que

$$k\|(\bar{\lambda}, \xi)\| \leq \|T(\bar{\lambda}, \xi)\|, \quad \forall (\bar{\lambda}, \xi) \in \mathbb{R} \times Z. \quad (1.34)$$

Luego aplicando el Teorema de la Función Implícita, obtenemos que existe $\delta > 0$ y una función continuamente diferenciable $(\lambda, \phi)(s) = (\lambda(s), \phi(s)) : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \times Z$ tal que

- 1) $(\lambda(0), \phi(0)) = (\lambda_0, 0)$
- 2) $F(0, \lambda(s), \phi(s)) = 0$, para $|s| < \delta \Leftrightarrow f(\lambda(s), s \cdot (u_0 + \phi(s))) = 0$ para $|s| < \delta$.

Mostremos ahora que existe una vecindad del punto $(\lambda_0, 0)$ de modo que si la ecuación $f(\lambda, x) = 0$ tiene solución, entonces dicha solución es de la forma (λ, ϕ) o $(\lambda, 0)$.

Observemos en primer lugar que para todo $\epsilon \in (0, 1)$ existe una vecindad N de $(\lambda_0, 0)$ con la propiedad que toda solución $(\lambda, u) \equiv (\lambda, su_0 + w)$ de la ecuación $f(\lambda, x) = 0$, con $w \in Z$, en la vecindad N satisface el siguiente estimado

$$\|w\| < 2|s|\epsilon, \quad \text{si } |s| + |\lambda - \lambda_0| \ll 1.$$

En efecto, sea $0 < \epsilon < 1$ y $(\lambda, u) \equiv (\lambda, su_0 + w) \in \mathbb{R} \times X$, con $w \in Z$. De (1.34) se tiene que existe $k > 0$ tal que si

$$L_0 w + (\lambda - \lambda_0)L_1 u_0 = v, \quad \text{entonces } \|w\| + |\lambda - \lambda_0| < k\|v\|. \quad (1.35)$$

Del item **d)**, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\text{si } \|w\| + |s| + |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad \text{entonces } \|r(\lambda, su_0 + w)\| < \epsilon \cdot (\|w\| + |s|). \quad (1.36)$$

Del hecho que $f(\lambda, su_0 + w) = 0$ se obtiene que

$$L_0 w + s(\lambda - \lambda_0)L_1 u_0 = -(\lambda - \lambda_0)L_1 w + r(\lambda, su_0 + w).$$

Luego por (1.35) y (1.36), concluimos que

$$\|w\| + |s| |\lambda - \lambda_0| \leq k[|\lambda - \lambda_0| \|L_1\| \|w\|] + \epsilon \cdot (|s| + \|w\|).$$

Entonces dado $0 < \epsilon < 1$,

$$\frac{1}{2}\|w\| < (1 - k|\lambda - \lambda_0| \|L_1\| - \epsilon)\|w\| \leq \epsilon|s|, \quad \text{si } |\lambda - \lambda_0| \ll 1.$$

De la estimación anterior se sigue que: si $s = 0$, entonces $w = 0$. Por lo tanto, $u = su_0 + w = 0$, lo cual implica que u es una solución de la ecuación $f(\lambda, u) = 0$ de la forma $(\lambda, 0)$.

Si $u \neq 0$, entonces $s \neq 0$ y $u = s \cdot (u_0 + s^{-1}w)$, luego $F(s, \lambda, s^{-1}w) = 0$. Así por la unicidad del Teorema de la Función Implícita, si $\epsilon \ll 1$, entonces

$$(s, \lambda, s^{-1}w) = (s, \lambda(s), \phi(s)).$$

Por lo tanto $\lambda = \lambda(s)$ y $w = s\phi(s)$; y por ende $u = su_0 + w = su_0 + s\phi(s)$. ■

www.bdigital.ula.ve

Capítulo 2

Formación de Patrones para Sistemas de Reacción-Difusión

En este capítulo introduciremos las definiciones de Inestabilidad y Bifurcación de Turing para sistemas de reacción-difusión. Obtendremos condiciones suficientes para que en sistemas bidimensionales y tridimensionales de reacción-difusión ocurra la Inestabilidad de Turing, es importante notar que este concepto esta ligado a la Excitabilidad de la matriz jacobiana del término de reacción del sistema.

Haciendo uso del teorema 1.25, daremos condiciones suficientes, para que, en sistemas bidimensionales de reacción-difusión, ocurra una Bifurcación de Turing, la cual dará origen a la aparición de patrones, es decir, aparecerá una familia uniparamétrica de soluciones del sistema elíptico. Finalmente analizaremos la posibilidad de que ocurra una inestabilidad de Turing en algunos sistemas particulares bidimensionales de reacción-difusión.

La siguiente sección esta basada en los artículos de G. W. Cross [4] y Karl P. Haderer [7] pag. 96. En ella introduciremos algunas definiciones y resultados preliminares.

§ 2.1 Matrices Excitables

§ 2.1.1 Definiciones

Sea A una matriz real $n \times n$ y $D := \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$ una matriz diagonal real.

Definición 2.1 .

- i) Diremos que $H > 0$, si H es una matriz real simétrica definida positiva.
- ii) Diremos que $H \geq 0$, si H es una matriz real simétrica semidefinida positiva.

Definición 2.2 .

- i) Diremos que A es una matriz estable si todos sus autovalores tienen parte real negativa.
- ii) Diremos que A es una matriz semiestable si todos sus autovalores tienen parte real no positiva.

Definición 2.3 .

- i) Diremos que A es una matriz fuertemente estable si $\forall D \geq 0$, se tiene que $A - D$ es estable.
- ii) Diremos que A es una matriz excitable (con respecto a la difusión), si A es estable pero no es fuertemente estable.

Observación 2.1 Es claro que una matriz fuertemente estable, es también una matriz estable. Además, dada una matriz A excitable, podemos escoger D de tal forma que $A - D$ es inestable.

§ 2.1.2 Condiciones Necesarias para Matrices Fuertemente Estables.

En esta subsección concluiremos que si A es fuertemente estable, entonces $A \in P_0^+$, donde $P_0^+ := \{A \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{todos los menores principales signados de } A \text{ son no negativos, con al menos uno de cada orden positivo}\}$.

Para cualquier subconjunto $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n$ de \mathbb{N} , la submatriz principal de orden j , A_{i_1, i_2, \dots, i_j} de A se obtiene al omitir todas las filas y columnas excepto aquellas con índices i_1, i_2, \dots, i_j . El correspondiente menor principal es:

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_j} := \det(A_{i_1, i_2, \dots, i_j}).$$

Los menores M_i son simplemente a_{ii} .

Definición 2.4 Los menores principales signados de A son las cantidades $(-1)^j \cdot M_{i_1, i_2, \dots, i_j}$.

El polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n$$

donde

$$c_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} (-1)^j \cdot M_{i_1, i_2, \dots, i_j}$$

es decir, c_j es la suma de todos los menores principales signados de orden j .

Ejemplo 2.1 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Así, $A_1 = a_{11}$; $A_2 = a_{22}$, son las submatrices de orden 1 y $A_{12} = A$, es la submatriz de orden 2.

Los correspondientes menores principales de orden 1 son: $M_1 = a_{11}$ y $M_2 = a_{22}$. El correspondiente menor principal de orden 2 es:

$$M_{12} = \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Los correspondientes menores principales signados de orden 1 y 2 son respectivamente:

$$-M_1 = -a_{11}; \quad -M_2 = -a_{22} \quad \text{y} \quad M_{12} = \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

El polinomio característico de A viene dado por:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + c_1 \lambda + c_2, \quad \text{donde}$$

$$c_1 = -(M_1 + M_2) = -(a_{11} + a_{22}) = -\text{tr}(A) \quad \text{y} \quad c_2 = M_{12} = \det(A).$$

Así concluimos que:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Ejemplo 2.2 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Así, $A_1 = a_{11}$; $A_2 = a_{22}$; $A_3 = a_{33}$, son las submatrices de A de orden 1.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

son las submatrices de A de orden 2 y $A_{123} = A$ es la submatriz de A de orden 3.

Los correspondientes menores principales de orden 1 son:

$$M_1 = a_{11}; \quad M_2 = a_{22} \quad \text{y} \quad M_3 = a_{33}.$$

Los correspondientes menores principales de orden 2 son:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \det(A_{12}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \\ M_{13} &= \det(A_{13}) = a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} \\ M_{23} &= \det(A_{23}) = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}. \end{aligned}$$

El correspondiente menor principal de orden 3 es:

$$\begin{aligned}
 M_{123} &= \det(A) \\
 &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\
 &\quad - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22} \\
 &= a_{11} \cdot M_{23} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22}.
 \end{aligned}$$

Los menores principales signados de orden 1 son: $-M_1 = -a_{11}$, $-M_2 = -a_{22}$,
 $-M_3 = -a_{33}$.

Los de orden 2 son: M_{12} , M_{13} , M_{23} ; y el de orden 3 es $-M_{123} = -\det(A)$.

El polinomio característico de A viene dado por
 $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3$ donde,

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -(M_1 + M_2 + M_3) \\
 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\
 &= -Tr(A)
 \end{aligned}$$

$$c_2 = M_{12} + M_{13} + M_{23} \quad \text{y} \quad c_3 = -M_{123} = -\det(A).$$

Teorema 2.1 *Si A es fuertemente estable, entonces todas las submatrices de A son fuertemente semiestables.*

Demostración.- Por reducción al absurdo. Supongamos que existe una submatriz principal A_{i_1, i_2, \dots, i_j} con $j < n$ tal que A_{i_1, i_2, \dots, i_j} no es fuertemente semiestable. Entonces existe una matriz diagonal $D_0 = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n] \geq 0$ tal que $(A - D_0)_{i_1, i_2, \dots, i_j}$ no es Semiestable, es decir, $(A - D_0)_{i_1, i_2, \dots, i_j}$ tiene un autovalor λ_0 con $\text{Re}(\lambda_0) > 0$.

Sea D la matriz diagonal formada por ceros en las posiciones de la diagonal i_1, i_2, \dots, i_j y d en el resto. Es decir,

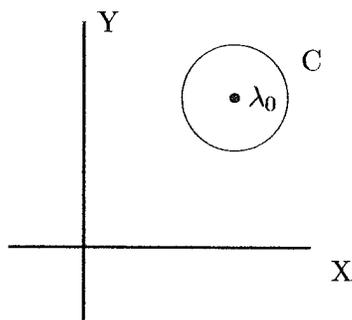
$$\begin{matrix}
 1 \\
 \vdots \\
 i_1 \\
 i_1 + 1 \\
 \vdots \\
 i_2 \\
 i_2 + 1 \\
 \vdots \\
 i_j \\
 i_j + 1 \\
 \vdots \\
 n
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 d & 0 & \cdot & 0 \\
 0 & \ddots & 0 & \cdot & 0 \\
 \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdot & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & d & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \vdots & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \ddots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & d & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \ddots & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \cdot & 0 & d & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \cdot & 0 & \ddots & 0 \\
 0 & \cdot & 0 & d
 \end{pmatrix}
 = D$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda I - A + D_0 + D) &= \det(\lambda I - (A - D_0 - D)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-j} P_k(\lambda) d^k
 \end{aligned}$$

donde, $P_k(\lambda)$ son polinomios en λ y $P_{n-j}(\lambda) = \det[(\lambda I - A + D_0)_{i_1, i_2, \dots, i_j}]$.

Sea C un círculo en el semiplano positivo, con centro en λ_0 y que no hayan más ceros de $P_{n-j}(\lambda)$ en C . Como se muestra en la siguiente figura.



