REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO UNIVERSITARIO “RAFAEL RANGEL”
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA
TRUJILLO ESTADO TRUJILLO.

EL MÉTODO DE MOORE

UNA ALTERNATIVA PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

Trujillo, Junio 2013.

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL"
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA
TRUJILLO ESTADO TRUJILLO.

EL MÉTODO DE MOORE

UNA ALTERNATIVA PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

Autores:

Br. Meila Ramírez.

C.I.: V - 18.350.646

Br.: Leonardo Briceño.

C.I.: V - 19.287.329

Tutor:Prof. José Romano.

Trujillo, Junio 2013.

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

ACEPTACIÓN DE TUTORÍA

Quien suscribe, profesor José V. Romano F., titular de la Cédula de Identidad N° 4.324.713, adscrito al departamento de Física y Matemática, por medio de la presente hago constar que acepto ser el TUTOR del proyecto de Trabajo de Grado cuyo título es: EL MÉTODO DE MOORE UNA ALTERNATIVA PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA, presentado por los Bachilleres: Meila Ramírez, Cédula de Identidad N° 18.350.646 y Leonardo Briceño, Cédula de Identidad N° 19.287.329 como requisito académico para optar al título de Licenciado en Educación mención Física y Matemáticas. Hago constar que he leído el proyecto de grado y considero que reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y evaluación por parte del Jurado Examinador designado para tal fin.

Trujillo, Enero de 2013

Prof. José Romano

C.I. 4.324.713

Tutor

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NÚCLEO UNIVERSITARIO “RAFAEL RANGEL”
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA
TRUJILLO ESTADO TRUJILLO.

EL MÉTODO DE MOORE, UNA ALTERNATIVA PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

Autores: Br. Meila Ramírez M

Br.: Leonardo Briceño.

Tutor:Prof. José Romano.

RESUMEN

El propósito fundamental de esta investigación fue: Proponer el método de Moore para incentivar a los estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA, al logro de un conocimiento significativo en la matemática. Este estudio se enmarco en el enfoque de la investigación cualitativa: con diseño de teoría fundamentada y alcances de tipo exploratorio, descriptivo y confirmatorio. La muestra empleada es no probabilística, de tipo sujetos voluntarios y homogénea, constituido por dos estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática que son los mismos investigadores. Los instrumentos y técnicas usadas fueron: la observación cualitativa, documentos, registros, materiales y artefactos. Se concluyó que si se puede incentivar a los estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA, al logro de un conocimiento significativo en la matemática; esto lo conlleva a que como docente pueda cambiar la metodología de dar sus clases, por otra que desarrolle en sus estudiantes la curiosidad, creatividad e inventiva por la matemática, así como también la iniciativa personal, el pensamiento crítico-reflexivo y el trabajo autónomo.

Palabras claves: problemas de olimpiadas matemáticas, triangulo de Tartaglia, vectores combinatorios, números de Fibonacci.

ÍNDICE GENERAL

pág.

Introducción 1

Capítulo I. Planteamiento del Problema 3

1.1 Planteamiento del problema 3

1.2 Objetivos de la Investigación 6

1.2.1 Objetivo General 6

1.2.2 Objetivos Específicos 6

1.3 Justificación de la Investigación 7

Capítulo II. Marco Teórico de la Investigación 10

2.1 Antecedentes 10

2.2 Bases Teóricas 14

Capítulo III. Marco Metodológico 29

3.1 Enfoque y alcance de la investigación 29

3.2Diseño de la investigación 30

3.3 Población y Muestra 32

3.3.1 Población 32

3.3.2 Muestra 32

3.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos 34

3.4.1 Observación Cualitativa 34

3.4.2Los formatos de observación 35

3.4.3 Documentos, registros, materiales, y artefactos 35

Capítulo IV. Solución de problemas de Olimpíadas Matemáticas 36

4.1 Introducción 36

4.2 Presentación de los problemas de Olimpiadas Matemáticas con sus respectivos comentarios y soluciones 37

4.2.1 Problema 1 37

4.2.2 Problema 2 43

4.2.3 Problema 3 46

4.2.4 Problema 4 48

4.2.5 Problema 5 51

4.2.6 Problema 6 54

4.2.7 Problema 7 62

4.2.8 Problema 8 70

4.2.9 Problema 9 76

4.2.10 Problema 10 84

Capítulo V. El Triángulo de Tartaglia 88

5.1 Introducción 88

5.2 Historia 89

5.3 Construcción del Triángulo de Tartaglia 90

5.4. Triángulo de Tartaglia y los números combinatorios 91

5.5 El Binomio de Newton y el Triángulo de Tartaglia 92

5.6 Propiedades del triángulo de Tartaglia 94

5.6.1 Demostraciones de cada una de las propiedades 95

5.7 Interpretación de sus filas 104

5.8 Interpretación de sus propiedades 106

5.9 Las diagonales del triángulo 111

5.10 La perpendicular del triángulo 112

5.11Vectores combinatorios en el Triángulo de Tartaglia 114

5.12. Interpretación de los vectores combinatorios 117

Capítulo VI. La sucesión de Fibonacci 132

6.1 Introducción 133

6.2 La sucesión de Fibonacci. ¡Un problema de conejos!134

6.3 Propiedades de la sucesión de Fibonacci 136

6.4 La sucesión de Fibonacci y el Triángulo de Tartaglia 156

Capítulo VII. Conclusiones y Recomendaciones 158

Referencias Bibliográficas 162

INTRODUCCIÓN

Polya, insigne matemático y educador, comenta en uno de sus libros lo siguiente: "Entender matemática significa ser capaz de hacer matemática ¿y qué significa hacer matemática? En primer lugar ser capaz de resolver problemas matemáticos."

Hoy en día los estudiantes de cualquier curso de matemática resuelven numerosos ejercicios, pero rara vez un verdadero problema matemático; es de señalar que ambos términos no son lo mismo. ¿Por qué? Por la siguiente razón: un ejercicio se resuelve de manera mecánica siempre y cuando se haya comprendido el material instruccional, en cambio, ante un verdadero problema, no se sabe a priori a que tema pertenece; esto hace que la solución no se halle de modo automático.

De lo antes expuesto surge la problemática de la enseñanza de la matemática, por la razón de que la mayoría de docentes del área utilizan métodos pocos didácticos y emplean su tiempo en el aula a solamente dar teoría y a ejercitar a sus estudiantes en operaciones rutinarias, provocando en ellos un desinterés en la matemática, un impedimento en su desarrollo intelectual y una visión errada acerca de esta disciplina. Es de recalcar que los docentes que imparten esta cátedra de matemática deben estar formados para proporcionar un cambio en la forma de enseñar, ya que esta ha probado ser poco efectiva, así como también cambiar la mentalidad de que la enseñanza debe estar dirigida solo al estudiante medio y que no se debe plantear cuestiones que no pueden ser resueltas por la mayoría de los alumnos, esta creencia si acaso no es otra cosa que comodidad y pereza mental disfrazada en mediocridad y aburrimiento.

Por lo tanto pensar en un problema matemático interesante e intentar resolverlo, aunque no se halle una solución completa es una experiencia educativa mucho más valiosa que aprender de memoria lo que dice un libro. Por eso el método de Moore (resolución de problemas) como una alternativa de enseñar matemática, le ofrece el docente la oportunidad de despertar el interés, la curiosidad, la imaginación y la creatividad de los alumnos, restituyendo el componente lúdico de la matemática.

Por esta razón, la presente investigación tiene como propósito proponer el método de Moore para impulsar a los estudiantes de la Carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA a profundizar temas matemáticos y con ellos obtener un conocimiento significativo sobre la disciplina.

El presente trabajo de investigación está conformado por:

Capítulo I: consta del planteamiento de problema, formulación del mismo, objetivos y justificación de la investigación.

Capítulo II: en este se desarrolla el marco teórico que expone las bases teóricas y definición de términos básicos.

Capítulo III: contiene la metodología a usar para que se pueda llevar a cabo el logro de los objetivos además se especifica el tipo y diseño de la investigación.

Finalmente se presenta las referencias Bibliográficas usadas para desarrollar la presente investigación.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

1.1. Planteamiento del Problema

A finales del siglo XX, la enseñanza de la matemática tuvo un cambio considerable con la introducción de lo que se dio en llamar las Matemáticas Modernas. Estas consistían en implantar la esencia del formalismo de la escuela de Bourbaki en los currículos escolares, con la intención de dejar atrás la aplicación mecánica de las reglas y técnicas que no fomentaban ninguna comprensión genuina de los procesos matemáticos. No obstante, el exceso de formalismo las llevó al fracaso; en particular el uso inoportuno, en la búsqueda de precisión, del lenguaje matemático a través de conjuntos. Ciertamente para esa época se añoraba un sentido práctico en la enseñanza de la matemática que fuese más allá de la resolución repetitiva de ejercicios.

Hoy en día, durante el acto de enseñanza-aprendizaje es muy común estudiar conceptos matemáticos, teoremas, demostraciones, algoritmos, definiciones y varios procedimientos que luego son utilizados para resolver problemas. Sin embargo, se observa deficiencia o carencia de estos conocimientos en los estudiantes, lo cual se traduce en una dificultad en la estrategia didáctica antes mencionada. Uno de los sectores más afectados por esta los constituyen aquellos estudiantes que pasan a un estudio formal de matemática, puesto que existe un salto conceptual enorme, tal es el caso del cambio de bachillerato a la universidad o del cálculo al análisis o al álgebra abstracta. Esto se debe a que se sigue imponiendo una presentación de la matemática como producto axiomático deductivo y que para la solución de problemas solo se da una aplicación mecánica de reglas y técnicas.

En este sentido, se puede utilizar una alternativa en la estrategia didáctica, fundamentada en la enseñanza a través de solucionar problemas, es decir, enseñar matemáticas a través de problemas, lo cual permitiría que los alumnos tengan la oportunidad de leer, escribir y discutir ideas para los cuales el uso del lenguaje matemático es algo natural; de esta forma, a medida que se comunican las ideas se aprende a clarificar, refinar y consolidar el pensamiento matemático. Este procedimiento se conoce como "el método Moore", recibe su nombre por Robert Lee Moore, un famoso matemático que era profesor en la Universidad de Pensilvania. Puso en práctica el método en cursos de matemática avanzada y probó que puede aplicarse con las condiciones adecuadas.

De acuerdo con lo anterior Kleiner (1986) plantea que: "el desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se originan a partir de un esfuerzo por resolver un determinado problema*"* (p. 31). Por otra parte Polya (1963) insiste en el hecho de que: *"*la mejor forma de aprender algo es hacerlo por ti mismo*"* (p. 607). Dicho de otro modo, a través de la solución de problemas los estudiantes por sí mismos pueden alcanzar y consolidar aprendizajes significativos y con ello sorprenderse genuinamente y agradarse de sus resultados; esto forma parte del hecho de que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico.

En lo que se refiere a la enseñanza de la matemática a través de la solución de problemas, Halmos (1980) afirma que es la obligación de todos los maestros en matemática exponer a sus estudiantes a problemas más que a hechos; esto lo hizo notar en sus clases, puesto que impartió cursos cuyo contenido entero consistió en que los estudiantes solucionaran problemas (y posteriormente los presentaran en clase), lo cual fue todo un éxito. Además, señaló que para cualquier curso es posible encontrar un conjunto pequeño de preguntas-problemas que pueden hacerse con mínimo lenguaje técnico, que sean lo suficientemente llamativos para captar el interés, que tengan respuestas triviales, y que se las arreglan para contener, en sus respuestas, todas las ideas importantes de la materia.

Cabe resaltar que la solución de problemas ha sido reconocida como un componente importante en el estudio del conocimiento matemático, Halmos (1980) afirma que: *"Los problemas son el corazón de la matemática"* (p. 524). Por otra parte, Hilbert presentó en la comunidad matemática 23 problemas que han sido fuente de inspiración para el desarrollo del conocimiento matemático. En otras palabras, la solución de problemas sirve como fuente inagotable de inspiración matemática y da a cualquier estudiante la oportunidad de ser un matemático.