Tomando $M_k = \max\{|P_k(\lambda)| : \lambda \in C\}$, para $k = 0, \dots, n - j - 1$ y $m_{n-j} = \min\{|P_{n-j}(\lambda)| : \lambda \in C\}$,

tenemos que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{M_0 + M_1 d + M_2 d^2 + \dots + M_{n-j-1} d^{n-j-1}}{m_{n-j} d^{n-j}} = 0$$

Así para d suficientemente grande obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-j} P_k(\lambda) d^k - P_{n-j}(\lambda) d^{n-j} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-j-1} P_k(\lambda) d^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-j-1} |P_k(\lambda)| d^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-j-1} M_k d^k \\ &\leq m_{n-j} d^{n-j} \\ &\leq |P_{n-j} d^{n-j}| \quad \text{sobre } C. \end{aligned}$$

En consecuencia por el Teorema de Rouché's obtenemos que

$$\det(\lambda I - A + D_0 + D) = \sum_{k=0}^{n-j} P_k(\lambda) d^k$$

tiene una raíz dentro de C , lo cual contradice el hecho de que A es una matriz fuertemente estable. ■

Definición 2.5

$P := \{A \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{todos los menores principales signados de } A \text{ son positivos}\}$ y

$P_0^+ := \{A \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{todos los menores principales signados de } A \text{ son no negativos, con al menos uno de cada orden positivo}\}$

Corolario 2.2 Si A es una matriz fuertemente estable, entonces $A \in P_0^+$

Demostración.-

Como la matriz A es fuertemente estable, entonces por el Teorema 2.1 cualquier submatriz principal A_{i_1, i_2, \dots, i_j} es semiestable. Como el

$$\det(A_{i_1, i_2, \dots, i_j}) = \prod_{i=1}^j \lambda_i$$

donde, λ_i $i = 1, \dots, j$ son los autovalores de la matriz A_{i_1, i_2, \dots, i_j} y los autovalores complejos ocurren en pares conjugados, entonces

$$(-1)^j \cdot M_{i_1, i_2, \dots, i_j} \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Además, por hipótesis y la Observación 2.1 tenemos que la matriz A es estable, Así todas las raíces del polinomio característico de A

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n$$

donde

$$c_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} (-1)^j \cdot M_{i_1, i_2, \dots, i_j}$$

tienen parte real negativa y por tanto, $P_n(\lambda)$ es un polinomio de Hurwitz, luego $c_j > 0$, $\forall j = 1, \dots, n$, lo cual implica que, al menos un menor principal de cada orden es positivo. ■

Proposición 2.3 Si $A \in P$ o $A \in P_0^+$, entonces lo mismo ocurre para $A - D$, $\forall D \geq 0$.

Demostración.-

Sea $D \geq 0$, si $A \in P_0^+$, entonces para cualquier subconjunto de índices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n$, se tiene que

$$(-1)^j \cdot \det[(A - D)_{i_1, i_2, \dots, i_j}]$$

es una combinación lineal no negativa de los menores principales signados

$(-1)^j \cdot M_{i_1, i_2, \dots, i_j}$ de A_{i_1, i_2, \dots, i_j} , los cuales tienen como coeficiente 1. Por lo tanto,

$$(-1)^j \cdot \det[(A - D)_{i_1, i_2, \dots, i_j}] \geq (-1)^j \cdot M_{i_1, i_2, \dots, i_j} \geq 0.$$

Así $(A - D) \in P_0^+$. ■

Observación 2.2 De la proposición anterior obtenemos que $\forall D \geq 0$ si $A \in P_0^+$ entonces $\det(A - D) \neq 0$, lo cual implica que $A - D$ es una matriz invertible. Como los autovalores de $A - D$ son funciones continuas de D y se presentan en pares conjugados, entonces una matriz estable $A \in P_0^+$ es fuertemente estable si y sólo si, $\forall D \geq 0$, la matriz $A - D$ no tiene un autovalor puro imaginario.

§ 2.1.3 Condiciones Necesarias y Suficientes Para Matrices Fuertemente Estables de Tamaño 2×2 y 3×3 .

En esta subsección estableceremos condiciones necesarias y suficientes para que matrices de orden 2 y 3 sean excitables, este resultado es de vital importancia para lo que sigue de este capítulo, más específicamente, nos dotará de una herramienta fundamental para decidir cuando en un sistema bidimensional o tridimensional de reacción-difusión ocurre la inestabilidad de Turing.

Sea $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Lema 2.4 A es fuertemente estable si, y sólo si, $A \in P_0^+$, esto es equivalente a que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} < 0 \quad (2.1)$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} > 0 \quad (2.2)$$

$$a_{11} \leq 0 \quad \text{y} \quad a_{22} \leq 0. \quad (2.3)$$

Demostración.- Supongamos que la matriz $A \in P_0^+$, es decir, se cumplen las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3), y consideremos una matriz $D = \text{diag}[d_1, d_2] \geq 0$. Así

$$A - D = \begin{pmatrix} a_{11} - d_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - d_2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico asociado a $A - D$ es de la forma

$$\begin{aligned} P_{A-D}(\lambda) &= \det(\lambda I - (A - D)) \\ &= \lambda^2 + c_1^* \lambda + c_2^*, \quad \text{donde} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1^* &= -(Tr(A) - Tr(D)) \\ &= -Tr(A) + Tr(D) \\ &= c_1 + Tr(D) > 0 \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$c_2^* = \det(A) + \alpha_{12} = c_2 + \alpha_{12} > 0, \quad \text{con} \quad \alpha_{12} = -a_{11} \cdot d_2 - a_{22} \cdot d_1 + d_1 \cdot d_2 \geq 0.$$

Ver Ejemplo 2.1.

Así, los coeficientes del polinomio cuadrático $P_{A-D}(\lambda)$ son positivos y por tanto $P_{A-D}(\lambda)$ es un polinomio de Hurwitz, concluimos entonces que $A - D$ es estable. Ver las notas de Marcos Lizana en [10], cap. 5, pág. 88.

La otra implicación de la demostración se obtiene directamente del Corolario 2.2. ■

Corolario 2.5 *A es excitable si, y sólo si, se cumplen las condiciones:*

1. $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$,
2. $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} > 0$ y
3. $a_{11} > 0$ ó $a_{22} > 0$

Demostración.- Es inmediata a partir del lema 2.4. ■

Observación 2.3 Del Corolario 2.5 concluimos que sólo hay cuatro posibles arreglos de signos para que matrices de tamaño 2×2 sean Excitables:

$$A_1 = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \text{ y } A_4 = \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$$

Porque si $a_{11} > 0$, entonces del ítem 1. obtenemos que $0 < a_{11} < -a_{22}$ y por tanto $a_{22} < 0$. Lo cual implica que $a_{11} \cdot a_{22} < 0$, entonces del ítem 2. concluimos que a_{12} y a_{21} deben tener signos opuestos.

Análogamente si $a_{22} > 0$ entonces $a_{11} < 0$ y, tanto a_{12} como a_{21} , deben tener signos opuestos.

Más adelante, en la subsección § 2.2.1 la observación anterior nos permitirá obtener una caracterización para conocer todos los posibles casos en los que, puede ocurrir la inestabilidad de Turing, para un sistema bidimensional de reacción-difusión.

Vamos a probar ahora un resultado análogo para matrices de tamaño 3×3 .
Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Lema 2.6 A es fuertemente estable si, y sólo si, $A \in P_0^+$ y A es estable, esto es equivalente, observando el Ejemplo 2.2 y el criterio de Routh-Hurwitz, a que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} < 0 \quad (2.4)$$

$$\det(A) < 0 \quad (2.5)$$

$$c_1 \cdot c_2 - c_3 > 0 \quad (2.6)$$

$$a_{11} \leq 0 \text{ y } a_{22} \leq 0 \text{ y } a_{33} \leq 0 \quad (2.7)$$

$$M_{12} \geq 0 \text{ y } M_{13} \geq 0 \text{ y } M_{23} \geq 0. \quad (2.8)$$

Demostración.- Asumamos que $A \in P_0^+$ y A es estable, es decir, se cumplen las condiciones (2.4),..., (2.8), y consideremos una matriz $D = \text{diag}[d_1, d_2, d_3] \geq 0$. Así

$$A - D = \begin{pmatrix} a_{11} - d_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - d_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - d_3 \end{pmatrix}.$$

Observe que las condiciones (2.4), (2.5) y (2.6) implican que $c_1 = -\text{Tr}(A) > 0$, $c_3 = -\det(A) > 0$ y $c_2 = M_{12} + M_{13} + M_{23} > 0$. Ver Ejemplo 2.2.

El polinomio característico asociado a $A - D$ es de la forma

$$P_{A-D}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - D)) = \lambda^3 + c_1^* \lambda^2 + c_2^* \lambda + c_3^* \text{ donde,}$$

$$\begin{aligned} c_1^* &= -(\text{Tr}(A) - \text{Tr}(D)) \\ &= -\text{Tr}(A) + \text{Tr}(D) \\ &= c_1 + \text{Tr}(D) > 0. \end{aligned}$$

$$c_2^* = M_{12}^* + M_{13}^* + M_{23}^*, \text{ donde } M_{ij}^* = M_{ij} + \alpha_{ij}, \text{ con } \alpha_{ij} = -a_{ii} \cdot d_j - a_{jj} \cdot d_i + d_i \cdot d_j \geq 0,$$

Así

$$\begin{aligned} c_2^* &= M_{12} + M_{13} + M_{23} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23} \\ &= c_2 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23} > 0. \end{aligned}$$

Y como $c_3 = -a_{11} \cdot M_{23} - a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22}$, entonces

$$c_3^* = -(a_{11} - d_1) \cdot M_{23}^* - a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot (a_{33} - d_3) + a_{13} \cdot a_{31} \cdot (a_{22} - d_2).$$

Y podemos expresar c_3^* como sigue,

$$c_3^* = c_3 - a_{11} \cdot d_2 \cdot d_3 + d_1 \cdot (M_{23} + \alpha_{23}) + M_{12} \cdot d_3 + M_{13} \cdot d_2 > 0.$$

Construyendo la matriz de Hurwitz,

$$H_3 = \begin{pmatrix} c_1^* & 1 & 0 \\ c_3^* & c_2^* & c_1^* \\ 0 & 0 & c_3^* \end{pmatrix}$$

observamos que $\Delta_1 = c_1^* > 0$, y $\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} c_1^* & 1 \\ c_3^* & c_2^* \end{pmatrix} = c_1^* \cdot c_2^* - c_3^*$. Así

$$\Delta_2 = (c_1 + \text{Tr}(D)) \cdot (c_2 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23}) - [c_3 - a_{11} \cdot d_2 \cdot d_3 + d_1 \cdot (M_{23} + \alpha_{23}) + M_{12} \cdot d_3 + M_{13} \cdot d_2], \text{ de donde}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (c_1 \cdot c_2 - c_3) + a_{11} \cdot a_{22} \cdot d_3 + a_{11} \cdot a_{33} \cdot d_2 + d_1 \cdot (M_{12} + M_{13}) + d_2 \cdot (M_{12} + M_{23}) \\ &+ d_3 \cdot (M_{13} + M_{23}) + d_1 \cdot (\alpha_{12} + \alpha_{13}) + (d_2 + d_3) \cdot (\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23}) - a_{11} \cdot (\alpha_{12} + \alpha_{13}) \\ &- (a_{22} + a_{33}) \cdot (\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23}) > 0 \quad \text{y} \end{aligned}$$

$\Delta_3 = c_3^* \cdot \Delta_2 > 0$. Entonces concluimos, por el criterio de Routh-Hurwitz, que $A - D$ es estable.

La otra implicación de la demostración se obtiene directamente del Corolario 2.2 y la Observación 2.1. ■

Corolario 2.7 *A es excitable si, y sólo si, se cumplen las condiciones:*

1. $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} < 0$
2. $\det(A) < 0$
3. $c_1 \cdot c_2 - c_3 > 0$ y
4. $a_{11} > 0$ o $a_{22} > 0$ o $a_{33} > 0$ o $M_{12} < 0$ o $M_{13} < 0$ o $M_{23} < 0$

Demostración.- Es inmediata a partir del Lema 2.6. ■

Observación 2.4 En este caso, aún conociendo los signos de la matriz A , debemos pedir condiciones extras sobre sus coeficientes para que A sea excitable. Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} + & + & + \\ - & 0 & - \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Entonces deben ocurrir las siguientes desigualdades para que la matriz A sea excitable:

- i) $a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} < a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$
- ii) $-a_{11}^2 \cdot a_{33} + a_{33} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{31} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} > a_{33}^2 \cdot a_{11} - a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{31} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$

Por esta razón hemos desarrollado el siguiente algoritmo, el cual nos permitirá decidir si una matriz de orden 3 es excitable o no. La escritura del algoritmo la hemos realizado en el lenguaje de Matlab.