Hay opiniones que confirman esta forma de introducirse a las matemáticas o alguna de sus partes, por consiguiente de aquí en adelante la investigación trata este tema a partir del abordaje que le darán dos estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA a una serie de problemas de las Olimpíadas Matemáticas, con el fin de responder a las siguientes preguntas:

¿Qué solución se hallará a los problemas de las Olimpíadas Matemáticas?

¿De qué manera se abordarán los problemas de Olimpíadas Matemáticas para hallar su debida solución?

¿Qué significado tendrá los estudiantes la solución de dichos problemas?

¿Cuáles temas matemáticos se utilizarán para la solución de los problemas?

¿Qué "tema matemático" en particular sería de gran relevancia?

¿Habrá contenidos del "tema matemático en particular" que profundizaran los estudiantes después de solucionar los problemas? Si es así ¿Cuáles serán?

¿Habrá ideas matemáticas generadas por los estudiantes después que se produjo el estudio del tema matemático?, si es cierto ¿Cuáles serán?

Las preguntas antes mencionadas, conllevan a plantear la siguiente interrogante:

¿Qué factibilidad hay de utilizar el método de Moore para poder incentivar a los estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA, al logro de un conocimiento significativo en la matemática?

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1 Objetivo General

Proponer el método de Moore para incentivar a los estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA, al logro de un conocimiento significativo en la matemática.

1.2.2 Objetivos Específicos

Presentar la solución de los problemas de Olimpiadas Matemáticas propuestos.

Compilar el significado que tuvo para los estudiantes la solución de dichos problemas.

Resaltar los temas matemáticos utilizados para la solución de los problemas.

Exponer los contenidos del "tema matemático en particular" que fueron profundizados por los estudiantes después de solucionar los problemas.

Mostrar las ideas que se generaron después que se produjo el estudio del tema matemático.

1.3. Justificación

La matemática es para el hombre sabio lo que los ojos son para el hombre, es decir, la llave que lo lleva a abrir las puertas que conducen hacia las respuestas de los problemas que se plantea la humanidad sobre el mundo que lo rodea. Sin embargo, es lamentable que esta concepción no se tome en cuenta en la enseñanza y en el aprendizaje de la misma.

Cabe señalar que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la actualidad, se limita a que la mayoría de los docentes del área utilizan métodos pocos didácticos y emplean su tiempo en el aula a solamente dar "teoría" y ejercitar a sus estudiantes en operaciones rutinarias, provocando en ellos un desinterés en la matemática, un impedimento en su desarrollo intelectual y una visión errada acerca de esta disciplina; así lo expone Polya (1989) cuando comenta sobre las oportunidades que tienen los docentes cuando están dentro del aula.

Ahora bien, un estudiante que tenga un reportorio de conocimientos sobre matemática (posiblemente producto de la ejercitación de operaciones rutinarias) puede tener la oportunidad de profundizar en algunos temas y obtener un aprendizaje significativo si se le aplica un método de estudio que lo impulse a descubrir y desarrollar capacidades, habilidades, destrezas y virtudes en esta disciplina.

Por esta razón, la presente investigación tiene como propósito proponer el método de Moore "solución de problemas" para incentivar a los estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA al logro de un conocimiento significativo en la matemática. Proponer esto puede llevar al docente a cambiar la metodología de dar sus clases, por otra que desarrolle en sus estudiantes la curiosidad, creatividad e inventiva por la matemática, así como también la iniciativa personal, el pensamiento crítico-reflexivo y el trabajo autónomo.

En el marco legal, el diseño curricular nacional del Sistema Educativo Bolivariano (2007) plantea que:

Uno de los objetivos del currículo bolivariano es:

> Promover la independencia cognitiva y la apropiación de los conocimientos que permitan un pensamiento autocritico y reflexivo; así como el interés por la ciencia, tecnología, el conocimiento, la innovación y sus aplicaciones desde una perspectiva social que favorezca el trabajo liberador, como herramienta para el desarrollo económico, social político del país, para la seguridad y la soberanía nacional(p. 55).

En cuanto al perfil, el maestro debe ser capaz de:

> Atender diferencialmente las potencialidades de los y las estudiantes; utilizar diferentes estrategia para el desarrollo y la evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, a fin de optimizar el tiempo y los recursos disponibles, manifestar capacidad de innovación y creatividad; promover la investigación como proceso fundamental en la enseñanza y aprendizaje; asumir como categoría la originalidad y la creatividad….;poseer principios éticos solidos expresados en una auténtica vivencia de valores, a partir de los cuales, utilizando estrategias metodológicas, contribuir a la formación de valores de los y las estudiantes (p. 59).

El egresado y la egresada deben poseer*:*

> Conocimiento, habilidades, valores y virtudes hacia el quehacer científico y tecnológico, al servicio del desarrollo nacional y como herramienta de soberanía, cualidades, actitudes y valores hacia la creación, la originalidad y la innovación; conocimiento habilidades, destrezas y valoración de la importancia de las ciencias para la resolución de problemas sociales; habilidades, destrezas y valores acerca del que hacer investigativo (p. 63).

Todo lo anterior conlleva a proponer el empleo del método de Moore "solución de problemas", en la asignatura Taller de Matemática de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA. Esta asignatura sería ideal puesto que constituye una estrategia académica cuyo objetivo fundamental es el producto generado por los estudiantes. Además, dado la flexibilidad del método de

Moore se podría emplear en cualquier otra asignatura. Asimismo, se podría considerar su empleo en el sistema de educación básica de modo que se despierte la curiosidad y se estimule la creatividad e imaginación en el estudiante dejando a un lado el sendero de mediocridad y aburrimiento que las clases rutinarias ocasionan.

De acuerdo con lo anterior, el diseño curricular nacional del sistema educativo bolivariano (diseño de septiembre del 2007) plantea que algunos de los fines y principios del Sistema Educativo Bolivariano de la institución educativa son: El fomento de la creatividad y las innovaciones educativas y desarrollo del pensamiento y reflexivo, que permita el análisis de la realidad para transformarlas desde una conciencia crítica (p. 22).

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Cruz (2006) plantea que la matemática es una ciencia extraordinariamente dinámica y cambiante, a tal punto que sus conceptos primarios sufren transformaciones relativamente rápidos y hasta su propia concepción, aunque de modo más lento, experimenta cambios tangibles. Las matemáticas son un fenómeno cultural y universal, pues cualquier civilización crea una matemática y por tanto, un mundo sin ella, constituiría un verdadero caos, una antítesis en el cosmos. Lo anteriormente planteado conlleva a inferir en que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática también tendrían que sufrir los mismos cambios y por consecuencia que la educación se plantee nuevos retos para el aprendizaje y la enseñanza de la misma.

Gascón (1998) señala que: *"la evolución didáctica de las matemáticas está determinada por sucesivas ampliaciones de la problemática didáctica. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios de sus objetos primarios, y en consecuencia, modifica la naturaleza didáctica de esta disciplina"*.

En la actualidad el aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina toma un gran valor para la educación del ser humano (desde un punto de vista teórico y legal), puesto que fomenta el desarrollo personal, intelectual y social del mismo. Asimismo, el aprendizaje de las matemáticas es de importancia en la vida adulta del estudiante ya que le facilita el rol formativo que involucra la facilitación del pensamiento lógico, la adquisición de estrategias cognitiva de orden lógico y otras destrezas informativas. En cuanto al rol informativo, este conlleva a la capacidad de manejar información cuantitativa y cualitativa considerándola imprescindible para desenvolverse de manera adecuada en la vida moderna.

Lo expuesto en el párrafo anterior es "el deber ser" del propósito de la práctica educativa, sin embargo lamentablemente no es así puesto que en la actualidad se observan las grandes deficiencias y carencias que tienen los estudiantes en cuanto al dominio de la matemática; esto se debe a que los estudiantes se limitan a memorizar y mecanizar los diversos temas matemáticos con el fin de resolver los problemas propuestos en los libros y por tanto no consolidan un aprendizaje significativo. Este acontecimiento sucede debido a que los docentes no perciben la evolución de la matemática y de su didáctica, llevándolos a utilizar solo el punto de vista clásico o lo que se conoce comúnmente como dar clases magistrales.

Gascón (1998) sostiene que el punto de vista clásico en la didáctica de la matemática es:

> un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas, se suponía que el aprendizaje dependía solo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. Esto es, todavía, la idea dominante en la cultura corriente y representa una "concepción" precientífica de la enseñanza que sigue siendo muy influyente en la cultura escolar.

Cabe señalar que los estudiantes dicen "voy a estudiar conceptos matemáticos para resolver problemas matemáticos del texto tal", pero esto en realidad no se da, puesto que lo que en verdad sucede es que cuando hablan de problemas matemáticos se refieren a la versión trivializada de los ejercicios de los textos.

Gascón (1998), comenta que los problemas matemáticos involucran situaciones verdaderamente complejas, capaces de potenciar el desarrollo del pensamiento y de proporcionar modos de actuación para enfrentar los retos de la ciencia y la técnica, situaciones así son difíciles de encontrar en la práctica educativa.

Por lo tanto, los cambios dinámicos de la matemática y la crisis de la educación actual con respecto a esta disciplina, conllevan a que la evolución de la didáctica de la matemática se dé aceleradamente y que esta sea estudiada por los educadores con el fin de lograr el perfeccionamiento de la educación por esta ciencia de estudio y por su formación como tal de él y sus estudiantes. Con respecto al perfeccionamiento de la educación, Brenes (1997) afirma:

> Perfeccionar la Educación es una batalla constante a la que están llamado todos los educadores. Lograr que todos los educandos reciban una adecuada educación en correspondencia con sus niveles de desarrollo y trabajar por alcanzar mejores resultados cada día; saber qué hacer para lograrlo, no solo desde el punto de vista teórico, sino en la práctica, debe ser una meta permanente de todos (p. 93).

La idea es utilizar una didáctica que conlleve a un aprendizaje acertado de esta ciencia. Gascón (1998) propone que se dé un nuevo punto de vista en la didáctica de la matemática, en donde exista la necesidad de disponer de un modelo de la actividad matemática y de un modelo de proceso de enseñanza aprendizaje y que dichos objetos puedan estar debidamente relacionados. Ahora bien, la solución de problemas ocupa un lugar central en la enseñanza de la matemática tal como lo señala Torres (2006):

> Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el verdadero sentido a las ideas matemáticas. Se trata de considerar como lo más importante: que el estudiante manipule los objetos matemáticos, que active su propia capacidad mental, que ejercite su creatividad, que reflexione acerca de su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, que haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, que adquiera confianza y seguridad en sí mismo, que se divierta con su propia actividad mental, que se prepare así para otros problemas de la ciencia y de su vida cotidiana.

Asimismo, Halmos (1975) sostiene que la matemática trata realmente sobre la solución de un problema concreto y comenta también que Hilbert dijo que la mejor forma de entender una teoría es encontrar, y luego estudiar, un ejemplo concreto prototipo de tal teoría, un ejemplo que ilustre casi todo lo que puede pasar. Por tanto, se puede relacionar lo anteriormente expuesto y proponer una didáctica innovadora sobre solucionar problemas.

Es pertinente resaltar que en los últimos años el hacer matemática en el aula ha sido entusiasmado por nuevas ideas que llevan al estudiante a su desarrollo formativo e informativo.

En este sentido, Hernández y Mamo(2010) comprobaron mediante su investigación de trabajo de grado, que cualquier estudiante de la carrera Educación Física y Matemática del NURR-ULA puede adquirir en un corto periodo de tiempo los conocimientos básicos de lenguaje de programación Logo para ser aplicado como una TIC para construir geometría.

También, Hernández y Sánchez (2010) demostraron en su investigación que el estudiante promedio y egresados de la carrera de Educación Mención Física y Matemática del Núcleo Universitario Rafael Rangel de la universidad de los Andes pueden tener la habilidad necesaria para dominar en un corto periodo de tiempo y por si solo el software educativo Geogebra 3.00. Asimismo, cabe mencionar a Bencomo (2010) quien diseño un manual para la construcción de Teselados Escherianos empleando como herramienta tecnológica el programa Geogebra 3.2.