Programa para Determinar la Excitabilidad de una Matriz de Orden 3

```
clear all
clc
A = zeros(3,3);
input('Introduzca la matriz termino a termino');
A(1,1) = input('Término a(1,1)=');
A(1,2) = input('Término a(1,2)=');
A(1,3) = input('Término a(1,3)=');
A(2,1) = input('Término a(2,1)=');
A(2,2) = input('Término a(2,2)=');
A(2,3) = input('Término a(2,3)=');
A(3,1) = input('Término a(3,1)=');
A(3,2) = input('Término a(3,2)=');
A(3,3) = input('Término a(3,3)=');
disp(A);
```

Comienzo de las condiciones

```
B1 = A(2,2) * A(3,3) - A(3,2) * A(2,3);
B2 = A(1,1) * A(3,3) - A(3,1) * A(1,3);
B3 = A(1,1) * A(2,2) - A(2,1) * A(1,2);
C1 = -(A(1,1) + A(2,2) + A(3,3));
C2 = B1 + B2 + B3;
C3 = -det(A);
C4 = (C1 * C2) - C3;
if(C1 <= 0 || C3 <= 0 || C4 <= 0);
    disp('La matriz A no es excitable, por que no es estable');
    break ;
else
    disp('la matriz A es estable');
```

```

if(A(1,1) > 0||A(2,2) > 0||A(3,3) > 0);
    disp('La matriz A es excitable, por que al menos uno
    de los elementos de la diagonal es mayor a cero');
    break;
end
if(B1 < 0||B2 < 0||B3 < 0);
    disp('La matriz A es excitable, por que alguno de los
    menores principales de orden dos es menor que cero');
    break;
end
disp('la matriz A no es excitable');
end

```

Al igual que en la observación 2.3, el corolario 2.7 nos permitirá obtener una caracterización para conocer todos los posibles casos en los que, puede ocurrir la inestabilidad de Turing, para un sistema tridimensional de reacción-difusión.

§ 2.2 Sistemas de Reacción-Difusión, Inestabilidad de Turing y Bifurcación Local

Esta sección está motivada por el artículo, Pattern Formation in a Reaction-Diffusion Ratio-Dependent Predator-Prey Model, publicado en el año 2004 por Marcos Lizana y Julio Marín, [11]. Aquí introduciremos las definiciones de inestabilidad y bifurcación de Turing, además notaremos que, en sistemas bidimensionales de reacción-difusión, la inestabilidad de Turing es una condición que se requiere para la aparición de patrones que bifurquen de un equilibrio homogéneo del sistema.

Consideremos el siguiente sistema Parabólico con condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = D\Delta w(t, x) + f(w(t, x)), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \eta}(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \\ w(0, x) = \phi(x) \in L_2(\bar{\Omega}). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Donde $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_k]$ es una matriz diagonal definida positiva de tamaño $k \times k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, conexo y acotado con frontera suave, $w(t, x) \in \mathbb{R}^k$ y $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un campo vectorial suave.

Vamos a suponer que $w \equiv w_0$, es un equilibrio no trivial y estable para el sistema cinético asociado a (2.9), es decir, $f(w_0) = 0$ y

$$df(w_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(w_0)}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1(w_0)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_1(w_0)}{\partial w_k} \\ \frac{\partial f_2(w_0)}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2(w_0)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_2(w_0)}{\partial w_k} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(w_0)}{\partial w_1} & \frac{\partial f_k(w_0)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_k(w_0)}{\partial w_k} \end{pmatrix} \text{ es una matriz estable.}$$

Claramente w_0 es un equilibrio, más aún, w_0 es una solución estacionaria homogénea, para el sistema (2.9). Entonces nos preguntamos:

- i) ¿Será que la solución w_0 seguirá siendo estable para el sistema (2.9)?
- ii) De no ser así, ¿Cuales son las propiedades que debe tener el campo vectorial f para poder desestabilizarlo?. ¿Entrará en juego la difusión (D)?.
- iii) ¿Aparecerán soluciones estacionarias no homogéneas del sistema (2.9)?. ¿Podrían estas soluciones bifurcar localmente de w_0 cuando variamos la difusión?.

Habiendo planteado el problema, nuestra tarea ahora es dar respuesta a cada una de estas interrogantes. Para ello vamos a introducir la siguiente subsección.

§ 2.2.1 Inestabilidad de Turing y Bifurcación Local

Las interrogantes planteadas anteriormente, generan una motivación para introducir la definición de Inestabilidad y Bifurcación de Turing para sistemas de reacción-difusión.

Comenzaremos entonces, linealizando el sistema (2.9) alrededor de $w = w_0$, para ello, establecemos $w(t, x) = w_0 + z(t, x)$ y sustituimos en (2.9) para obtener

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t, x) = D\Delta z(t, x) + f(w_0 + z(t, x)), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ z(0, x) = \bar{\phi}(x) = \phi(x) - w_0 \in L_2(\bar{\Omega}), \end{cases} \quad (2.10)$$

luego, desarrollamos el polinomio de Taylor de $f(z)$ alrededor del cero y nos quedamos sólo con los términos lineales, obteniendo

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t, x) = D\Delta z(t, x) + df(w_0)z(t, x), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ z(0, x) = \bar{\phi}(x) = \phi(x) - w_0 \in L_2(\bar{\Omega}). \end{cases} \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) aproxima el comportamiento del sistema (2.9) mientras $z(t, x) = w(t, x) - w_0$ sea pequeño, es decir, si

$$\|\bar{\phi}\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \|z(0, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \|w(0, \cdot) - w_0\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \|\phi - w_0\|_{L_2(\bar{\Omega})} \ll 1.$$

Proposición 2.8 *la solución w_0 del sistema (2.9) es asintóticamente estable, si, y sólo si, la solución trivial $z \equiv 0$ del sistema (2.11) es asintóticamente estable.*

Demostración.-Es inmediata a partir de la definición de Estabilidad Asintótica.

Proposición 2.9 *La solución trivial $z \equiv 0$ del sistema (2.11) es asintóticamente estable si, y sólo si, toda solución de (2.11) tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.*

Demostración.- Es inmediata a partir de la definición de estabilidad asintótica y el hecho que $\|\bar{\phi}\|_{L_2(\bar{\Omega})} \ll 1$.

Motivado por la resolución de la ecuación de Laplace caso unidimensional, ver Capítulo 1, pag. 10 de este trabajo, queremos expresar las soluciones en $L_2(\bar{\Omega})$ del sistema (2.11) de la siguiente manera:

$$z(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(t)\phi_j(x), \quad \text{donde } s_j(t) \in \mathbb{R}^k.$$

Para ello, denotemos por $\phi_j(x)$ la j -ésima autofunción del operador $-\Delta$ sobre $\bar{\Omega}$ sin flujo en la frontera. Es decir,

$$\begin{cases} \Delta\phi_j(x) + \lambda_j\phi_j(x) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial\phi_j}{\partial\eta}(x) = \langle \eta, \nabla\phi_j(x) \rangle = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

para escalares λ_j que satisfacen $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

Sabemos que el operador diferencial $-\Delta$, con condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneo es autoadjunto en $L_2(\bar{\Omega})$, así dadas $\varphi, \psi \in \text{Dom}(-\Delta) \subset L_2(\bar{\Omega})$ tenemos que

$$\int_{\bar{\Omega}} -\Delta\psi \cdot \varphi dx = \int_{\bar{\Omega}} -\Delta\varphi \cdot \psi dx \quad \text{donde } dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

en particular para cada j ,

$$\int_{\bar{\Omega}} -\Delta\phi_j \cdot \phi_j dx = \int_{\bar{\Omega}} -\Delta\phi_j \cdot \phi_j dx \Leftrightarrow \lambda_j = \frac{\int_{\bar{\Omega}} -\Delta\phi_j \cdot \phi_j dx}{\int_{\bar{\Omega}} \phi_j^2 dx}$$

y por identidades de Green obtenemos

$$\lambda_j = \frac{\int_{\bar{\Omega}} |\Delta\phi_j|^2 dx}{\int_{\bar{\Omega}} \phi_j^2 dx}$$

Así, los λ_j son no negativos. También podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\|\phi_j\|_{L_2(\bar{\Omega})} = 1.$$

Más aún, sabemos que el conjunto formado por las autofunciones (ϕ_j) del operador $-\Delta$ forman una base ortonormal de $L_2(\bar{\Omega})$. Así, cualquier función $u(x) \in L_2(\bar{\Omega})$ se puede expresar como una serie de Fourier

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi_j(x).$$

Y la solución del sistema (2.11) viene dada de la siguiente manera: ver Grindrod [6] pág. 26-27.

$$z(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(t) \phi_j(x), \quad \text{donde } s_j(t) \in \mathbb{R}^k \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.13) en (2.11) y igualando los coeficientes de cada ϕ_j , obtenemos:

$$\frac{ds_j(t)}{dt} = [df(w_0) - \lambda_j D] \cdot s_j(t) = B_j s_j(t), \quad \text{donde } B_j = df(w_0) - \lambda_j D. \quad (2.14)$$

Proposición 2.10 *la solución trivial $z \equiv 0$ del sistema (2.11) es asintóticamente estable si, y sólo si, cada $s_j(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.*

Demostración.- Asumamos que $z \equiv 0$ es asintóticamente estable y sea $j \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\rho > 0$ tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t, \varphi)\|_{L_2(\bar{\Omega})} = 0 \quad \text{si, } \varphi \in \mathbb{B}_\rho(0) \quad (2.15)$$

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t, x) = D\Delta z(t, x) + df(w_0)z(t, x), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \\ z(0, x) = \alpha\phi_j(x) \in L_2(\bar{\Omega}). \end{cases} \quad (2.16)$$

Donde $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \rho$. Entonces la solución del sistema (2.16) viene dada por $z(t, x) = \alpha s_j(t)\phi_j(x)$, así de (2.15)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t, x, \alpha\phi_j)\|_{L_2(\bar{\Omega})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|s_j(t)\alpha\phi_j(x)\|_{L_2(\bar{\Omega})} = 0 \Leftrightarrow \alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \|s_j(t)\|_{\mathbb{R}^k} = 0.$$

Asumamos ahora que cada $s_j(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Razonemos por reducción al absurdo. Si $z \equiv 0$ no es asintóticamente estable, entonces debe existir un $j \in \mathbb{N}$ tal que $s_j(t) \not\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ lo cual es una contradicción. ■

Observación 2.5 De la teoría de ecuaciones diferenciales Ordinarias sabemos que cada

$s_j(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, si, y sólo si, cada B_j es una matriz estable.

Por lo tanto, si cualquiera de las matrices B_j tiene un autovalor λ_j con parte real positiva, entonces $\|s_j\|$ puede aumentar exponencialmente y en consecuencia también lo haría z . Claramente en este caso $z = 0$ es inestable, para perturbaciones arbitrarias que no son ortogonales a ϕ_j . Esto nos permite obtener la siguiente definición.

Definición 2.6 (Inestabilidad de Turing) Diremos que el equilibrio w_0 del sistema (2.9) es Turing Inestable, si este es un equilibrio asintóticamente estable del sistema cinético asociado a (2.9) pero es inestable con respecto al sistema (2.9).

Como lo mencionamos anteriormente, la Observación 2.3 y el Corolario 2.7 nos provee un método para saber cuando un sistema bidimensional o tridimensional de reacción-difusión, como en (2.9), presenta la inestabilidad de Turing, en función de la excitabilidad de la matriz $df(w_0)$. Más aún, para que pueda ocurrir la inestabilidad de Turing en sistemas bidimensionales, hay sólo cuatro posibles arreglos de signos para la matriz $df(w_0)$.