Los resultados obtenidos en las investigaciones mencionadas permiten concluir que realmente se puede auto-aprender matemática bajo una nueva idea didáctica como lo es en estos casos la utilización de software. Cabe destacar que la exploración de los software implicaba la manipulación de estos para ilustrar y hacer matemática y por tanto cabe decir que se puede auto-aprender esta disciplina. En cuanto a la solución de problemas, Peñaloza (2011) realizó una selección de sugerencias y preguntas para modificar la manera de abordar problemas en matemática, basado en las ideas de George Polya. En este sentido, para el estudiante interesado en un auto-aprendizaje es importante la manera de abordar problemas en matemática pues de allí el éxito en hallar la solución.

Los trabajos de estos investigadores son de gran importancia con respecto al objetivo propuesto en esta investigación, puesto que comprueban que se puede aprender matemática bajo una innovación didáctica. Cabe señalar que el arte de enseñar tiene un valor fundamental en la mediación, formación y el desarrollo de las habilidades del pensamiento durante el estudio de las matemáticas. Esto conduce a que el docente tenga en sus hombros la gran responsabilidad de conocer a sus estudiantes para así concebir una estrategia didáctica innovadora.

De acuerdo con lo anterior, Monera (1991), señala que:

> La enseñanza de las matemáticas requiere además de un conocimiento adecuado del tema, una compresión profunda de lo que se enseña y no solo el manejo de la información, junto a esto, requiere también de un conocimiento amplio de los aspectos psicopedagógicos que permiten reconocer las dificultades potenciales que enfrentaran los estudiantes al abordar distintos temas, lo cual implica no solo conocer los prerrequisitos sino también los significados asociados y sus representaciones (p. 36).

2.2. Bases Teóricas

Según Hernández y otros (2010), en la investigación cualitativa la función esencial de las bases teóricas es de consulta, por ello y para no "empañar" el proceso inductivo, a continuación se presenta una serie de conceptos y reseñas claves.

El aprendizaje de las matemáticas

Según De Guzmán (2004), la educación matemática es el proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático. En otras palabras, las características propias de la disciplina determinan las condiciones que pueden favorecer el aprendizaje de la matemática. En este sentido, enseñar matemáticas a través de solución de problemas sería lo más natural de acuerdo con el desarrollo de esta disciplina.

En cuanto a las cualidades que, con mayor intensidad, se desarrollan en un aprendizaje óptimo de las matemáticas podemos mencionar: capacidad lógico-analítica, intuición y creatividad, capacidad para solucionar problemas. Estas cualidades se desarrollan en un aprendizaje óptimo de la matemática, las cuales están condicionadas por el conocimiento cabal que pretende enseñar el docente, la motivación y la capacidad de transmitirla por parte del docente, uso de estrategias innovadoras, los conocimientos pre-requeridos por parte del estudiante, la motivación y participación activa para aprender de parte del estudiante.

Cabe destacar que la motivación es el punto de partida de todo proceso, por ello es importante mencionar algunas vías para fomentar el deseo de aprender matemáticas, las cuales según el proyecto académico de la Licenciatura en Matemáticas son:

El planteamiento y resolución de problemas concretos de la realidad.

El planteamiento y resolución de problemas abstractos.

El conocimiento de la historia de la matemática.

La valoración de la estética de la matemática.

Tendencias en la enseñanza de la matemática

La enseñanza de la matemática se ha caracterizado por tener en esencia los mismos problemas fundamentales desde principios del siglo XX. Sin embargo, es de resaltar, como ya se menciona antes, un movimiento llamado "matemáticas modernas", inspirado por los movimientos formalistas (cuyo máximo representante es el grupo Bourbaki), en los cuales se enfatizaba el interés por las estructuras algebraicas y formales en la enseñanza desde su nivel más básico, suprimiendo la enseñanza de la geometría en la enseñanza básica y media. Según la enseñanza de la matemática en niveles más avanzados tendió a desarrollar más las habilidades algebraicas y de manipulación formal de las estructuras matemáticas, que la intuición y la habilidad para solucionar problemas.

La reacción contraria a esta corriente comienza a finales del siglo pasado y promueve, en contraposición al formalismo, una enseñanza que destaca y mantiene como referencia continua el sentido de los símbolos que se utilizan, así como las diversas aplicaciones que surgen como problemas a solucionar. Se propuso entonces un regreso a la geometría como disciplina cuyo estudio sería indispensable para el desarrollo de la intuición y de la capacidad para solucionar problemas. En cuanto a los métodos de enseñanza, según el proyecto académico de la Licenciatura en Matemáticas se pueden señalar dos corrientes principales: el método expositivo "tradicional" y el método de Moore.

Este último es un método deductivo-constructivo, mediante el cual el estudiante construye y deduce toda la teoría a partir de axiomas y/o definiciones básicas por el docente. Esta corriente se originó en Texas, EE.UU., y existe muy poca documentación al respecto. Halmos (1975) señala que al método de Moore se le podrán hacer cientos de modificaciones, para adaptarse a los temperamentos de diferentes maestros y a las necesidades de diferentes materias. Los detalles no importan; lo que importa es hacer que los estudiantes formulen preguntas y las contesten.

La adopción de uno u otros métodos de enseñanza afectará necesariamente los contenidos de los programas. El proyecto académico de la Licenciatura en Matemáticas destaca algunos rasgos básicos, sobre las ventajas y desventajas más relevantes sobre estos métodos, las cuales son:

Método expositivo tradicional: se caracteriza por dedicar un alto porcentaje de la actividad en clase a la exposición, por parte del docente, de la materia a enseñar; tiene como supuesto que la mejor manera de aprender matemática es observar a una persona experimentada exponiendo teoremas, demostraciones, ejemplos y ejercicios. Le corresponde el término tradicional por ser la práctica pedagógica predominante a lo largo de la historia de la enseñanza masificada.

Ventajas

El aspecto más importante a favor de esta tendencia es justamente su carácter “tradicional”. Este carácter implica que el talento de algunos expositores brillantes influya decisivamente en el aprendizaje profundo y efectivo de sus estudiantes con solo hacerse escuchar. Otro aspecto a mencionar es que por la naturaleza del método permite cubrir mucho material en poco tiempo.

Desventajas

Generalmente este método de enseñanza tiende a aislar a los profesores en su desempeño docente lo cual obliga con frecuencia a buscar su conveniencia en el desarrollo axiomatizado y lineal del tema que le corresponde a enseñar, independientemente de lo apropiada que pueda ser esa secuencia para el que aprende. Esto genera una presentación ya acabada del conocimiento matemático lo que contribuye poco a que el estudiante desarrolle habilidades para descubrir, de manera independiente, significados en la teoría que estudia, es decir, poco contribuye a que el estudiante “aprenda a aprender”.

Este método de enseñanza está centrado en transmisión de contenidos, la cual incluye una gran cantidad de información, puesto que de alguna manera supone que aquello que no se ha dado en el aula de clase, no será aprendido nunca por el estudiante. Esta suposición es coherente con la situación señalada en la desventaja anterior, debido a que el docente está consciente de que la independencia en el aprendizaje del estudiante no se desarrolla a plenitud en muchos casos.

Otra desventaja de este método está asociada a la velocidad con la cual se dictan los temas. Como se trata de un esquema en el cual la intervención del estudiante se reduce a su presentación de exámenes, es frecuente que el docente comprenda que la velocidad no ha sido la más apropiada cuando ya es tarde para corregir el error. Muchas veces el estudiante, incluso aprobando los exámenes, no asimila adecuadamente la materia debido a que el tiempo dedicado a ella es insuficiente.

Método de Moore: se ubica en una posición opuesta al modelo tradicional, como se dijo anteriormente fue implementado por Moore y usado por docentes de talla internacional. En el contexto de la Universidad de los Andes, el profesor Domingo sigue su propuesta en forma independiente, éste afirma que llegó a crear ese método como fruto de su búsqueda de una manera en que los estudiantes pudieran "aprender sin estudiar". Consiste este método esencialmente en proponer al estudiante una sucesión de problemas diseñados especialmente para permitir o inducir el descubrimiento de los teoremas, proposiciones y demás elementos de la teoría en cuestión.

Ventajas

El estudiante que construye su propio conocimiento, no lo olvida con facilidad, puesto que lo ha descubierto por sí mismo. Además, las horas de clases son al mismo tiempo horas de entrenamiento y estudio, lo que implica un uso más eficiente del tiempo del alumno. En este sentido, al mismo tiempo que el estudiante entrena o estudia, también desarrolla su intuición y su capacidad para solucionar problemas; esto muestra que el método se encuentra alineado con las tendencias más recientes en cuanto a la concepción de lo que debe ser enseñar matemáticas. Además, es destacable que este modelo es dinámico en el sentido de que siempre es posible mejorar y/o adaptar los problemas al grupo particular de estudiantes; esto ha demostrado mantener en alto la motivación y el interés tanto en docentes como en estudiantes.

Por otro lado, al desarrollar la capacidad del estudiante de aprender por sí mismo, contribuye a la formación de un espíritu de investigación. En lo que se refiere a la evaluación, es contante durante el progreso del individuo, muy diferente por cierto, de la evaluación continua.

Desventajas

El hecho de ser un modelo "no tradicional" despierta recelo y desconfianza en algunos, temores en otros: resistencias humanas naturales que dificultan su adopción. El desarrollo de las clases, puede verse afectado con respecto a la velocidad. Es necesario recalcar que este es un modelo experimental, por lo cual no existe suficiente documentación sobre su aplicación.

Para finalizar, Chalice (1995) comenta que una parte (posiblemente una parte bastante grande) de la educación estudiantil debería ser expuesta bajo este método. Adicionalmente, en lo que se refiere a resultados, comenta que, cuando se encuentra con ex-estudiantes graduados que tienen trabajos en el "mundo real" y le pregunta qué cursos los ayudaron más, a menudo se consigue con la respuesta: "los cursos impartidos con el método de Moore", porque en ellos tuvieron que aprender a expresar sus propias ideas convincente y enérgicamente a un grupo grande.

La solución de problemas

La solución de problemas es una actividad primordial en la clase de matemática, no es únicamente un objetivo general a conseguir sino que además es un instrumento pedagógico de primer orden. En matemática, hablar de solución de problemas es hablar del insigne matemático y educador George Pólya (1887-1985), quien en 1945 publica un libro que rápidamente se convertiría en un clásico: *How to solve it*. En éste, Pólya rescata la antigua palabra "heurística" y la aplica a la comprensión del proceso que lleva a la solución de problemas matemáticos, en particular a las operaciones mentales típicas en ese proceso. En esta obra se plantea una metodología de solución de problemas con cuatro fases, a cada una de las cuales se le asocia una serie de preguntas y sugerencias que aplicadas adecuadamente ayudaran a solucionar el problema.

Polya (1989) señala las cuatro fases y preguntas asociadas a ellas, las cuales se señalan a continuación:

Comprensión del problema.

¿Cuál es la incógnita?

¿Cuáles son los datos?

¿Cuál es la condición?

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

¿Es insuficiente?

¿Redundante?

¿Contradictoria?

Concepción de un plan

¿Se ha encontrado un problema semejante?

¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

¿Conoce un problema relacionado con este?

¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?

Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una simular. He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo? ¿Podría emplear su resultado? ¿Podría utilizar su método? ¿Podría utilizarlo introduciendo algún elemento auxiliar? ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Con respecto a las definiciones. Si no puede solucionar el problema propuesto, trate de solucionar primero algún problema similar.

¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede solucionar una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte: ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada?, ¿en qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí? ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución de un plan

Al ejecutar el plan, compruebe cada uno de los pasos.

¿Puede ver que claramente el paso es correcto?

¿Puede demostrarlo?

Visión retrospectiva

¿Puede usted verificar el resultado?

¿Puede verificar el razonamiento?

¿Puede obtener el resultado en forma diferente?

¿Puede verlo de golpe?

¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Las Olimpiadas matemáticas

A continuación, se expone un resumen de algunos hechos y datos publicados por el Boletín de la Asociación Matemática Venezolana en la sección "El rincón olímpico" (del volumen VIII al XVIII) y cuyo autor es Rafael Sánchez Lamoneda.

Las competencias de resolución de problemas matemáticos son una vieja tradición en muchos países que probablemente se remonta hasta la antigua Grecia. En Francia hubo competencias matemáticas en el siglo XVIII y Hungría comenzó a realizar en 1894 las competencias Eötvös, las cuales (con el nombre de Kürschák a partir de 1947) han continuado hasta el día de hoy y son el más cercano antecedente de las modernas Olimpiadas Matemáticas. La primera Olimpiada Matemática, con ese nombre, tuvo lugar en San Petersburgo en 1934, y la segunda en Moscú en 1935. De allí que las Olimpiadas Matemáticas se popularizaron en toda la (para entonces) Unión Soviética y se extendieron a países como Rumania, Polonia, Alemania, Bulgaria y Checoslovaquia.

En 1959 se celebra en Rumania la primera Olimpiada Internacional de Matemática (**IMO** por sus siglas en inglés), la cual es una competencia anual para estudiantes preuniversitarios. La competencia consiste en dos cuestionarios con tres problemas cada uno; cada pregunta da un puntaje máximo de siete puntos, para un puntaje máximo de cuarenta y dos puntos. La competencia se desarrolla, en dos días, cada día el concursante dispone de cuatro horas y media para solucionar tres de los problemas. Los problemas se escogen de varias áreas de la matemática estudiada en secundaria, los cuales pueden clasificarse en geometría, teoría de números, álgebra y combinatoria. No se requieren conocimientos de matemáticas superiores y se espera que las soluciones sean cortas y elegantes. Encontrar las soluciones requiere, sin embargo, ingenio excepcional y habilidad matemática.

Este espíritu ha permanecido hasta nuestros días en la preparación de los alumnos para las olimpiadas a diferencia de lo que ocurre en la enseñanza tradicional, en la cual los alumnos realizan ejercicios mecánicos sobre temas especificados en el programa de estudios, dejando de lado el placer de entender y pensar por sí mismos. En las olimpiadas Matemáticas se presentan verdaderos problemas que no requieren del conocimiento de muchos contenidos, pero sí presentan un desafío tal que en la búsqueda de sus soluciones se construyen significados, se redescubren conceptos básicos y se adquieren habilidades y destrezas.

Cabe resaltar que en Venezuela la historia de las olimpiadas matemáticas comienza en 1975, cuando el profesor Saulo Rada Aranda elabora un proyecto de olimpiadas como medio para promover la matemática en la enseñanza media venezolana. El proyecto fue acogido por el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (ENAMEC). Es así como en 1976 se organiza por primera vez, con carácter experimental, la Olimpiada Matemática Venezolana (OMV). Este programa se mantiene durante 27 años, alcanzando una participación global de más de un millón de jóvenes de todas las regiones del país y de instituciones educativas tanto públicas como privadas. A partir del año 2001 las autoridades del Cenamec comenzaron a mostrar un desinterés cada vez mayor por las actividades olímpicas, hasta que en el año 2003 cancelaron el programa de olimpiadas matemáticas.

El espíritu olímpico en Venezuela no decayó sino que, por el contrario, tomó un nuevo aliento. La OMV ya había dado origen a otras competencias matemáticas en Venezuela, entre las cuales cabe destacar la Olimpiada Recreativa de Matemáticas, promovida por el profesor Jorge Salazar desde el año 1993. Por otra parte, en el año 2002 se inicia la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, con el objeto de atender a los alumnos que cursan desde segundo año de educación básica hasta segundo año del ciclo diversificado. Se creó la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas (AVCM) y con el apoyo de la Asociación Matemática Venezolana se comenzó a desarrollar un amplio programa de selección y entrenamiento de estudiantes.

Entre los logros obtenidos por estudiantes venezolanos en competencias internacionales en los últimos 12 años cabe mencionar que en IMO se obtuvieron 2 medallas de plata, tres de bronce y 11 menciones honorificas. Esto es muy importante puesto que en años anteriores al 2000 nunca se había obtenido algún premio en esta competencia. Los estudiantes participantes en estas olimpíadas han realizado con gran éxito carreras en las áreas de matemática, computación, ingeniería y otras ciencias.

Corrientes sicopedagógicas:

Teoría constructivista de Jean Piaget

Según la teoría Piagetiana, el desarrollo intelectual está claramente relacionado con el desarrollo biológico. Por otro lado las etapas del desarrollo cognitivo descubre los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia a la adolescencia: como las estructuras psicológicas se desarrollan apartir de los reflejos innatos, se organizan durante la infancia en esquemas de conducta, se internalizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta. Piaget divide el desarrollo cognitivo en cuatro períodos importantes y una de ellas es la etapa de las operaciones formales que se da desde los 11 años en adelante, en esta etapa se desarrolla pensamiento hipotético deductivo.

En este orden de ideas, para la solución de problemas es necesario estar en la etapa de las operaciones formales en donde el estudiante sea capaz de hacerse suposiciones de algo posible o imposible para deducir de éstos consecuencias.

Cabe mencionar que hay un concepto de suma importancia: ¿qué ocurre cuando el equilibrio establecido en cualquiera de esos tres niveles se rompe? Es decir, cuando entran en contradicción bien sean esquemas externos o esquemas entre sí. Se produciría un *conflicto cognitivo* que es cuando se rompe el equilibrio cognitivo. El organismo, en cuanto busca permanentemente el equilibrio busca respuestas, se plantea interrogantes, investiga, descubre, hasta llega al conocimiento que le hace volver de nuevo al equilibrio cognitivo.

En este sentido, la solución de problemas en muchos casos conducen al estudiante a un conflicto cognitivo, el cual permite que el estudiante se dé la oportunidad de buscar respuestas, plantearse interrogantes, investigar, descubrir hasta llegar a una solución satisfactoria que fortalecería sus conocimientos.

Construccionismo

El construccionismo es una teoría del aprendizaje desarrollada por Seymour Papert que destaca la importancia de la acción, es decir, del proceder activo en el proceso de aprendizaje. Se inspira en las ideas de la psicología constructivista y de igual modo parte del supuesto de que, para que se produzca aprendizaje, el conocimiento debe ser construido (o reconstruido) por el propio sujeto que aprende a través de la acción, de modo que no es algo que simplemente se pueda transmitir.

Papert (1985), toma de Piaget el modelo del niño constructor de sus propias estructuras intelectuales y postula que, como tal, necesita materiales para esa construcción y es la cultura circundante la que provee al niño de esos materiales. El aprendizaje construccionista involucra a los estudiantes y los anima a obtener sus propias conclusiones a través de la experimentación creativa. El docente constructivista asume un papel de mediador en lugar de adoptar una posición instructiva. La enseñanza se sustituye por la asistencia al estudiante en sus propios descubrimientos a través de construcciones que le permiten comprender y entender los problemas de una manera práctica.

El construccionismo se aplica sobre todo el aprendizaje de las matemáticas y de la ciencia (en forma aprender ciencia basándose en la investigación), aunque se aplica en una forma diferente, en otras áreas: en psicología de la comunicación, por ejemplo, y en el aprendizaje de las profesiones y oficios afines.

Aprendizaje por descubrimiento

El aprendizaje por descubrimiento, también llamado heurístico, es aquel que se conoce como el que promueve a que el estudiante adquiera conocimientos por sí mismo, de tal modo que el contenido que se va a aprender sea descubierto por el estudiante.

El aprendizaje por descubrimiento es un tipo de aprendizaje en el que el sujeto en vez de recibir los contenidos de forma pasiva, descubre los conceptos y sus relaciones y los reordena para adaptarlos a su esquema cognitivo. La enseñanza por descubrimiento coloca en primer plano el desarrollo de las destrezas de investigación del escolar y se basa principalmente en el método inductivo y en la lección inductiva.

La teoría del aprendizaje por descubrimiento y la solución de problemas crean conjuntamente con las teorías antes señaladas, la fusión perfecta para el propósito de esta investigación puesto que esta teoría persigue:

1. Superar las limitaciones del aprendizaje mecanicista.
2. Estimular a los alumnos para que formulen suposiciones intuitivas que posteriormente intentarán confirmar sistemáticamente.
3. Potenciar las estrategias metacognitivas y el aprender a aprender. Se parte de la idea de que el proceso educativo es al menos tan importante como su producto, dado que el desarrollo de la comprensión conceptual y de las destrezas y las estrategias cognitivas es el objetivo fundamental de la educación, más que la adquisición de información factual.
4. Estimular la autoestima y la seguridad.

Aprendizaje social

Vygotsky (1979, 1995) citado por Sandia(s/f) describe la necesidad de una expresión grupal, o más bien social, de los conflictos cognitivos, con la finalidad de darle rienda suelta a la discusión de contenidos y experiencias que generen soluciones colectivas y que, una vez interpretadas, el sujeto las pueda incorporar a su forma de análisis y pensamiento personal. Esto es, el cambio de la estrategia intrapersonal por una interpersonal para solucionar los problemas; es decir, el uso del conflicto sociocognitivo como herramienta para la construcción del conocimiento.

Cabe mencionar un concepto importante en esta teoría, el cual Peña (s/f) lo plantea como:

> La zona de desarrollo próximo es la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañeros.

En este sentido, la zona de desarrollo próximo tiene mucha importancia en la enseñanza porque implica que el nivel de desarrollo no está fijo; es decir, hay una diferencia entre lo que puede hacer una persona sola y lo que puede hacer con la ayuda de un compañero más apto o de un instructor.

Aprendizaje significativo

Ausubel, Novak y Hanesian (1989) citado por Masachs y otros (2005) exponen la importancia de la significatividad del aprendizaje que se logra cuando la nueva información, pone en movimiento y relación conceptos ya existentes en la mente del que aprende, es decir, conceptos inclusivos o inclusores. Para este tipo de aprendizaje, Ausubel menciona que debe existir lo que denomina "actitud para el aprendizaje significativo", que se trata de una disposición por parte del aprendiz para relacionar una tarea de aprendizaje sustancial y no arbitraria, con los aspectos relevantes de su propia estructura cognitiva.

Cabe mencionar que Masachs y otros (2005) sostiene que:

> Para Ausubel la resolución de problemas es la forma de actividad o pensamiento dirigido en los que, tanto la representación cognoscitiva de la experiencia previa como los componentes de una situación

> problemática actual, son reorganizados, transformados o recombinados para lograr un objetivo diseñado; involucra la generación de estrategias que trasciende la mera aplicación de principios. Los problemas matemáticos entrañan un no saber, o bien una incompatibilidad entre dos ideas que se transforma en un obstáculo que se necesita atravesar.

En este sentido, la solución de problemas pone en juego el despliegue de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, es decir, implica tanto significatividad lógica como sicológica o fenomenológica. El aprendiz en su naturaleza puede particularmente, transformar el significado lógico de la materia en producto de aprendizaje psicológicamente significativo.

CAPITULO III

MARCO METODOLÓGICO

A continuación se presenta la metodología de investigación en la cual se apoya el presente estudio, esto es, los aspectos importantes tales como: el enfoque, el alcance de la investigación, el diseño, el universo y la muestra además de describir las técnicas y los instrumentos utilizados para la recolección de la información.

3.1 Enfoque y alcance de la investigación

La presente investigación se inicio con la interacción de dos estudiantes seleccionados con el campo de estudio, con el fin de determinar la manera en como abordaban los problemas de Olimpiadas Matemáticas; en base a esto se plantearon varias preguntas de investigación que condujeron a formular el siguiente objetivo general: Proponer al método de Moore para incentivar a los estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA, al logro de un conocimiento significativo en la matemática.

Por lo tanto, se afirma que la investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo de alcance exploratorio, descriptivo y confirmatorio. En base a esto, Arias (2006) comenta lo siguiente:

> La investigación exploratoria es aquella que se efectúa sobre un tema u objeto desconocido o poco estudiado, por lo que sus resultados constituyen una visión aproximada de dicho objeto, es decir, un nivel superficial de conocimiento. (p. 23).

> La investigación descriptiva consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. (p. 24).

En lo que respecta a la investigación confirmatoria Hernández y otros (2003) sostienen lo siguiente:

> La investigación confirmatoria de verificación empírica es aquella cuyo objetivo consiste en verificar la veracidad de una hipótesis, derivada de una teoría a partir de la experiencia directa. (p.103).