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora una matriz

$$A = df(w_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y asumamos que A es una matriz excitable, es decir,

- (1) $Tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0$;
- (2) $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} > 0$
- (3) $a_{11} > 0$ o $a_{22} > 0$

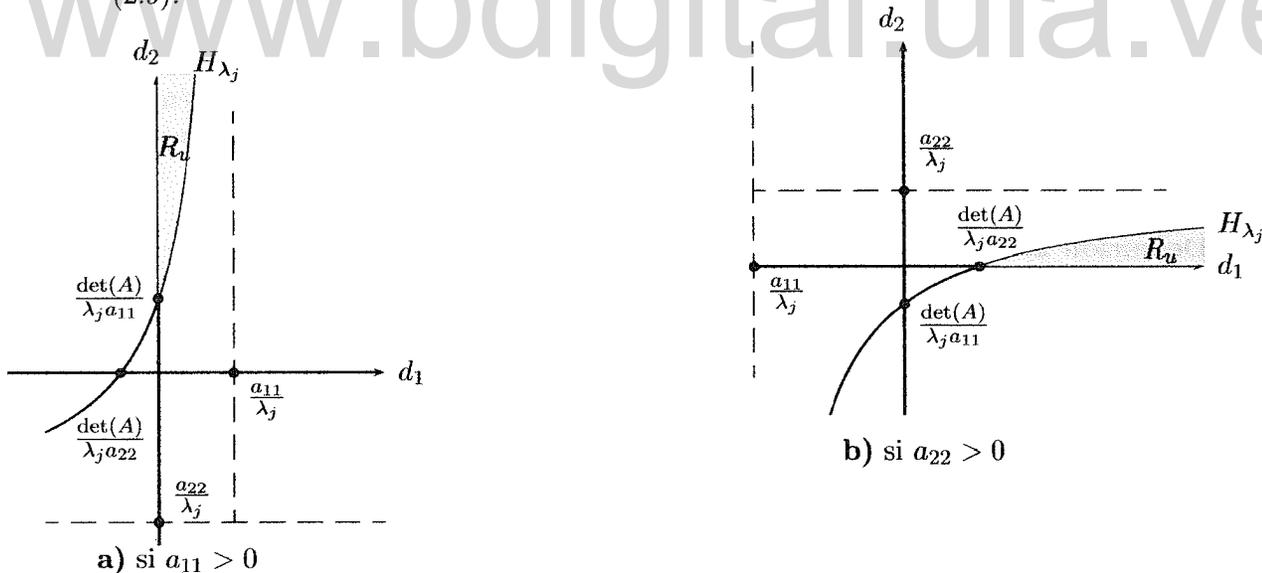
Así, el polinomio característico de la matriz B_j dada en (2.14) es de la forma

$$\begin{aligned} P_{B_j}(\rho) &= \rho^2 - Tr(B_j)\rho + \det(B_j) \\ &= \rho^2 - [Tr(A) - \lambda_j Tr(D)]\rho + \det(B_j). \end{aligned}$$

Y por el criterio de Routh-Hurwitz $P_{B_j}(\rho)$ tiene un autovalor con parte real no negativa si

$$\det(B_j) = \det(A) - a_{11}\lambda_j d_2 - a_{22}\lambda_j d_1 + \lambda_j^2 d_1 d_2 \leq 0.$$

Entonces realizamos un gráfico de la región R_u donde podemos tomar los términos difusivos (d_1, d_2) de tal manera que, el equilibrio w_0 sea inestable con respecto al sistema (2.9).



Donde $H_{\lambda_j} = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : \det(A) - a_{11}\lambda_j d_2 - a_{22}\lambda_j d_1 + \lambda_j^2 d_1 d_2 = 0\}$ y $R_u = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : \det(A) - a_{11}\lambda_j d_2 - a_{22}\lambda_j d_1 + \lambda_j^2 d_1 d_2 \leq 0, d_1 > 0, d_2 > 0\}$

Proposición 2.11 *En este caso los autovalores λ_{1j} y λ_{2j} de la matriz B_j pueden ser:*

- i) $\lambda_{1j} > 0$ y $\lambda_{2j} < 0$, si $(d_1, d_2) \in R_u$
- ii) $\lambda_{1j} = 0$ y $\lambda_{2j} < 0$, si $(d_1, d_2) \in H_{\lambda_j}$
- iii) $\lambda_{1j} < 0$ y $\lambda_{2j} < 0$, si (d_1, d_2) no pertenece a R_u ni a H_{λ_j}

Demostración.-

Las raíces de $P_{B_j}(\rho)$ vienen dadas por:

$$\lambda_{ij} = \frac{Tr(B_j) \pm \sqrt{[Tr(B_j)]^2 - 4 \cdot \det(B_j)}}{2}.$$

Luego si $(d_1, d_2) \in R_u$, entonces $\det(B_j) < 0$ y por tanto

$$\lambda_{1j} = \frac{Tr(B_j) + \sqrt{[Tr(B_j)]^2 - 4 \cdot \det(B_j)}}{2} > 0 \text{ y } \lambda_{2j} = \frac{Tr(B_j) - \sqrt{[Tr(B_j)]^2 - 4 \cdot \det(B_j)}}{2} < 0.$$

Si $(d_1, d_2) \in H_{\lambda_j}$, entonces $\det(B_j) = 0$, así

$$\lambda_{1j} = 0 \text{ y } \lambda_{2j} = Tr(B_j) < 0.$$

Por último si (d_1, d_2) no pertenece a R_u ni a H_{λ_j} , entonces $\det(B_j) > 0$.

De los dos casos anteriores se deduce que dichas raíces deben ser reales, es decir, $[Tr(B_j)]^2 - 4 \cdot \det(B_j) > 0$. Además,

$$\lambda_{1j} = \frac{Tr(B_j) + \sqrt{[Tr(B_j)]^2 - 4 \cdot \det(B_j)}}{2} < 0 \text{ y } \lambda_{2j} = \frac{Tr(B_j) - \sqrt{[Tr(B_j)]^2 - 4 \cdot \det(B_j)}}{2} < 0.$$

■

§ 2.2.2 Formación de Patrones

Antes de hablar acerca de Patrones, vamos a introducir las definiciones necesarias para esta subsección. Comenzaremos con la definición de un punto de bifurcación para un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo parabólico.

Consideremos el siguiente sistema parabólico

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t}(t, x) = F(d, W(t, x)), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \delta \frac{\partial W}{\partial \eta}(x, t) + \alpha(x)W(x, t) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Donde F es un operador diferencial $F : \mathbb{R}^n \times B_1 \rightarrow B_2$, con B_1 y B_2 espacios de Banach.

Definición 2.7 Diremos que $d_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de bifurcación para la familia de campos vectoriales $F(d, W)$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists d^*, d^{**} \in B(d_0, \epsilon)$ tal que los flujos del sistema (2.17) asociados a d^* y d^{**} , digamos T^* y T^{**} respectivamente, no son topológicamente conjugados, es decir, no existe un homeomorfismo H de modo que el siguiente diagrama resulte conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{T^*} & B_2 \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ B_1 & \xrightarrow{T^{**}} & B_2 \end{array}$$

Consideremos ahora el siguiente sistema de reacción-difusión sujeto a condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t}(t, x) = D\Delta W(t, x) + f(W(t, x)), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \eta}(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \\ W(0, x) = \phi(x) \in [C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^k), \|\cdot\|_\infty]. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Donde $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_k]$ es una matriz diagonal definida positiva de tamaño $k \times k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, conexo y acotado con frontera suave, $W(t, x) \in \mathbb{R}_+^k$ y $f : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un campo vectorial suave tal que $f_i(W) \geq 0$, siempre que $W \in \mathbb{R}_+^k$ y $W_i = 0$. Sea $W \equiv W_0$ un equilibrio homogéneo para el sistema (2.18), es decir, $f(W_0) = 0$.

En esta sección estudiaremos como, por cuenta de la difusión, el fenómeno de inestabilidad da lugar a soluciones estacionarias no homogéneas de (2.18) que bifurcan de la solución estacionaria homogénea W_0 .

Definición 2.8 Diremos que en $d_0 \in (0, +\infty)$ ocurre una bifurcación de Turing, si la solución W_0 cambia su estabilidad en d_0 y en alguna vecindad de d_0 existe una familia uni-paramétrica de soluciones estacionarias del sistema (2.18).

Ahora nos concentraremos en dar condiciones suficientes para que ocurra una bifurcación de Turing en sistemas bidimensionales de Reacción-Difusión considerando como parámetro de bifurcación a d_1 y utilizando el Teorema 1.25, el cual no es más que un teorema de Bifurcación de un Autovalor Simple para Operadores en Espacios de Banach. Dicho teorema se encuentra demostrado en el primer Capítulo pág. 40 de este trabajo.

Para nuestro propósito vamos a asumir que el sistema (2.18) es bidimensional, que W_0 es una solución estacionaria homogénea no trivial de (2.18) y que la matriz A es el jacobiano de f en W_0 , es decir,

$$A = df(W_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Definamos los espacios de Banach X y Y como sigue:

$$X := \left\{ U \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) : \frac{\partial U(t, x)}{\partial \eta} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \right\}$$

con la norma del supremo incluyendo la primera y la segunda derivada, es decir,

$$\| U \|_X = \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \| U^{(i)}(x) \|_{\infty}$$

y $Y := C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ dotado con la norma usual del supremo. Sin embargo, cuando escogamos el subespacio Z , debemos usar la ortogonalidad inducida por el producto escalar

$$\langle V, U \rangle = \int_{\Omega} (V_1(x)U_1(x) + V_2(x)U_2(x)) dx$$

donde $V = (V_1, V_2)$ y $U = (U_1, U_2)$.

El siguiente teorema está motivado por el Teorema 2, pag 120 del artículo publicado por Marcos Lizana y Julio Marín [11] en 2004.

Teorema 2.12 Sean v_{1k} y v_{2k} los autovectores de $B_k = A - \lambda_k D$ correspondientes a los autovalores λ_{1k} y λ_{2k} respectivamente. Asuma que:

(1) La matriz A es excitable, es decir, $\text{Tr}(A) < 0$, $\det(A) > 0$ y $a_{22} > 0$.

(2) $v_{1k} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ y v_{2k} no es paralelo a $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $0 < d_2 < \frac{a_{22}}{\lambda_k}$.

Entonces existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que en

$$d_1^* = \frac{a_{11}\lambda_k d_2 - \det(A)}{\lambda_k(\lambda_k d_2 - a_{22})}$$

ocurre una bifurcación de Turing para la solución estacionaria homogénea W_0 del sistema bidimensional (2.18)

Demostración.-

Tomando $W = U + W_0$, y sustituyendo en (2.18), obtenemos

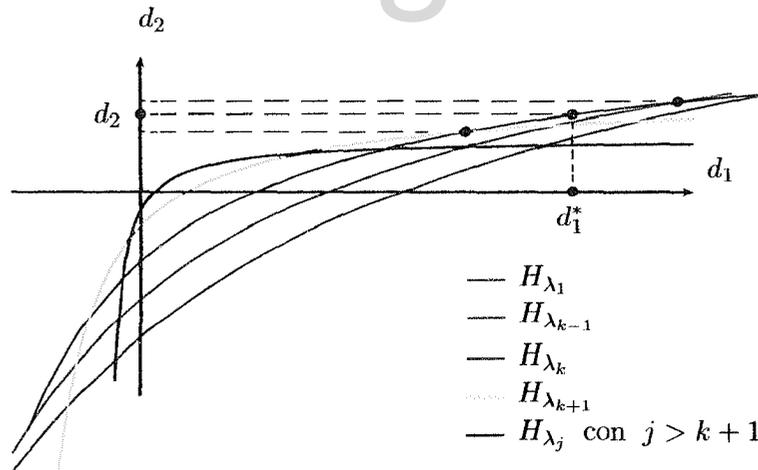
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = D\Delta U + AU + G(U), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \eta}(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \\ U(0, x) = \bar{\phi}(x) = \phi(x) - W_0 \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2). \end{cases} \quad (2.19)$$

donde $G(U) = f(W_0 + U) - AU$.

Para cualquier solución estacionaria no homogénea W del sistema (2.18), $U = W - W_0$ satisface la siguiente ecuación elíptica

$$\begin{cases} D\Delta U + AU + G(U) = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial \eta}(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.20)$$

Como $0 < d_2 < \frac{a_{22}}{\lambda_k}$, entonces existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que (d_1^*, d_2) pertenece a la hipérbola H_{λ_k} . Como se muestra en la siguiente figura.



Donde $H_{\lambda_r} = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : \det(A) - a_{11}\lambda_r d_2 - a_{22}\lambda_r d_1 + \lambda_r^2 d_1 d_2 = 0\}$, con $r = 1, 2, \dots, k-1, k, k+1, \dots$

Más aún, podemos fijar $d_2 \in (0, \frac{a_{22}}{\lambda_k})$ tal que $(d_1^*, d_2) \in H_{\lambda_k}$, el $\det(B_j) > 0$, $\forall j \neq k$ y $\det(B_k) = 0$. Por lo tanto, para $i = 1, 2$ y $j = 0, 1, 2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots$ todos los

autovalores λ_{ij} de B_j tienen parte real negativa. De la Proposición 2.11, para $j = k$, un autovalor, digamos λ_{1k} , es cero y el otro $\lambda_{2k} < 0$.

Tomando en cuenta esta observación y (2.20), definimos el operador F en espacios de Banach mencionado en el Teorema 1.25 como sigue:

$$F : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y$$

$$F(d_1, U) = D\Delta U + AU + G(U).$$

Entonces el operador lineal L_0 viene dado por:

$$L_0 : X \rightarrow Y$$

$$L_0 = D_2 F(d_1^*, 0) = \begin{pmatrix} d_1^* & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \Delta + A,$$

donde d_1 es el coeficiente difusivo de la presa.

Determinemos ahora el espectro del operador L_0 . Sea ϕ_j la j -ésima autofunción asociada al autovalor λ_j del operador laplaciano sujeto a condiciones de frontera del tipo Neumann homogéneo, en el espacio $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ entonces

$$\begin{cases} \Delta \phi_j(x) + \lambda_j \phi_j(x) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta}(x) = \eta \cdot \nabla \phi_j(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.21)$$

para escalares λ_j que satisfacen $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ y sean λ_{ij} los autovalores de B_j con v_{ij} su respectivo autovector, así

$$\lambda_{ij} v_{ij} = B_j v_{ij} \Leftrightarrow \lambda_{ij} v_{ij} \phi_j = B_j v_{ij} \phi_j = L_0 v_{ij} \phi_j.$$

Por lo tanto, el espectro del operador lineal L_0 viene dado por los autovalores λ_{ij} de las matrices

$$B_j = A - \lambda_j \begin{pmatrix} d_1^* & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

y $\psi_{ij} = v_{ij} \phi_j$ son las respectivas autofunciones asociadas al autovalor λ_{ij} de L_0 , entonces

$$\begin{cases} L_0 \psi_{ij}(x) = \lambda_{ij} \psi_{ij}(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial \psi_{ij}(x)}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

donde $i = 1, 2$ y $j = 0, 1, 2, \dots$

Luego la autofunción del operador lineal L_0 correspondiente a $\lambda_{1k} = 0$ viene dada por $\psi_{1k} = v_{1k}\phi_k$, la cual es una solución estacionaria no homogénea del sistema bidimensional (2.18) linealizado alrededor de W_0 , con d_1^* como coeficiente difusivo de la presa, es decir,

$$\begin{pmatrix} d_1^* & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \Delta \psi_{1k}(x) + A\psi_{1k}(x) = 0, \quad \text{si } x \in \Omega \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi_{1k}}{\partial \eta}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

Por lo tanto, el subespacio $N(L_0)$ es uni-dimensional, generado por ψ_{1k} .

A causa de la ortogonalidad de las ϕ_j 's para $j = 0, 1, 2, \dots$ el $R(L_0)$ viene dado por la relación

$R(L_0) = \{Z \in C(\Omega, \mathbb{R}^2) : \text{La expansión de Fourier de } Z \text{ no contiene el término } \phi_k(x)\} \cup \{v_{2k}\phi_k\}$ y tiene codimension 1.

En consecuencia se cumplen las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 1.25. Sólo falta verificar la condición (iv). Sea

$$L_1 = D_1 D_2 F(d_1^*, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta, \quad \text{entonces,}$$

$$\begin{aligned} L_1 \psi_{1k} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta v_{1k} \phi_k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Delta \phi_k(x) \\ &= -\lambda_k \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \phi_k(x), \end{aligned}$$

con $\xi_1 \neq 0$, y $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no es paralelo a v_{2k} . Por lo tanto $L_1 \psi_{1k} \notin R(L_0)$ y la condición (iv) del Teorema 1.25 se cumple. En consecuencia, tomando $Z = R(L_0)$ concluimos que existe $\gamma > 0$ y una función continuamente diferenciable $(d_1, \phi) : (-\gamma, \gamma) \rightarrow \mathbb{R}^+ \times Z$ tal que $d_1(0) = d_1^*$, $\phi(0) = 0$ y

$$F(d_1(s), s \cdot [\psi_{1k} + \phi(s)]) = 0.$$

De donde

$$U(x) = s \cdot \psi_{1k}(x) + s \cdot \phi(s)(x) = s \cdot v_{1k}\phi_k(x) + s \cdot \phi(s)(x)$$

es una solución de la ecuación elíptica (2.20) con $s \in (-\gamma, \gamma)$. Finalmente, tomando en cuenta que $U = W - W_0$, obtenemos que

$$W(x) = W_0 + s \cdot v_{1k}\phi_k(x) + s \cdot \phi(s)(x)$$

son soluciones estacionarias no homogéneas del sistema (2.18) con $s \in (-\gamma, \gamma)$.

Así, para $d_1 = d_1^*$ ocurre una bifurcación de Turing. ■

Observación 2.6 En el artículo publicado los profesores Marcos Lizana y Julio Marín. [11] p.p. 210, se prueba el teorema anterior cambiando la condición $a_{22} > 0$ por $a_{11} > 0$ y se considera como parámetro de bifurcación a d_2 . Así, en todos los casos posibles, tenemos condiciones suficientes para que en sistemas bidimensionales de reacción-difusión ocurra una bifurcación de Turing.

En la siguiente subsección vamos a considerar algunos sistemas depredador-presa con reacción-difusión y estudiaremos la posibilidad de que se presente la inestabilidad de Turing.

§ 2.2.3 Sistemas Depredador-Presa con Reacción-Difusión

Ahora vamos a considerar tres sistemas depredador-presa con reacción-difusión y condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneo, mortalidad $M(v) > 0$ y respuesta funcional $f(u, v)$ de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial u}{\partial x^2} + Au(1 - u/K) - af(u, v), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial v}{\partial x^2} - M(v)v + bf(u, v), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0, x) = \varphi_1(x) \geq 0; \quad v(0, x) = \varphi_2(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, conexo y acotado con frontera suave, $u(t, x)$ y $v(t, x)$ representa la densidad de la población de la presa y el depredador respectivamente, en $x \in \Omega$ y en tiempo t . El parámetro A representa específicamente la tasa de crecimiento de la presa sin depredación y sin limitación del entorno; en ausencia de depredadores, la población de la presa crece logísticamente con capacidad de carga $K > 0$. $d_i > 0$ para $i = 1, 2$ son los coeficientes difusivos de la presa y el depredador respectivamente. a y b son coeficientes de saciación o tasas de conversión. Estudiaremos la posibilidad de que aparezca la inestabilidad de Turing en dicho sistema, de acuerdo a cierta configuración de parámetros.

- 1) Sistema depredador-presa con mortalidad constante $M(v) = C$ y respuesta funcional del tipo Holling II

$$f(u, v) = \frac{uv}{1 + Eu}.$$

En este caso el sistema (2.23) toma la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_1(u, v), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F_2(u, v), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0, x) = \varphi_1(x) \geq 0; \quad v(0, x) = \varphi_2(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

donde,

$$F_1(u, v) = Au(1 - u/K) - a \frac{uv}{1 + Eu} \quad \text{y} \quad F_2(u, v) = -Cv + b \frac{uv}{1 + Eu},$$

con todas las constantes positivas. Para determinar los puntos de equilibrio no triviales $P_0 = (u_0, v_0)$ del sistema cinético asociado a (2.24), notamos que el sistema sin difusión se puede reescribir de la siguiente manera

$$u' = \frac{a}{b} h(u)[f(u) - v], \quad v' = v[h(u) - C] \quad (2.25)$$

donde,

$$h(u) = b \frac{u}{1 + Eu} \quad \text{y} \quad f(u) = \frac{A}{aK} (K - u)(1 + Eu).$$

Luego de (2.25) y tomando en cuenta que $b - CE \neq 0$, obtenemos:

$$h(u) = C \Leftrightarrow u = \frac{C}{b - CE} \quad \text{y} \quad f(u) = v \Leftrightarrow v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE - 1)u + K].$$

Así el conjunto de puntos críticos no triviales viene dado por la intersección de las curvas

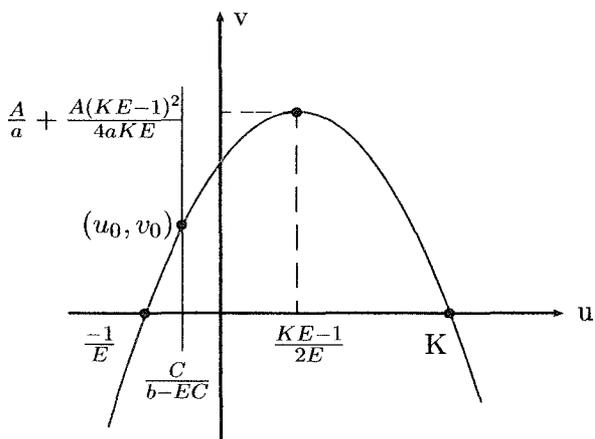
$$u = \frac{C}{b - CE} \quad \text{y} \quad v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE - 1)u + K]. \quad (2.26)$$

Entonces de (2.26), obtenemos los siguientes casos:

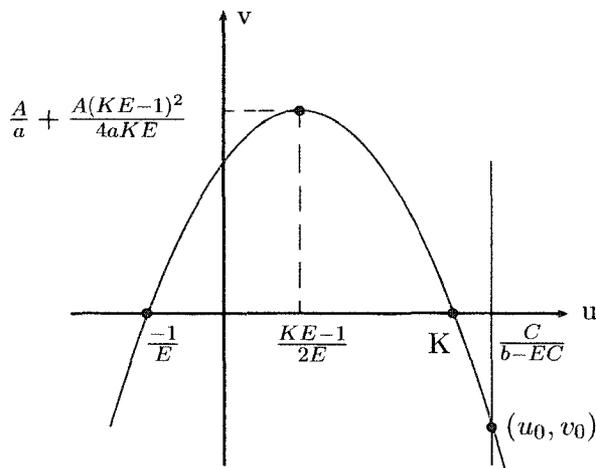
Caso I) Si

$$\frac{C}{b-CE} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{C}{b-CE} > K,$$

entonces obtenemos exactamente un punto de equilibrio no trivial $P_0 = (u_0, v_0)$. Como se muestra en las siguientes figuras.