Es apropiado destacar lo expuesto por Hernández y otros (2010) el cual sostienen que en la práctica una investigación puede iniciarse como exploratoria y después puede alcanzar otro tipo de investigación.

3.2 Diseño de la investigación

Una vez planteado el objetivo general se empezó a dar una serie de actividades con el fin de darles respuestas a las preguntas de investigación mencionadas anteriormente. Con respecto a esto Hernández y otros (2010) plantean que los estudios cualitativos no son estandarizados porque la investigación no se planea con detalles y está sujetas a la circunstancias de cada ambiente o escenario en particular. Asimismo establece que en el enfoque cualitativo, el diseño se refiere al abordaje general que habrá de utilizarse en el proceso de investigación.

Durante el transcurso del tiempo se desarrolló las actividades mencionadas para comprobar la utilidad del método de Moore para incentivar a los estudiantes de la carrera Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA, al logro de un conocimiento significativo en la matemática. Estas actividades utilizadas son propias de los diseños de teoría fundamentada que según Hernández (2010), es uno de los diseños utilizados dentro del enfoque cualitativo y que tiene como propósito desarrollar teorías fundamentadas en datos empíricos, este diseño se basa en la utilización de procedimientos para generar una teoría a partir de la explicación conceptual de una acción, una interacción o un área específica. Con base a lo expuesto se corrobora que el diseño que se utiliza en el presente estudio es el diseño de teoría fundamentada.

Hernández y otros (2010) sostienen lo siguiente "el planteamiento básico del diseño de la teoría fundamentada es que las proposiciones teóricas surgen de los datos obtenidos en la investigación, más que de los estudios previos." (p. 697). De aquí en adelante toda cita sin referencia corresponde a Hernández y otros (2010).

La teoría fundamentada abarca dos tipos de diseños de investigación: el sistemático y el emergente. En este sentido a medidas que se vayan haciendo las actividades se estará analizando los datos empíricos recolectados de manera cuidadosa para ver la evolución a partir de pasos determinados, por lo tanto la presente investigación de diseño de teoría fundamentada es de tipo sistemático en donde se utiliza la codificación abierta, axial y selectiva.

El diseño sistemático: "resalta el empleo de ciertos pasos en el análisis de los datos y está basado en los procedimiento de Strauss y Corbin (1990 y 1998)…" (p. 688).

En la codificación abierta:

> El investigador revisa todos los segmentos del material para analizarlo y generar -por comparación constante-categorías iniciales de significado….las características se basan en los datos recolectados…estas tienen propiedades representadas por subcategorías las cuales son codificadas (las subcategoría proveen de detalles de cada categoría. (p. 688).

En la codificación axial: "de todas las categorías codificadas de manera abierta, el investigador selecciona a la que considera más importante y la posiciona en el centro del proceso que se encuentra en exploración…" (p. 689).

En la codificación selectiva: "una vez generado el esquema, el investigador regresa a las unidades o segmento y compara con su esquema emergente para fundamentarlo." (p. 691).

3.3. Población y Muestra

3.3.1 Población

La población o universo es el conjunto de todos los casos que concuerdan con determinadas especificaciones. Por su parte Tamayo (2001) la define como la totalidad del fenómeno a estudiar, grupo de entidades y personas o elementos cuya situación se está investigando.

En esta investigación, la población está conformada por los dos estudiantes de la carrera de Educación mención Física y Matemática del Núcleo Universitario "Rafael Rangel" de la Universidad de los Andes.

3.3.2 Muestra

Una vez ya planteado cual es la población de estudio, se procede a tomar un subconjunto de ella a la cual se le va a llamar muestra, esto se debe a que la población está compuesta por un elevado número de sujetos y la recolección de información de todos ellos haría que la investigación fuese engorrosa y por tanto difícil de hacer por el tiempo y el gasto que esto implicaría. Sin embargo, no es primordial en esta investigación analizar a todos los sujetos, puesto que en los estudios cualitativos el tamaño de la muestra no es importante desde una perspectiva probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia; .así lo plantea Hernández y otros (2010). El autor también expone lo siguiente:"la muestra en el proceso cualitativo, es un grupo de personas, eventos, sucesos, comunidades, etcétera, sobre el cual se habrán de recolectar los datos, sin que necesariamente sea representativo del universo o población que se estudia" (p. 562).

En esta investigación la muestra es de tipo no probabilístico, en ésta se hace una suposición de un procedimiento de selección informal poco arbitrario; cabe señalar de que este tipo de muestra no todos los sujetos tienen la oportunidad de ser seleccionados, sino que es el investigador quien decide cuáles serán sus objetos de estudios.

La muestra en esta investigación está formada por sujetos que se ofrecieron como voluntarios debido al objetivo de estudio. Dentro de la muestra no probabilística se pueden ubicar la de los sujetos voluntarios, que son muestras usadas en las ciencias sociales y ciencias de la conducta. En estos casos la elección de los individuos que serán sujetos de análisis depende de las circunstancias fortuitas. Del mismo modo se aplica la muestra de caso-tipo que su objetivo se basa en el carácter cualitativo, donde lo importante es la riqueza y la calidad de la información y no su carácter cuantitativo.

Para el caso de esta investigación se toma la decisión de utilizar sujetos con características similares al problema planteado, centrándose en la demostración de la utilización del método de Moore para poder impulsar a los estudiantes de la carrera Educación mención Física y Matemática a la profundización y al conocimiento significativo de esta disciplina. En este caso la muestra es de tipo homogénea, Hernández y otros (2010), señala que son:"las unidades a seleccionar, poseen un mismo perfil o característica, o bien, comparten rasgos similares. Su propósito es centrarse en el tema a investigar o resaltar situaciones, procesos o episodios en un grupo social". (p. 567).

Por lo anteriormente señalado, en este estudio, la muestra está constituido por dos estudiantes cursantes del décimo semestre de la carrera de Educación Mención Física y Matemática del Núcleo Universitario "Rafael Rangel" de la Universidad de los Andes que son los integrantes del presente trabajo de grado.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

La recolección de datos o resultados es fundamental, ya que con esta acción se obtienen datos útiles de sujetos, comunidades, contextos, entre otros, que permiten capturar de manera completa (lo más que sea posible) los motivos subyacentes, los significados y las razones internas del comportamiento humano a partir de descripciones profundas de imágenes mentales, interacciones, percepciones, experiencias, actitudes, creencias, emociones, pensamiento y conductas. Las técnicas fundamentales para la recolección de datos cualitativos son la observación, la entrevista, los grupos de enfoque, la recolección de documentos y materiales y la historia de vida. Las que se utilizaran en las fases de la investigación son las siguientes:

3.4.1 Observación Cualitativa

"La observación cualitativa no es una mera contemplación (sentarse a ver el mundo y tomar notas); nada de eso, implica adentrarnos en profundidad a situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles sucesos, eventos e interacciones" (p. 587). De este modo la observación permite que el investigador se ubique en el marco de referencia de las personas observadas y así tenga mayor acceso a su forma de ver el mundo.

En este sentido, en el presente estudio se utiliza de manera continua la observación para conocer como la resolución de problemas influye sobre los estudiantes para impulsarlos hacia el mundo de las matemáticas.

La observación se puede clasificar en dos tipo: observación participante y no participante; para el primer caso el observador interactúa con los sujetos observados y en el segundo caso no ocurre ninguna interacción. A su vez existen dos tipos de observación participativa: natural y la artificial. En la presente investigación, se aplica la observación participativa natural, debido a que los observadores interactúan con la resolución de problemas.

3.4.2 Los formatos de observación

La observación cuantitativa es distinta que la cualitativa, por la razón de que en la primera se usan formatos o formularios de observación estandarizados mientras que en la segunda no se utilizan éstos durante la inmersión inicial, puesto que conforme a cómo avanza la inducción, se puede ir generando listados de elementos que no se deben dejar por fuera y unidades que deban analizarse. Por tanto en la presente investigación se utilizaran formatos de observación, "anotaciones", para captar en el momento de inmersión los elementos y unidades fundamentales para la demostración de la misma.

3.4.3 Documentos, registros, materiales y artefactos

Una fuente valiosa de datos cualitativos son los documentos, materiales y artefactos diversos, porque prácticamente a partir de ellos la mayoría de las personas, grupos, organizaciones, comunidades y sociedades los producen y narran sus historias y estatus actuales. Los datos cualitativos principales que se utilizan para una investigación cualitativa son: documentos, registros, materiales y artefactos. Los documentos grupales son documentos generados con cierta finalidad oficial por un grupo de personas; por tanto los datos cualitativos utilizados en esta investigación son documento de carácter grupal ya que ellos aportan evidencia exacta que demuestran dicha estimulación de los estudiantes hacia la profundización de temas "matemáticos" y hacia un conocimiento significativo de esta disciplina.

,

CAPÍTULO IV

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

4.1. Introducción

En las páginas que siguen se presenta una serie de problemas de las Olimpiadas Matemáticas con sus respectivas soluciones, estas fueron desarrolladas por los estudiantes seleccionados de la Carrera Educación mención Física y Matemática del NURR-ULA usando sus esfuerzos intelectuales y el repertorio de conocimientos obtenidos hasta el momento en la carrera sobre los diferentes temas matemáticos. Es necesario acotar que estos problemas fueron planteados por el profesor José Romano Fatale, tutor de esta investigación.

Cabe señalar que al inicio de cada una de las soluciones de los problemas se introducirá un comentario hecho por los propios estudiantes donde describen de manera detallada:

1. La manera en como abordaron y el significado que tuvo para ellos cada solución.
2. Los temas que utilizaron.

Nota: algunos problemas tendrán diferentes soluciones puesto que los estudiantes tuvieron perspectivas diferentes y otras sólo tienen una solución las cuales fueron desarrolladas individualmente por razones diversas.

,

4.2. Presentación de los problemas de Olimpiadas Matemáticas con sus respectivos comentarios y soluciones

4.2.1 Problema 1

Los armarios estudiantiles en cierto College American College se numeran consecutivamente comenzando con el número 1. Los dígitos plastificados usados para numerar dichos armarios cuestan 2 centavos (de dólar) por pieza. Esto es, numerar el armario 9 cuesta 2 centavos y numerar el armario 10 cuesta 4 centavos. Si el costo total fue de 137.94 $, ¿cuántos armarios en total fueron numerados?

Comentario N°1

Este problema plantea que los armarios estudiantiles en cierto American College americano se numeraron consecutivamente comenzando con el 1 y que cada digito plastificado con los que se numeraron los armarios costo dos centavos de dólar. La incógnita consiste en determinar el número total de armarios numerados con un costo total de 137.94 $. Esta solución del problema consiste en determinar, a través de métodos de conteo, los costos de numerar los armarios con un dígito, dos dígitos y tres dígitos, es decir, del 1 al 999. Luego de verificar que la cantidad restante de dinero es insuficiente para numerar hasta los armarios con cinco dígitos, se calcula la cantidad de armarios numerados con el dinero restante. De esta forma la cantidad de armarios numerados es 999 más la cantidad de armarios numerados con el dinero restante.

Los temas matemáticos utilizados son: métodos de conteo y números combinatorios.

,

Solución N°1

El problema plantea que los armarios estudiantiles en cierto college americano se enumeraron consecutivamente a partir del 1 y que los dígitos plastificados usados para numerarlos cuestan 2 centavos de dólar por pieza. En este sentido, el costo de numerar los armarios con respecto a la cantidad de dígitos utilizados es:

Un número de un digito cuesta 2 centavos.
Un número de dos dígitos cuesta 4 centavos.
Un número de tres dígitos cuesta 6 centavos.
Un número de cuatro dígitos cuesta 8 centavos.
$\vdots$
Un número de n dígitos cuesta $2\cdot n$.