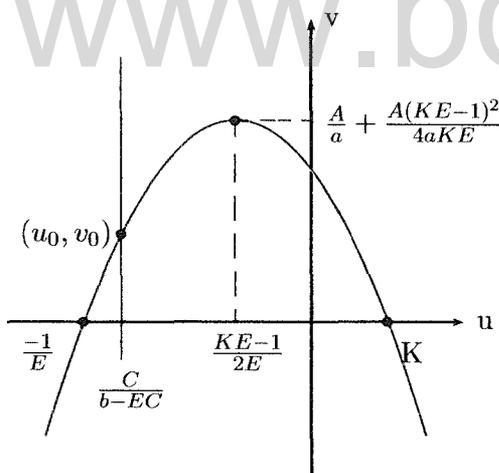


a) Si $\frac{C}{b-EC} < 0$ y $\frac{KE-1}{2E} > 0$

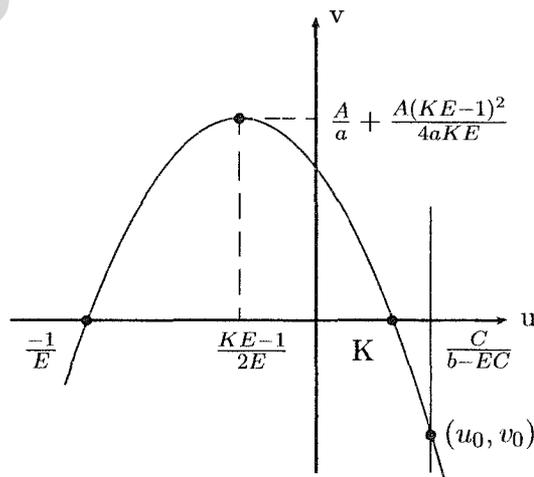


b) Si $\frac{C}{b-EC} > K$ y $\frac{KE-1}{2E} > 0$

www.bdigital.ula.ve



c) Si $\frac{C}{b-EC} < 0$ y $\frac{KE-1}{2E} < 0$



d) Si $\frac{C}{b-EC} > K$ y $\frac{KE-1}{2E} < 0$

donde, $u = \frac{C}{b-CE}$ y $v = \frac{A}{aK}[-Eu^2 + (KE-1)u + K]$

Sin embargo, desde un punto de vista biológico el **Caso I)** es irrelevante. Por ello, nos vamos a restringir a estudiar el siguiente caso.

Caso II) Si

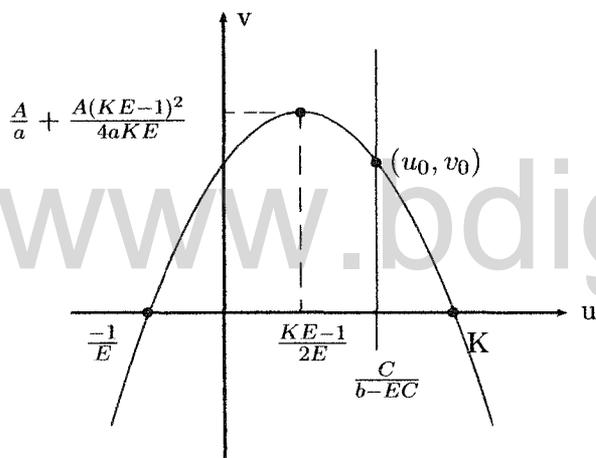
$$0 < \frac{C}{b-CE} < K,$$

entonces existe exactamente un equilibrio no trivial y no hay posibilidades de que ocurra la inestabilidad de Turing.

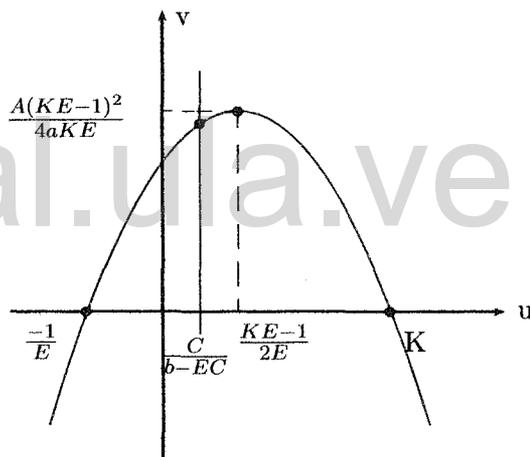
En efecto, observe que el punto de equilibrio viene dado por:

$$P_0 = (u_0, v_0) = \left(\frac{C}{b-CE}, \frac{A}{aK} \left[\left(\frac{C}{b-CE} \right) \left(-\frac{EC}{b-CE} + KE - 1 \right) + K \right] \right),$$

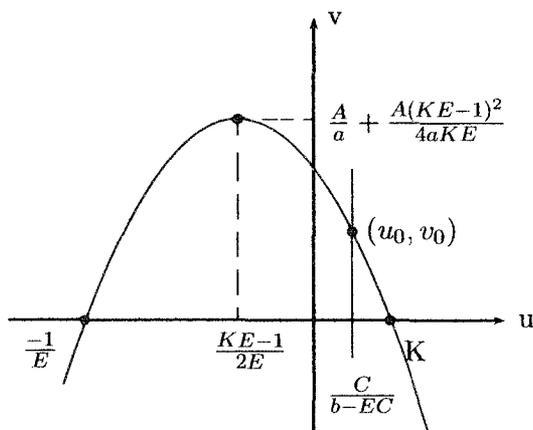
con $u_0 > 0$ y $v_0 > 0$. Como se muestra en las siguientes figuras.



a) Si $\frac{KE-1}{2E} < \frac{C}{b-EC}$ y $\frac{KE-1}{2E} > 0$



b) Si $\frac{KE-1}{2E} > \frac{C}{b-EC}$ y $\frac{KE-1}{2E} > 0$



c) Si $\frac{KE-1}{2E} < \frac{C}{b-EC}$ y $\frac{KE-1}{2E} < 0$

Donde, $u = \frac{C}{b-CE}$ y $v = \frac{A}{aK}[-Eu^2 + (KE - 1)u + K]$. Luego,
 $h(u_0) = C$; $f(u_0) = v_0$,

$$h'(u) = \frac{b}{(1 + Eu)^2} > 0, \quad \forall u > 0;$$

$$f'(u) = \frac{A}{aK}[KE - 1 - 2Eu]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) = \frac{a}{b}[h'(u)(f(u) - v) + h(u)f'(u)]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) = -\frac{a}{b}h(u) < 0, \quad \forall u > 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}(u, v) = vh'(u) > 0, \quad \forall u > 0 \text{ y } v > 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = h(u) - C$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana del campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ en el punto P_0 , viene dada de la siguiente manera

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{CA}{bK}[KE - 1 - 2E(\frac{C}{b-CE})] & - \\ + & 0 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} + & - \\ + & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si } \frac{KE - 1}{2E} > \frac{C}{b - CE}$$

o

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} - & - \\ + & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si } \frac{KE - 1}{2E} < \frac{C}{b - CE}.$$

o

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & - \\ + & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si } \frac{KE - 1}{2E} = \frac{C}{b - CE}.$$

En todos los casos la matriz $dF(P_0)$ no es excitable y por tanto no existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para el equilibrio no trivial del sistema (2.24).

- 2) Sistema depredador-presa con mortalidad constante $M(v) = C$ y respuesta funcional cociente dependiente (ratio dependent).

$$f(u, v) = \frac{uv}{u + Ev}$$

En este caso el sistema (2.23) toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_1(u, v), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F_2(u, v), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0, x) = \varphi_1(x) \geq 0; v(0, x) = \varphi_2(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.27)$$

donde,

$$F_1(u, v) = Au(1 - u/K) - a \frac{uv}{u + Ev} \quad \text{y} \quad F_2(u, v) = -Cv + b \frac{uv}{u + Ev},$$

con todas las constantes positivas. Para determinar puntos de equilibrio no triviales $P_0 = (u_0, v_0)$ del sistema cinético, el sistema sin difusión se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{cases} u' = \frac{a}{b} h(u, v)[f(u, v) - v] \\ v' = v[h(u, v) - C] \end{cases} \quad (2.28)$$

donde,

$$h(u, v) = b \frac{u}{u + Ev} \quad \text{y} \quad f(u, v) = \frac{A}{aK} (K - u)(u + Ev).$$

Luego de (2.28) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) &= \frac{a}{b} \left[\frac{\partial h}{\partial u}(u, v)(f(u, v) - v) + h(u, v) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right] \\ \frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) &= \frac{a}{b} \left[\frac{\partial h}{\partial v}(u, v)(f(u, v) - v) + h(u, v) \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}(u, v) = v \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = h(u, v) - C + v \frac{\partial h}{\partial v}(u, v)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = b \frac{Ev}{(u + Ev)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{A}{aK}[-2u - Ev + K]$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = -b \frac{uE}{(u + Ev)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \frac{AE}{aK}[K - u]$$

Así

$$h(u, v) = C \Leftrightarrow v = \frac{(b - C)u}{CE} \quad \text{y} \quad (2.29)$$

$$f(u, v) = 0 \Leftrightarrow \frac{v}{E} \left(\frac{aK - AKE}{AE} + u \right) = K - u$$

Como nuestro objetivo es encontrar puntos de equilibrio importantes desde un punto de vista biológico y no triviales, observando las ecuaciones en (2.29), podemos pedir que $b - C > 0$ y

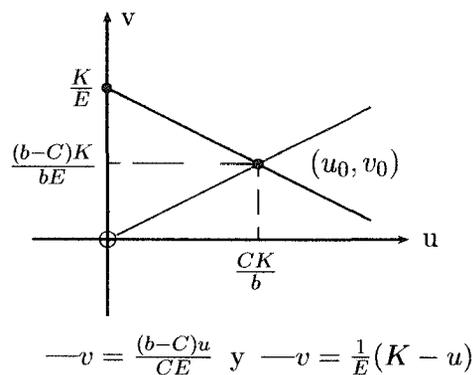
$$u \neq -w_0 = \frac{AKE - aK}{AE}$$

Así, tenemos los siguientes casos:

Caso I) Si $AE = a$, entonces el punto de equilibrio que viene dado por la intersección de las curvas $v = \frac{(b - C)u}{CE}$ y $v = \frac{1}{E}(K - u)$ es

$$P_0 = (u_0, v_0) = \left(\frac{CK}{b}, \frac{(b - C)K}{Eb} \right)$$

y no se puede presentar la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio del sistema (2.27). Como se muestra en la siguiente figura.



En efecto,

$$h(u_0, v_0) = C; \quad f(u_0, v_0) = \frac{AK}{ab}(b - C)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{b - C}{K}; \quad \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = -\frac{AC}{ab}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) = -\frac{EC}{K}; \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{b - C}{b}$$

de donde

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) = -\frac{AC^2}{b^2} < 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) = -\frac{aC^2}{b^2} < 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{(b - C)^2}{Eb} > 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) = -\frac{(b - C)C}{b} < 0.$$

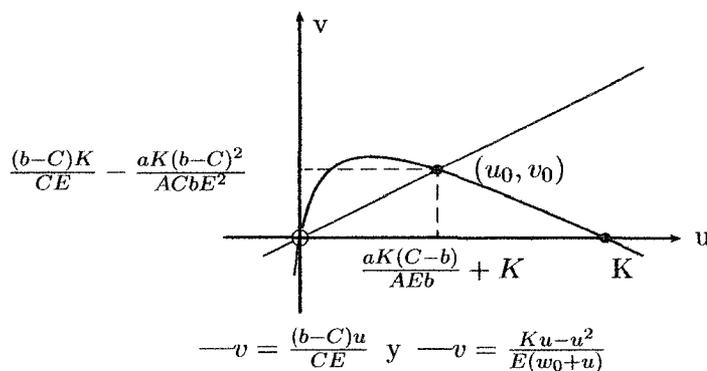
Por lo tanto la matriz jacobiana del campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ viene dada por

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$$

En este caso la matriz $dF(P_0)$ no es excitable y por tanto no existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.27).