De esta manera, numerar los armarios del 1 al 9 tuvo un costo de $9\cdot 2=18$ centavos, puesto que se numeraron 9 armarios y cada uno costó 2 centavos. En cuanto a los armarios estudiantiles del 10 al 99 es evidente que son 90, sin embargo es posible determinar esta cantidad a través de un sencillo principio de conteo con el propósito de en adelante aplicarlo en situaciones de mayor dificultad; este establece que si una actividad se puede hacer en $p_1, p_2, p_3,\ldots, p_n$ pasos sucesivos, entonces dicha actividad se puede realizar de $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots\cdot p_n$ maneras distintas. En el caso de que un armario estudiantil le corresponda un numero constituido por dos dígitos, el primer digito puede tomar los valores del 1 al 9 y el segundo digito del 0 al 9, esto es, que hay $\binom{9}{1}\cdot\binom{10}{1}=9\cdot 10=90$ números formados por dos dígitos, luego como cada armario tiene un costo de 4 centavos se tiene que numerar los armarios del 10 al 99 tuvo un costo de $90\cdot 4=360$ centavos.

Análogamente, la cantidad y el costo de numerar los armarios con tres y cuatro dígitos, respectivamente es:

,

	Cantidad	Costo
Tres dígitos:	$\binom{9}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}=900$	5.400 centavos.
Cuatro dígitos:	$\binom{9}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}=9.000$	72.000 centavos.

Ahora, el costo numerar hasta el armario 999 es igual a la suma de los costos de numerar los armarios con un digito, dos dígitos y tres dígitos, esto es, $18+360+5.400=5.778$ centavos. Por otra parte, el costo total de $137{,}94\$=13.794$ centavos de dólar es insuficiente para numerar hasta armarios con cinco dígitos, puesto que si se hubiera numerado hasta algún armario con cinco dígitos como mínimo el costo total fuese de $5.778+72.000+10=77.788$ centavos. Por consiguiente la cantidad que buscamos de armarios numerados es de 4 dígitos.

En este sentido, $13.794-5.778=8.016$ centavos fue entonces el costo con que se numeraron los armarios con cuatro dígitos, luego como cada número de cuatro dígitos tiene un costo de 8 centavos, se obtiene que con 8.016 centavos se numeraron $\frac{8.016}{8}=1.002$ armarios. Por tanto, en total fueron numerados $999+1002=2001$ armarios. ∎

,

Comentario N°2

El problema consistía en conocer la cantidad de armarios que se numeraron en un American Collage bajo ciertas condiciones. La dificultad a la hora de abordar el problema no fue algo que estuvo presente en dicho emprendimiento puesto que, la manera en como estaba planteado el problema condujo a llevar a cabo una serie acciones; entre ellas: la inferencia de que los armarios que iban a tener los números 10 y 100 (por ejemplo) estarían compuesto por dos y tres dígitos plastificados respectivamente, esto dio pie a dividir el dinero gastado (una vez que se hizo el cambio de conversión de dólar a centavo de dólar) por el valor monetario que valía cada digito, con el fin de determinar los dígitos plastificados que se utilizaron en total. Todo lo anterior conllevo a construir una tabla tipo financiera donde se describe de manera detallada la cantidad de dígitos que se utilizaron para numerar los armarios cuya numeración contenía números que estaban compuestos por $1,2,3$ y más dígitos.

Cabe señalar que hubo cierta inconformidad después de haber resuelto el problema por la razón de que la misma se solucionó bajo una idea poco fundamentada sobre el concepto de dígito, sin embargo, la indagación de esto confirmó que la manera en cómo se consideró el concepto estaba bien; esta indagación condujo a leer temas como la numeración arábiga, tipos de sistemas de numeración y el sistema de numeración base diez. Este último le dio más significado a la solución del problema que se planteó ya que se pudo reconocer que los armarios están numerados tomando en cuenta dicho sistema.

Los temas matemáticos utilizados para la solución son: definición de dígitos, conversión de moneda, regla de tres, operaciones básicas de matemática y sistema de numeración base diez.

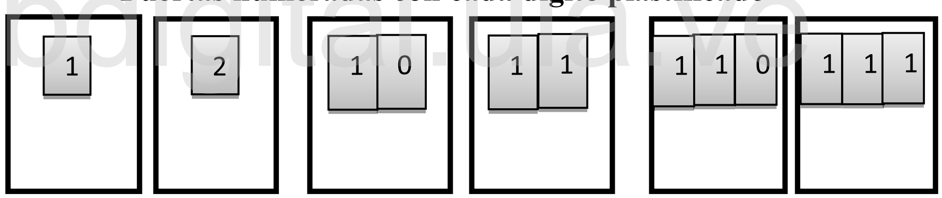
,

Solución N°2

Imagínese las puertas de los armarios una al lado de la otra y numeradas de una manera tal que si un armario tiene un número de n dígitos, entonces para ese armario se utilizaran n piezas a las que se llamaran dígitos plastificados (véase la figura 1) por ejemplo, para numerar el armario número tres se va usar un digito plastificado y para el 12 se va usar dos. Esta explicación es con la finalidad de poder conocer cuántos armarios se numeraron si se gastaron 137.94 $=137940 centavos de dólares para realizar dicho trabajo, siendo el costo de cada digito plastificado igual a 2 centavos de dólar.

Figura 1

Puertas numeradas con cada digito plastificado



Para conocer el número de armarios numerados, véase el cuadro N° 1 que muestra de manera desglosada y partiendo de una regla de tres: la numeración de los armarios, el número de armarios numerados, la cantidad de dígitos utilizados por armario y los dígitos plastificados por utilizar para llegar a dicho objetivo.

Se presenta ahora la regla de tres que se mencionó antes para así conocer los dígitos plastificados que se hicieron con los 137.940 centavos de dólar que se gastaron:

,

1 Digito plastificado $\xrightarrow{\text{cuesta}}$ 2 centavos de dólar

X $\xleftarrow{\text{equivale a}}$ 13.794 centavos de dólar.

Luego, se tiene que:

$$X = \frac{(1\ \ digito)\cdot(13.794\ \ centavos)}{2\ \ centavos} = 6.897 digitos.$$

Cuadro N° 1

Cantidad de dígitos utilizados para los armarios

NUMERACIÓN DE LOS ARMARIOS	ARMARIOS NUMERADOS: $(N.A.N)$	CANTIDAD DE DÍGITOS PLASTIFICADO POR ARMARIO: $(C.D.P.A)$	NÚMEROS DE DÍGITOS UTILIZADOS: $(N.A.N)\cdot(C.D.P.A)$	NÚMERO DE DÍGITOS POR UTILIZAR
1 *al* 9	9	1	$1\cdot 9 = 9$	6.888
10 *al* 99	90	2	$2\cdot 90 = 180$	6.708
100 *al* 999	900	3	$3\cdot 900 = 2.700$	4.008
1.000 *al* 1.999	1.000	4	$4\cdot 1.000 = 4.000$	8
2.000 *y* 2.001	2	4	$2\cdot 4 = 8$	0
Número de armarios numerados	2.001			

,

4.2.2 Problema 2

Sea n un número impar mayor que 1. Pruebe que la sucesión:

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}.$$

Contiene un número impar de números impares.

Comentario

En primera instancia el abordaje de este problema no estuvo tan fácil por la razón de que el planteamiento del mismo no tenía suficientes datos como para atacarlo, sin embargo al variar los valores de n en la sucesión produjo una lista de sucesiones que al observarlas de manera global se notó una similitud con una tabla numérica llamada triángulo de Tartaglia, la comparación de la lista con el triángulo dirigió el rumbo de los planes de utilizar a esta tabla numérica como una herramienta para desarrollar la solución al problema.

Con base a lo expuesto se presentó nuevamente otros inconvenientes por la razón de no saber cómo utilizar el triángulo, sin embargo después de meditar sobre el asunto se hizo una evocación sobre un problema relacionado con este tema, esté se abordó en la materia de análisis matemático y consistía en la demostración de una de las propiedad del triángulo de Tartaglia. Aparte de esto, un punto clave fue la simetría observada en el triángulo (la sucesión en cuestión se encontraba de manera doble en una fila de la misma) esto produjo conjuntamente con la propiedad mencionada a obtener un resultado; este hecho fue analizado con otros conocimientos (suma de números pares e impares) que se obtuvieron en el curso de análisis matemático de la carrera, conduciendo así hacia la solución del problema. Los temas utilizados fueron: sucesión, triángulo de Tartaglia y algunas propiedades de los números enteros como: potencia de base par, suma de números pares e impares.

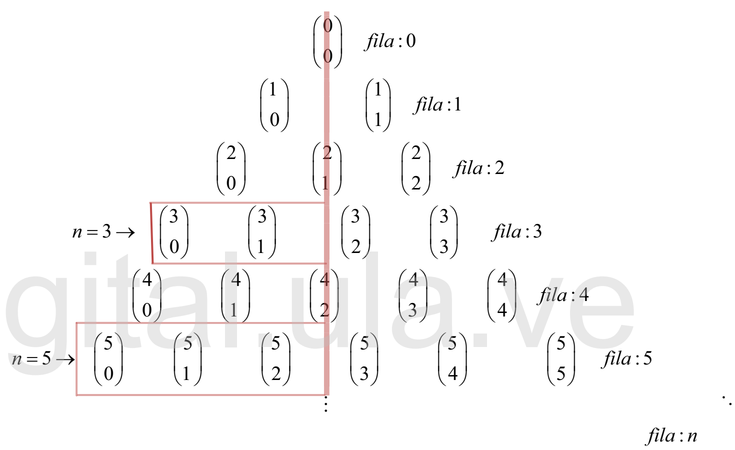
,

Solución

Considérese el triángulo de Tartaglia y una recta perpendicular que pase por los puntos medio de cada una de las filas que las conforman (ver figura 2).

Figura 2

El triángulo de Tartaglia, la recta perpendicular y sus filas impares



La sucesión $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ está conectada con las filas impares del triángulo, menos la fila 1 por las condiciones del problema, tal cual como se muestran encerradas en los recuadros rojos de la figura 2, en ellas existe una simetría que formulada matemáticamente se escribe de la siguiente manera:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^{n-1}.$$

De esta se obtiene la siguiente igualdad:

,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=2^{n-1}.$$

Al restarle $\binom{n}{0}$ a ambos lado de la igualdad conduce a obtener la siguiente expresión:

$$\cancel{\binom{n}{0}}-\cancel{\binom{n}{0}}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=2^{n-1}-\binom{n}{0}.$$

Luego, se obtiene que:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=2^{n-1}-1.$$

Esta expresión indica que la sumatoria de los términos de la sucesión en cuestión es igual a $2^{n-1}-1$, es decir, un número impar, se afirma lo anterior puesto que cualquier potencia de base par es un numero par y si a esto se le resta una unidad el resultado es un número impar; en este sentido se hace el siguiente análisis: si en la sucesión existiese un número par de números impares, la suma de estos seria par y por más que se le sume un numero par o impar de números pares esto seguiría siendo par; por tal motivo se puede concluir que en dicha sucesión existe un número impar de números impares. $\blacksquare$

,

4.2.3 Problema 3

Veinticinco muchachos y veinticinco muchachas se sientan alrededor de una mesa. Pruebe que es siempre posible encontrar una persona cuyos vecinos sean muchachas.

Comentario

El problema consiste en demostrar que si veinticinco muchachos y veinticinco muchachas se sientan alrededor de una mesa, es siempre posible encontrar una persona cuyos vecinos sean muchachas. La demostración se efectuó por reducción al absurdo, delimitando y acotando la cantidad de muchachas y muchachos por cada agrupación de muchachas (muchachas sentadas juntas) sentadas alrededor de la mesa. La realización de esta demostración con llevo varias horas de trabajo, el punto clave fue disponer en una mesa, una serie de fichas que representaran los muchachos y muchachas sentados alrededor, luego intentar colocarlos de tal forma que no fuese posible encontrar una persona cuyos vecinos fuesen muchachas. Todos los intentos fueron fallidos, sin embargo, dieron la base para la demostración.

,

Solución

Consideremos los veinticinco muchachos y veinticinco muchachas sentados alrededor de una mesa. Supongamos que cualquier persona (muchacho o muchacha) tiene como vecinos un muchacho y una muchacha o dos muchachos. Cada agrupación de muchachas (muchachas sentadas juntas) tiene un máximo de dos muchachas, puesto que si tuviera tres o más, entonces una o más *personas* tendrían como vecinos muchachas. Al sentarse consecutivamente cada agrupación de muchachas necesita como mínimo un muchacho a cada extremo (dos muchachos por cada grupo de muchachas). En resumen, los veinticinco muchachos y veinticinco muchachas sentados alrededor de una mesa, tienen un máximo de dos muchachas y mínimo de dos muchachos por cada agrupación de muchachas.

Luego, tenemos que con las veinticinco muchachas podemos formar como mínimo 12 grupos con dos muchachas y 1 grupo con una muchacha, es decir, 13 grupos de muchachas. Pero por cada grupo de muchachas hay un mínimo de dos muchachos y en consecuencia hay como mínimo $13 \cdot 2 = 26$ muchachos. Esto es una contradicción. $\blacksquare$

,

4.2.4 Problema 4

Dado un numero racional, escríbalo como una fracción en donde numerador y denominador no tengan términos en común y calcule el producto de ambos ¿para cuántos números racionales entre 0 y 1 será 20 el resultado?

Comentario

El problema trata sobre conocer cuántos números racionales entre 0 y 1 pueden escribirse como una fracción (en donde numerador y denominador no tengan términos en común) pero siendo el producto del numerador y denominador igual a 20. La primera actividad fue leer y releer puesto que al principio, la compresión del problema no estuvo fácil por razones de confusión entre lo que era un número racional y un número decimal (de hecho la descripción del problema al comienzo de este párrafo fue la forma en cómo lo reescribí para poderlo entender cada vez que lo leía), sin embargo a partir de una revisión bibliográfica se encontró que están conectados, porque este último es una forma de escribir un numero racional.

Lo anterior permitió seguir con el abordaje del problema formando ecuaciones e inecuaciones con las condiciones planteadas en el mismo, todo esto dividió en dos casos el emprendimiento del plan por la razón de haberle aplicado algunas propiedades de los axiomas orden de los números reales a las condiciones; De aquí en adelante se hicieron una serie de sustituciones que llevaron a conseguir varios resultados, a estos se les aplico la definición MCD alcanzando así la solución del mismo.

Temas matemáticos utilizados: números fraccionarios, MCD, ecuaciones, inecuaciones, manejo de condiciones con inecuaciones y propiedades de las inecuaciones.

,

Solución

Sea $\frac{p}{q}$ un número racional (con $q \neq 0$) que cumple con la condición de que el $mcd(p,q)=1$. La idea es buscar fracciones de la forma $\frac{p}{q}$ que también satisfagan las condiciones siguientes: $0<\frac{p}{q}<1$ y $p \cdot q = 20$, para ello realícese el siguiente análisis:

Para que $\frac{p}{q}>0$ se tiene que cumplir que:

Primer caso:

Con p y q ambos positivos lo que implica que $p<q$.

Segundo caso:

Con p y q ambos negativos lo que conlleva a que $p>q$.

Luego, como $p \cdot q = 20$, se tiene que:

- $\frac{20}{q}<q$ y $p<\frac{20}{p}$ cuando p y q son ambos positivo.
- $\frac{20}{q}>q$ y $p>\frac{20}{p}$ cuando p y q son ambos negativos.

De esto se deduce:

$$q^2 > 20 \quad \text{y} \quad p^2 < 20.$$

,

Con la condición expuesta en la parte de arriba se deriva lo siguiente:

1. Cuando p es positivo y cumple con la condición de que $p^2 < 20$. Luegose obtiene que los valores de p son $1, 2, 3, 4$ y partiendo de que $p \cdot q = 20$ se consigue que los valores de q son respectivamente $20, 10\ y\ 5$ (cuando p es igual a 3, q no es un número entero) determinando así que los números fraccionario que cumplen con las condiciones son los siguientes: $\frac{1}{20}, \frac{2}{10}\ y\ \frac{4}{5}$.
2. Análogamente se procede cuando p es negativo y cumplen con $p^2 < 20$, se consigue que los valores de p son $-1, -2, -3, -4$ y partiendo de la fórmula de que $p \cdot q = 20$ se obtiene que los valores de q son respectivamente $-20, -10\ y -5$. Logrando así obtener que los números fraccionarios que cumplen con las condiciones deseadas son $\frac{-1}{-20}, \frac{-2}{-10}\ y\ \frac{-4}{-5}$.

Como $\frac{-2}{-10} = \frac{2}{10}$ no cumple la condición de que el $mcd\left(p,q\right) = 1$, se concluye que los únicos números que satisface las condiciones deseadas son: $\frac{-1}{-20} = \frac{1}{20}$ y $\frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$. $\blacksquare$

,

4.2.5 Problema 5

La sucesión creciente $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \ldots$ consiste de todos aquellos naturales tales que, o son potencias de 3, o son suma de distintas potencias de 3. Encuentre el centésimo término de esta sucesión asumiendo que, 1 es el primero, 3 el segundo y así sucesivamente.

Comentario

En un primer momento se procedió a escribir los elementos de la sucesión en potencias de base tres para luego analizarlas y así conocer cómo es que se genera cada término. La manera en cómo se producía cada término llevó a evocar a el triángulo de Tartaglia y a partir de esto se utilizó esta como herramienta matemática para armar un plan y buscar así el centésimo término de la sucesión.

Hubo obstáculos en cuanto a encontrar el término deseado puesto que aun cuando se tenía una idea de cómo se generaba la sucesión por medio del triángulo de Tartaglia no se podía conseguir de modo exacto la posición de cualquier término que se quisiera, sin embargo después de un tiempo y con trabajo en equipo se descubrió el talón de Aquiles de la dificultad, esto era, que la posición de ciertos términos en la sucesión coincidían con un valor especifico; a partir de esto se pudo llegar a determinar el término que se pedía. Temas matemáticos utilizados son los de sucesión, conversión de número y el triángulo de Tartaglia.

,

Solución

Considere la sucesión creciente pero escrita en potencias de base tres, tal como se muestra en el cuadro 2.

Cuadro 2

Sucesión creciente escrita en potencias de base 3

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**
1	3	4	9	10	12	13	….
3^0	3^1	3^0+3^1	3^2	3^0+3^2	3^1+3^2	$3^0+3^1+3^2$	….

Ahora bien, examinando la sucesión a partir del segundo término (ver cuadro 2), en ella se observa que:

1. El segundo término es 3.
2. El tercer término resulta de la suma "combinación" del primer término y el segundo.
3. El cuarto término es $9=3^2$.
4. El quinto término es la suma del cuarto término y el primero.
5. El sexto término es la suma del cuarto término y el segundo.
6. El séptimo termino la suma del cuarto término y el quinto.

,

En este sentido, la forma en cómo se genera los términos de la sucesión se explica a partir del triángulo Tartaglia, es decir, de la siguiente manera:

1. La fila 1 está vinculada con el exponente 0 de la potencia, ella nos indica que la cantidad de términos que hay desde 3^0 hasta 3^{0+1} es 2^1.
2. La fila 2 está vinculada con los exponente 0 y 1; estos nos indica que la cantidad de términos que hay desde 3^0 hasta 3^{1+1} es 2^2.
3. La fila 3 está vinculada con los exponente 0, 1 y 2; estos nos indica que la cantidad de términos que hay desde 3^0 hasta 3^{2+1} es 2^3.
4. En general la fila n está vinculada con los exponentes $0,1,2,3,\ldots,n-1$; estos nos indica que la cantidad términos que hay desde 3^0 hasta $3^{(n-1)+1}=3^n$ es 2^n.

Cuadro 3

El triángulo de Tartaglia y su conexión con la sucesión

1	
1 1	fila 1: 0
1 2 1	fila 2: 0,1
1 33 1	fila 3: 0,1 ,2
1 4 6 4 1	fila 4: 0, 1 ,2 ,3
1 5 10 10 5 1	fila 5: 0, 1 ,2 , 3, 4
1 6 15 20 15 6 1	fila6: 0,1, 2, 3, 4, 5
1 7 21 35 35 21 7 1	fila 7:0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

,

Por consiguiente, conocemos con exactitud los términos correspondientes a las potencias de 3, esto es que el término 2^n es 3^n. Luego como se quiere hallar el centésimo término, el cual es resultante de la suma del término número 64 y 36. Tenemos que el término $2^6 = 64$ es 3^6 y que el término número 36 es igual a la suma del término $32 = 2^5$ que es 3^5 y el cuarto termino $3^2 = 9$. Por tanto, el centésimo término es $3^6 + 3^5 + 3^2 = 729 + 243 + 9 = 981$. $\blacksquare$

,

4.2.6 Problema 6

¿Cuántos números naturales que no exceden al 2001 son múltiplos del 3 y del 4 pero no del 5?

Comentario N° 1

Una de las dificultades que presento el problema fue la de comprender su sentido práctico, puesto que en el enunciado se propone una conjunción (múltiplos del 3 y del 4) que implicaría que el problema se simplificaría a determinar los múltiplos del 12 y en todo caso plantearlo así no significaría un reto. Es de recalcar que este hecho fue aclarado por nuestro tutor, a partir de allí el camino fue sencillo puesto que incluso el haber resuelto el problema de la primera forma mencionada adelantaba una parte del cálculo a realizar. Este cálculo se fundamentó en la cardinalidad de la unión de conjuntos que para conjuntos finitos A y B, está dada por $\#(A \cup B) = \# A + \# B - \#(A \cap B).$ En cuanto a los temas utilizados se puede mencionar de manera general a la teoría de conjuntos.

,

Solución N°1

Sea A el conjunto de los números naturales múltiplos del 3 y no del 5 que no excedan al 2001 y B el conjunto de los números naturales múltiplos del 4 y no del 5 que no exceden al 2001. El cardinal de $A \cup B$ es la cantidad de números naturales que no exceden al 2001 que son múltiplos del 3 o del 4 y no del 5, lo cual es la solución del problema; claro está considerando al "y" de la pregunta como una disyunción. En este sentido cabe recordar que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Visto el problema de esta manera, es sencillo y se reduce en tres partes, las cuales se presentan a continuación:

1. Para hallar el cardinal de A consideremos primero los números naturales múltiplos del 3 que no excedan al 2001 (un número natural n múltiplo de 3 es de la forma $3 \cdot k$ para algún $k \in$). Para ello veamos la siguiente lista:

$$\begin{array}{ll}
k = 1 & n = 3 \cdot 1 = 3 \\
k = 2 & n = 3 \cdot 2 = 6 \\
k = 3 & n = 3 \cdot 3 = 9 \\
\vdots & \qquad \vdots \\
k = 666 & n = 3 \cdot 666 = 1998 \\
k = 667 & n = 3 \cdot 667 = 2001.
\end{array}$$

Esto nos indica que hay 667 números naturales múltiplos del 3 que no exceden al 2001, sin embargo en esta cantidad hay múltiplos del 5 que debemos excluir, por ejemplo el número 15. Para conseguir esto vamos a contar los múltiplos del 3 y del 5 que no excedan al 2001 (un número natural n múltiplo del 3 y del 5 es de la forma $15 \cdot k$ para algún $k \in$). Utilizando el método anterior tenemos que:

,

$$\begin{array}{ll} k=1 & n=15\cdot 1=15 \\ k=2 & n=15\cdot 2=30 \\ k=3 & n=15\cdot 3=45 \\ \vdots & \vdots \\ k=133 & n=15\cdot 133=1995 \\ k=134 & n=15\cdot 134=2010. \end{array}$$

De lo antes expuesto hay 133 números naturales múltiplos del 3 y del 5 que no exceden el 2001; esta cantidad por ser múltiplo del 3 está incluida en los 667 números naturales antes hallados, por tanto el cardinal de A esta dado por $\# A = 667 - 133 = 534.$

2. Para hallar el cardinal de B, se procede de igual forma a la primera parte, por consiguiente en este caso daremos la cantidad obtenida: $\# B = 500 - 100 = 400.$

   Donde 500 es la cantidad de números naturales múltiplos del 4 que no excedan al 2001 y 100 es la cantidad de números naturales múltiplos del 4 y del 5 que no exceden al 2001.