Caso II) Si $AE < a$ y $\frac{b - C}{b} < \frac{AE}{a}$, entonces el punto de equilibrio que viene dado por la intersección de las curvas $v = \frac{(b - C)u}{CE}$ y $v = \frac{Ku - u^2}{E(w_0 + u)}$ es

$$P_0 = (u_0, v_0) = \left(\frac{aK(C - b)}{AEb} + K, \frac{(b - C)K}{CE} - \frac{(b - C)^2 aK}{AbCE^2} \right)$$



Luego

$$h(u_0, v_0) = C; \quad f(u_0, v_0) = -\frac{aK(b-C)^2}{ACbE^2} + \frac{K(b-C)}{EC}$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{AEC(b-C)}{aK(C-b) + AEKb}; \quad \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = -\frac{Ab}{aC} + \frac{b^2 - C^2}{CEb}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) = -\frac{AE^2C^2}{aK(C-b) + AEKb}; \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = 1 - \frac{C}{b}.$$

De donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{-AEb^2 + a(b^2 - C^2)}{Eb^2}; & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) &= -\frac{aC^2}{b^2} < 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{(b-C)^2}{Eb} > 0; & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) &= -\frac{(b-C)C}{b} < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz jacobiana del campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ viene dada por

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-AEb^2 + a(b^2 - C^2)}{Eb^2} & - \\ + & - \end{pmatrix}.$$

Así,

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \text{si } \frac{b^2 - C^2}{b^2} < \frac{AE}{a}.$$

o

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \text{si } \frac{b^2 - C^2}{b^2} = \frac{AE}{a}.$$

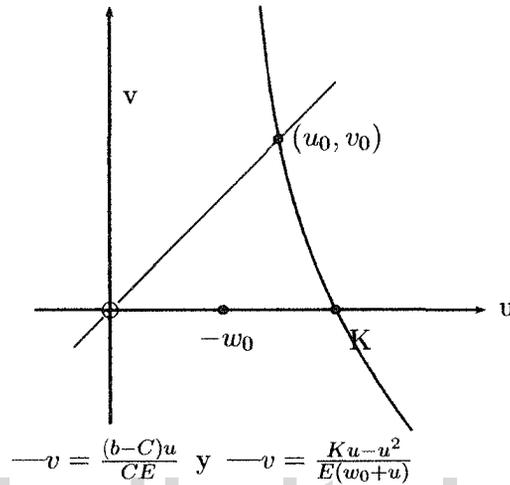
En estos casos la matriz $dF(P_0)$ no es excitable y por tanto no existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.27). o,

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \text{si } \frac{b^2 - C^2}{b^2} > \frac{AE}{a}$$

en este caso la matriz $dF(P_0)$ es excitable y por tanto existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.27). Además escogiendo adecuadamente los coeficientes difusivos puede ocurrir una bifurcación de Turing.

Caso III) Si $AE > a$, entonces el punto de equilibrio que viene dado por la intersección de las curvas $v = \frac{(b-C)u}{CE}$ y $v = \frac{Ku - u^2}{E(w_0 + u)}$ es

$$P_0 = (u_0, v_0) = \left(\frac{aK(C-b)}{AEb} + K, \frac{(b-C)K}{CE} - \frac{(b-C)^2 aK}{AbCE^2} \right)$$



Observe que

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{-AEb^2 + a(b^2 - C^2)}{Eb^2} < 0$$

por lo tanto la matriz jacobiana del campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ nos queda de la siguiente forma

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$$

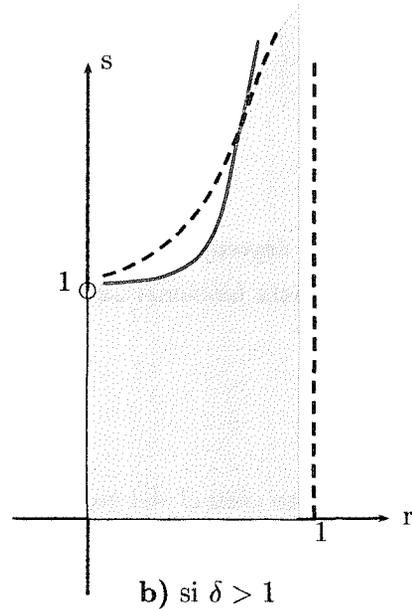
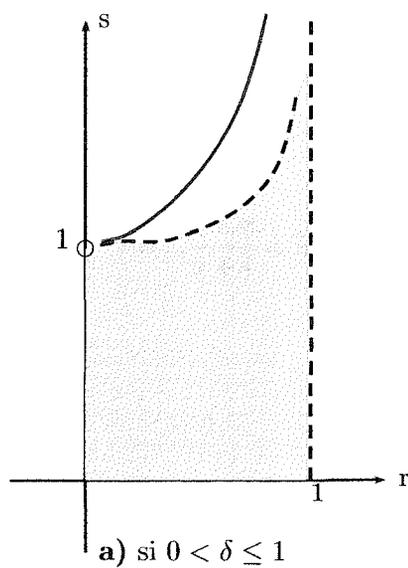
En este caso la matriz $dF(P_0)$ no es excitable y por tanto no existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.27).

Ahora nos concentraremos en determinar la región más grande de estabilidad para el equilibrio P_0 en función de los parámetros. Para ello definamos $r = \frac{C}{b}$;

$$s = \frac{a}{EA} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{b}{A}.$$

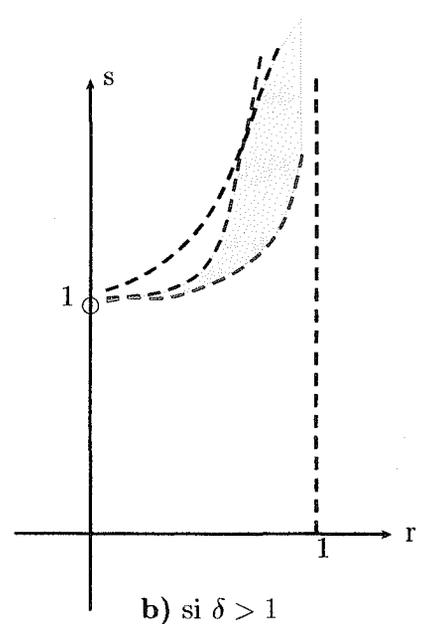
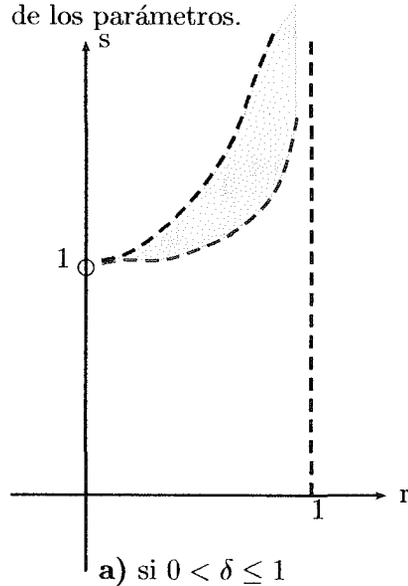
Así, P_0 es local asintóticamente estable, si y sólo si, r , s , y $\delta \in D_s$, donde

$$D_s = \left\{ (r, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, s \leq \frac{1}{1-r}, 0 < s < \frac{\delta r}{1+r} + \frac{1}{1-r^2} \text{ y } \delta > 0 \right\}.$$



Donde, $s = \frac{1}{1-r}$ y $s = \frac{1}{1-r^2} + \frac{\delta r}{1+r}$

También podemos determinar la región más grande donde puede ocurrir la inestabilidad de Turing para el equilibrio no trivial P_0 del sistema (2.27) en función de los parámetros.



donde, $-s = \frac{1}{1-r^2}$; $-s = \frac{1}{1-r^2} + \frac{\delta r}{1+r}$ y $-s = \frac{1}{1-r}$

Así, debemos considerar los parámetros $r, s, \delta \in D_s^1$, donde,

$$D_s^1 = \left\{ (r, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 1 < s < \frac{1}{1-r}, s < \frac{\delta r}{1+r} + \frac{1}{1-r^2}, s > \frac{1}{1-r^2} \text{ y } \delta > 0 \right\}.$$

- 3) Sistema depredador-presa con mortalidad variable $M(v) = \delta + \frac{\gamma - \delta}{1+v}$, $0 < \gamma < \delta$ y respuesta funcional del tipo Holling II

$$f(u, v) = \frac{uv}{1 + Eu}.$$

En este caso el sistema (2.23) toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial u}{\partial x^2} + F_1(u, v), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial v}{\partial x^2} + F_2(u, v), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(0, x) = \varphi_1(x) \geq 0; v(0, x) = \varphi_2(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.30)$$

donde,

$$F_1(u, v) = Au(1-u/K) - a \frac{uv}{1 + Eu} \quad \text{y} \quad F_2(u, v) = - \left[\delta + \frac{\gamma - \delta}{1+v} \right] v + b \frac{uv}{1 + Eu},$$

con todas las constantes positivas. Para determinar los puntos de equilibrio no triviales $P_0 = (u_0, v_0)$ del sistema cinético, el sistema sin difusión se puede reescribir de la siguiente manera

$$u' = \frac{a}{b} h(u) [f(u) - v], \quad v' = v \left[h(u) - \left(\delta + \frac{\gamma - \delta}{1+v} \right) \right] \quad (2.31)$$

donde,

$$h(u) = b \frac{u}{1 + Eu} \quad \text{y} \quad f(u) = \frac{A}{aK} (K - u)(1 + Eu).$$

Así tenemos que,

$$h(u) > 0, \quad \forall u > 0$$

$$f(u) > 0, \quad \forall 0 < u < K$$

$$h'(u) = \frac{b}{(1+Eu)^2} > 0, \quad \forall u > 0$$

$$f'(u) = \frac{A}{aK}[KE - 1 - 2Eu]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) = \frac{a}{b}[h'(u)(f(u) - v) + h(u)f'(u)]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) = -\frac{a}{b}h(u) < 0, \quad \forall u > 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}(u, v) = vh'(u) > 0, \quad \forall u > 0, v > 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = h(u) - M(v) + v \left(\frac{\gamma - \delta}{(1+v)^2} \right)$$

Como nuestro objetivo es encontrar puntos de equilibrio no triviales e importantes desde un punto de vista biológico, observando la ecuación (2.31), tenemos que el conjunto de puntos críticos esta dado por la intersección de las curvas

$$v = g(u) := M^{-1}(h(u)) = M^{-1} \left(\frac{bu}{1+Eu} \right) = -c \frac{u-d}{u-e}, \quad y$$

$$v = f(u) := \frac{A}{aK}[-Eu^2 + (KE-1)u + K] \quad \text{donde, } c = \frac{b-\gamma E}{b-\delta E}; \quad d = \frac{\gamma}{b-\gamma E} \quad y$$

$$e = \frac{\delta}{b-\delta E}. \quad \text{Además,}$$

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}h(u)f'(u) & - \\ + & - \end{pmatrix} \quad \forall u_0 > 0 \text{ y } v_0 > 0$$

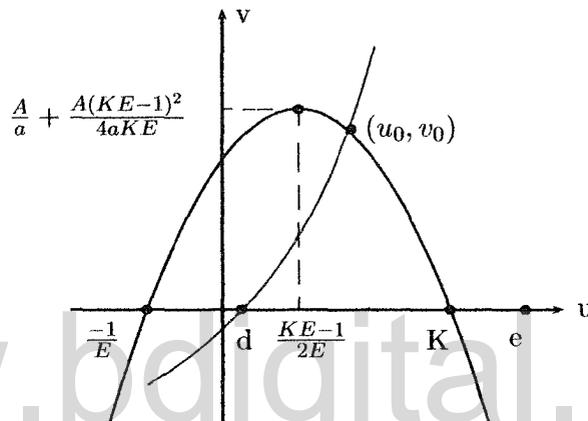
De donde obtenemos los siguientes casos:

Caso I) Si $d < K$ y $b > b - \gamma E > b - \delta E > 0$, entonces obtenemos exactamente un punto de equilibrio $P_0 = (u_0, v_0)$ no trivial del sistema (2.30) y se desprenden los siguientes subcasos.

Caso I.I) Si $\frac{KE-1}{2E} > 0$, entonces la matriz jacobiana del campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ en el punto P_0 , viene dada de la siguiente manera

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \text{si } d > -\frac{\left(\frac{A}{a} + C + \frac{A(KE-1)^2}{4aKE}\right) \left(e - \frac{KE-1}{2E}\right)}{C} + e$$

En este caso la matriz $dF(P_0)$ no es excitable y por tanto no existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.30). Ver la siguiente figura.

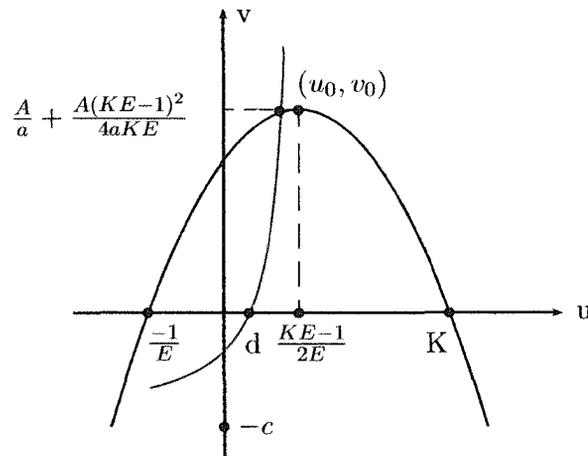


$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \quad \text{y} \quad -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE-1)u + K].$$

o

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \text{si } d < -\frac{\left(\frac{A}{a} + C + \frac{A(KE-1)^2}{4aKE}\right) \left(e - \frac{KE-1}{2E}\right)}{C} + e$$

En este caso la matriz $dF(P_0)$ es excitable y es posible que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.30). Además escogiendo adecuadamente los coeficientes difusivos puede ocurrir una bifurcación de Turing. Ver la siguiente figura.

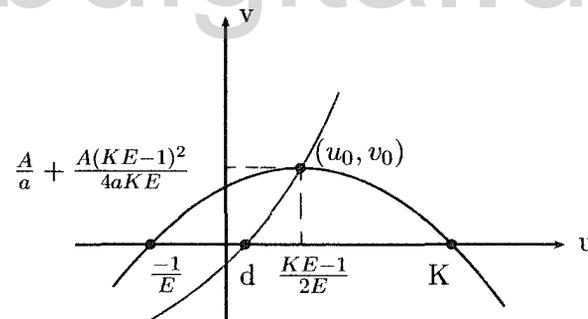


$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \quad \text{y} \quad -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE-1)u + K].$$

o

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad d = -\frac{\left(\frac{A}{a} + C + \frac{A(KE-1)^2}{4aKE}\right) \left(e - \frac{KE-1}{2E}\right)}{C} + e.$$

www.bdigital.ula.ve

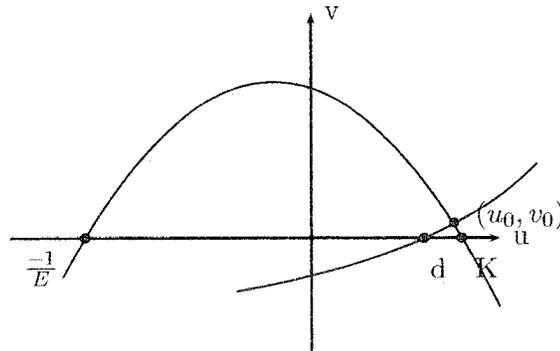


$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \quad \text{y} \quad -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE-1)u + K].$$

En este caso la matriz $dF(P_0)$ no es excitable y por tanto no existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.30).

Caso I.II) Si $\frac{KE - 1}{2E} < 0$, entonces la matriz jacobiana del campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ en el punto P_0 , viene dada de la siguiente manera

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$$



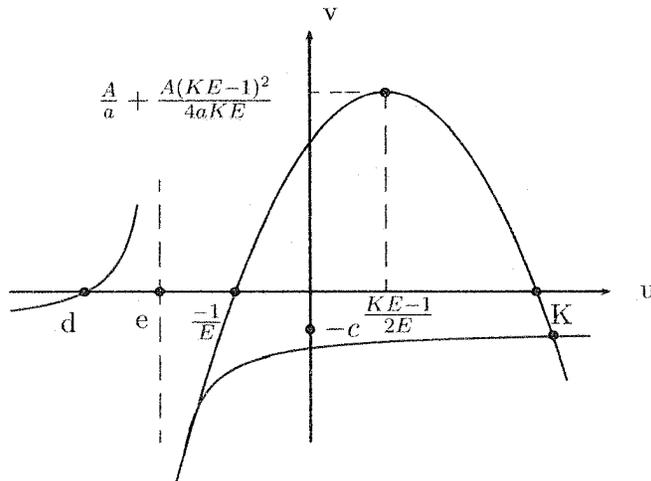
$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \text{ y } -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE - 1)u + K].$$

En este caso la matriz $dF(P_0)$ no es excitable y por tanto no existe la posibilidad de que ocurra la inestabilidad de Turing para dicho equilibrio no trivial del sistema (2.30).

www.bdigital.ula.ve

Observación 2.7 Si $d \geq K$ y $b > b - \gamma E > b - \delta E > 0$, entonces existen equilibrios no triviales para el sistema (2.30), pero desde un punto de vista biológico no son importantes, es por esta razón que nos enfocaremos a estudiar el siguiente caso.

Caso II) Si $b - \delta E < b - \gamma E < 0$, entonces existen equilibrios no triviales del sistema (2.30) pero desde un punto de vista biológico no son importantes. Como se muestra en la figura.



$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \text{ y } -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE - 1)u + K].$$

Caso III) Si

$$b - \delta E < 0 < b - \gamma E,$$

entonces tenemos dos subcasos:

Caso III.I) Si $\frac{KE - 1}{2E} > 0$, entonces el campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ puede tener un punto de equilibrio no trivial P_0 , para el cual, por un razonamiento análogo al **Caso I.I**, puede ocurrir la inestabilidad de Turing si

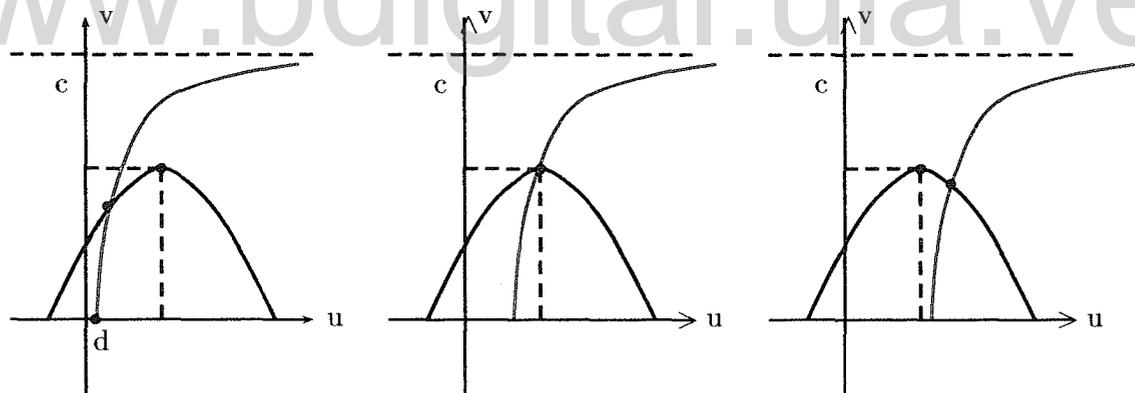
$$d < -\frac{\left(\frac{A}{a} + C + \frac{A(KE-1)^2}{4aKE}\right) \left(e - \frac{KE-1}{2E}\right)}{C} + e,$$

en caso contrario, es decir si

$$d \geq -\frac{\left(\frac{A}{a} + C + \frac{A(KE-1)^2}{4aKE}\right) \left(e - \frac{KE-1}{2E}\right)}{C} + e$$

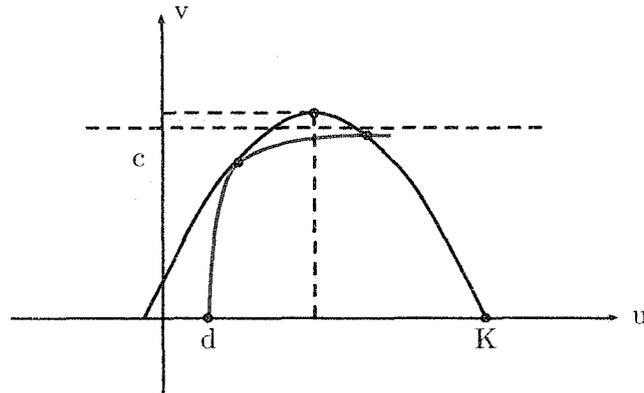
no se puede presentar la inestabilidad de Turing. Como se muestra en la siguiente figura.

www.bdigital.ula.ve



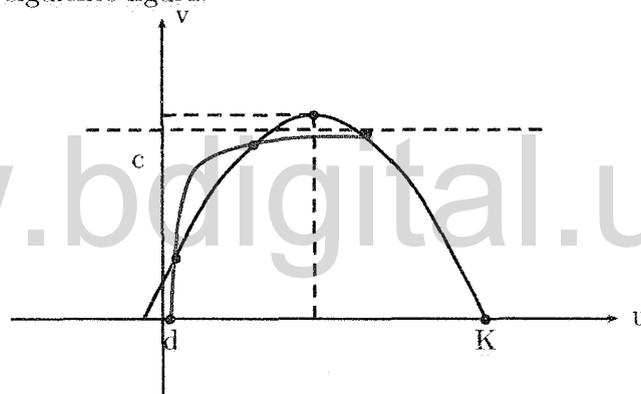
$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \text{ y } -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE - 1)u + K].$$

O puede tener dos puntos de equilibrio en donde para uno de ellos puede ocurrir la inestabilidad de Turing y para el otro no. Como se muestra en la siguiente figura.



$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \quad \text{y} \quad -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE-1)u + K].$$

O puede tener tres puntos de equilibrio en donde para dos de ellos puede ocurrir la inestabilidad de Turing y para el otro no. Como se muestra en la siguiente figura.



$$-v = -c \frac{u-d}{u-e} \quad \text{y} \quad -v = \frac{A}{aK} [-Eu^2 + (KE-1)u + K].$$

Caso III.II) Si $\frac{KE-1}{2E} < 0$, entonces el campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ tiene un único punto de equilibrio no trivial e importante desde un punto de vista biológico para el cual no se presenta la inestabilidad de Turing.

Bibliografía

- [1] Adams, R. A., Sobolev Spaces. Academic Press, New York – San Francisco – London, 1975.
- [2] Bachman, G., Narici, L., Functional Analysis, Academic Press, 1966.
- [3] Brézis H., Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, S.A., Madrid 1984.
- [4] G. W. Cross, Three Types of Matrix Stability. Linear Algebra and its applications 20, pág. 253-263 (1978).
- [5] Evans L., Partial Differential Equations. Berkeley Mathematics Lecture Notes, Vol. 3A, 1994.
- [6] Grindrod P., The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations. Clarendon Press. OXFORD, 1996.
- [7] Karl P. Hadeler y Shigi Ruan, Interaction of Diffusion and Delay. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, Volume 8, Number 1, July 2007.
- [8] Hal L. Smith., Monotone Dynamical Systems. An Introduction to Theory of Competitive and Cooperative Systems. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1991.
- [9] Henry D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag 1981.
- [10] Marcos Lizana. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Mérida-Venezuela, 2011.
- [11] Pattern Formation in a Reaction-Diffusion Ratio-Dependent Predator-Prey Model. Miskole Mathematical Notes, Vol. 6 (2005), No. 2. pp. 201-216.
- [12] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [13] Ladas G., Lakshmikantham V., Differential Equations in Abstract Spaces. Academic Press, New York, 1972.

- [14] Mora X., Semilinear Parabolic Problems define semiflows on C^K spaces. Transactions of the American Mathematical society, Vol. 278, Number 1, July 1983.
- [15] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences V.44, Springer Verlag. New York, 1983.
- [16] Robert C. Mcowen, Partial Differential Equations, Methods and Applications. Second Edition. Pearson Education, New Jersey 2003.
- [17] R. A. Satnoianu, P. van den Driessche. Some remarks on matrix stability with application to Turing instability. Linear Algebra and its applications 398 (2005) pág. 69-74.
- [18] Smoller J., Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag. New York, 1983. Academic Press 1974.
- [19] Lay D., Taylor, A., Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons, 1980.
- [20] Yosida, K., Functional Analysis. Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

www.bdigital.ula.ve