3. Solo falta determinar el cardinal de $A \cap B$, él cual consiste de los números naturales múltiplos del 3 y del 4 pero no del 5 que no excedan al 2001; esto es equivalente a considerar los múltiplos del 12 pero no del 5 que no exceden al 2001. Para esto consideremos primero los múltiplos del 3 y del 4 que no excedan al 2001, veamos la siguiente lista:

,

$$\begin{array}{ll} k=1 & n=12\cdot 1=12 \\ k=2 & n=12\cdot 2=24 \\ k=3 & n=12\cdot 3=36 \\ \vdots & \qquad\vdots \\ k=166 & n=12\cdot 166=1992 \\ k=167 & n=12\cdot 167=2004. \end{array}$$

De lo anterior tenemos que hay 166 números naturales múltiplos del 12 que no excedan al 2001. Análogamente hay 33 números naturales múltiplos del 12 y del 5 que no exceden al 2001, luego obtenemos que $\#(A\cap B)=166-33=133$.

Finalmente hemos conseguido que:

$$\#(A\cup B)=534+400-133=801. \blacksquare$$

,

Comentario N°2

La interrogante que se presento fue la siguiente: ¿cuántos números naturales que no excede al 2001 son múltiplos del 3 y del 4 pero no del 5? Al empezar no hubo ningún momento de preocupación porque lo primero que se hizo fue escribir varios números que tenían las condiciones deseadas y las no deseadas para analizar el terreno; esto llevo a construir varios conjuntos con condiciones concretas para abordar el problema; una de estas condiciones utilizadas fue la de algunas ecuaciones que inducían a conocer el cardinal aproximado de cada conjunto pero convirtiéndolas en inecuaciones.

Se presentaron dificultades en el momento de determinar la cantidad de números que cumplían con la condición del problema, puesto que cuando varios conjuntos tienen elementos en común y se los quiere contar, se debe tener en cuenta que hay elementos repetidos por tanto hay que restarlos; este incidente pasó pero fue percatado cuando se revisó la solución. En cuanto los temas matemáticos utilizados se pueden mencionar: múltiplos de un número entero, teoría de conjuntos, ecuaciones, inecuaciones y aproximaciones.

,

Solución N°2

Se quiere conocer cuántos números naturales no son de la forma $(3\cdot 5)\cdot a$, $(4\cdot 5)\cdot b$ y $(3\cdot 4\cdot 5)\cdot c$ en donde $a,b,c\in$,para ello se prosigue de la siguiente manera:

Considérese los siguientes conjuntos:

$A=\{x\in \quad | \, x\leq 2.001,\ x=3\cdot n \ \wedge \ n\in \quad \}$. El conjunto de los múltiplos de tres que no exceden al 2.001.

$B=\left\{y\in \quad | \, y\leq 2.001,\ y=4\cdot t \ \wedge \ t\in \quad \right\}$. El conjunto de los múltiplos de cuatro que no exceden al 2.001.

$C=\left\{z\in \quad | \, z\leq 2.001,\ z=(3\cdot 5)\cdot a \ \wedge \ a\in \quad \right\}$. El conjunto de los múltiplos de tres y cinco que no exceden al 2.001.

$D=\left\{b\in \quad | \, b<2001,\ b=(4\cdot 5)\cdot c \ \wedge \ c\in \quad \right\}$. El conjunto de los múltiplos de cuatro y cinco que no exceden al 2.001.

$E=\left\{d\in \quad | \, d<2001,\ d=(3\cdot 4\cdot 5)\cdot e \ \wedge \ e\in \quad \right\}$. El conjunto de los múltiplos de tres, cuatro y cinco que no exceden al 2.001.

El artificio es conocer: $\# A, \# B$ y el $\#\left(A\cup B\right)=\# A+\# B-\#(A\cap B)$ para determinar: $\# C,\ \# D\ \ y\ \# E.$ Luego conjuntamente con $\#(A\cup B)$ se podrá encontrar la cantidad de números que son múltiplos del 3 y del 4 pero no del 5, es decir, $\#(A\cup B)-\# C-\# D+\# E.$ En adelante se determinará el cardinal de los conjuntos antes mencionados.

,

Tenemos que cada elemento de A es de la forma:

$$
\begin{aligned}
&3 \cdot 1 = 3\\
&3 \cdot 2 = 6\\
&3 \cdot 3 = 9\\
&\ \vdots\\
&3 \cdot n < 2001.
\end{aligned}
$$

Si se utiliza la ecuación $3 \cdot n = 2.001$ facilitará determinar el cardinal de A, a partir del valor de n; esto es: $\# A = n = \dfrac{2001}{3} = 667.$ Para encontrar $\# B\ \# C, \# D, \# E$ y $\#(A \cap B)$ se procede de la misma manera a cómo se conoció el cardinal de A. Para los otros casos tenemos que:

1. Con la ecuación $4 \cdot t = 2.001$ se tiene que $\# B = 500,$ puesto que:

$$\# B = t = \frac{2.001}{4} = 500.25 \approx 500.$$

(Si se toma 501 al multiplicarlo por 4, este elemento no cumpliría con las condiciones del conjunto B)

2. Con la ecuación $(3 \cdot 4) \cdot p = 2.001$ se halla que $\#\left(A \cap B\right) = 166,$ puesto que:

$$p = \frac{2.001}{12} = 166.75 \approx 166.$$

3. Con la ecuación $(3 \cdot 5) \cdot a = 2.001$ se tiene que $\# C = 133,$ puesto que:

$$a = \frac{2.001}{15} = 133.4 \approx 133.$$

4. Con la ecuación $(4 \cdot 5) \cdot c = 2.001$ se tiene que $\# D = 100,$ puesto que:

$$c = \frac{2001}{4 \cdot 5} = 100.05 \approx 100.$$

,

- Con la ecuación $(3\cdot 4\cdot 5)\cdot e = 2.001$ se halla que $\# E = 33$, puesto que:

$$e = \frac{2.001}{60} = 33.35 \approx 33.$$

Reuniendo los datos buscados de lo antes expuesto se obtiene que: $\#(A\cup B) - \# C - \# D + \# E = 667 + 500 - 166 - 133 - 100 + 33 = 801.$

Se suma el cardinal del conjunto $\# E$ por la razón de que los múltiplos $(3\cdot 4\cdot 5)\cdot e$ se descontaron del conjunto $C\ y\ D$ al momento de determinar la cardinalidad de ambos. $\blacksquare$

,

4.2.7 Problema 7

Determine el número de maneras de escoger 5, de entre los primeros 18 números naturales, de tal manera que cualesquiera 2 de los números escogidos, difieran por lo menos en 2.

Comentario

Para hallar esta cantidad un punto clave fue considerar su complemento, es decir, el número de maneras de escoger cinco, de entre los primeros 18 números, tal que al menos 2 números escogidos difieran en 1; esta fue la forma en como se abordó el problema, luego se procedió a estudiar todos los casos en donde al menos 2 números difieran en 1, claro está para hacerlo se tuvo que considerar no recontar , para ello en cada caso se excluían los subconjuntos o maneras de escoger contadas en los casos anteriores. Después de estudiar algunos casos se observó cierto patrón que permitió conseguir un resultado inmediato. Es de destacar que en una primera oportunidad se desarrollaron todos los casos obteniendo el mismo resultado, sin embargo para sacar más provecho a la solución se hizo el presente cambio. Cabe mencionar que algunos contenidos utilizados fueron teoría de conjuntos, métodos de conteo, números combinatorios y sumatorias.

,

Solución

Sabemos que hay exactamente $\binom{18}{5}$ formas distintas de escoger 5, de entre los primeros 18 números naturales. Cada forma seleccionada es un subconjunto de 5 elementos de los primeros 18 números naturales. Si tomamos un subconjunto cualquiera y al menos un par de sus elementos difieren en 1, implicaría que este subconjunto debe ser excluido de la cantidad que queremos determinar. En este sentido la solución del problema está enfocada en hallar la cantidad de subconjuntos de 5 elementos, de entre los primeros 18 números naturales, de tal manera que algún par de sus elementos difieran en 1.

Consideremos el conjunto de los primeros 18 números naturales y veamos cuantas formas hay de escoger un par de números de tal manera que difieran en 1, para ello veamos la siguiente lista:

$$\begin{array}{ll} 1-2 & 10-11 \\ 2-3 & 11-12 \\ 3-4 & 12-13 \\ 4-5 & 13-14 \\ 5-6 & 14-15 \\ 6-7 & 15-16 \\ 7-8 & 16-17 \\ 8-9 & 17-18. \\ 9-10 & \end{array}$$

Según lo antes expuesto, hay 17 formas de tomar un par de números entre los primeros 18 números naturales de tal manera que difieran en 1. En adelante se procederá a contar todos los subconjuntos de 5 elementos, tal que estos contengan alguno de estos pares de elementos.

,

Caso 1. Los subconjuntos que contienen al par de elementos $1\ y\ 2$, pueden contener a cualesquiera 3 elementos más de los 16 restantes. Por otro lado hay $\binom{16}{3}$ subconjuntos distintos tomados de estos 16 elementos y que al unir cada uno de estos con el subconjunto que contiene al par de elementos $1\ y\ 2$, obtendríamos $\binom{16}{3}$ subconjuntos distintos de tal manera que 2 de sus elementos (al menos los elementos 1 y 2) difieran en 1.

Caso 2. Los subconjuntos que contienen al par de elementos 2 y 3 son $\binom{16}{3}$, no obstante debemos excluir de esta cantidad los subconjuntos que contengan al par $2\ y\ 3$ contados en el caso anterior, esto es, los subconjuntos que contengan al $1,\ 2\ y\ 3$ los cuales son $\binom{15}{2}$ puesto que los subconjuntos de esta forma pueden contener a cualesquiera 2 elementos más de los 15 restantes. Por tanto en este caso el resultado es $\binom{16}{3}-\binom{15}{2}=\binom{15}{3}$.

Caso 3. Los subconjuntos que contienen al par de elementos 3 y 4 son $\binom{16}{3}$. Al igual que en el caso antes expuesto se deben excluir los subconjuntos contados anteriormente.Con respecto a los subconjuntos contados en el primer caso son 14 puesto que cada subconjunto está obligado a contener a los elementos 1, 2, 3, y 4; lo cual solo permite que dichos subconjuntos contengan un elemento adicional que puede ser cualquiera de los 14 restantes. Los subconjuntos contados en el caso 2 son de la forma $\{2,3,4,\_,\_\}$, es decir, admiten 2 elementos más que pueden ser

,

cualquiera de los 15 restantes excepto el “1” ya que en el caso 2 no fueron contados los subconjuntos que lo contienen. Por tanto se obtiene el siguiente resultado:

Total: $\binom{16}{3}-\binom{14}{1}-\binom{14}{2}=\binom{15}{3}$.

Caso 4. De aquí en adelante solo se hará mención a los resultados puesto que el análisis y la argumentación son análogos a la de los casos anteriores.

Los subconjuntos que contienen al par de elementos 4 y 5 son $\binom{16}{3}$.

Los subconjuntos contados en el caso 1 de la forma $\{1,2,4,5,\_\}$, son 14.

Los subconjuntos contados en el caso 2 de la forma $\{2,3,4,5,\_\}$, son 13.

Los subconjuntos contados en el caso 3 de la forma $\{3,4,5,\_,\_\}$, son $\binom{14}{2}$.

Total: $\binom{16}{3}-\binom{14}{1}-\binom{13}{1}-\binom{14}{2}=\binom{15}{3}-13$.

Caso 5. Lossubconjuntos que contienen al par de elementos 5 y 6 son $\binom{16}{3}$.

Los subconjuntos contados en el caso 1 de la forma $\{1,2,5,6,\_\}$, son 14.

Los subconjuntos contados en el caso 2 de la forma $\{2,3,5,6,\_\}$, son 13.

Los subconjuntos contados en el caso 3 de la forma $\{3,4,5,6,\_\}$, son 13.

,

Los subconjuntos contados en el caso 4 de la forma $\{4,5,6,\_,\_\}$, son $\binom{14}{2}-1$.

Total: $\binom{16}{3}-\binom{14}{1}-2\cdot\binom{13}{1}-\binom{14}{2}+1=\binom{15}{3}-25.$

Caso 6. Subconjuntos que contienen al par de elementos 6 y 7 son $\binom{16}{3}$.

Los subconjuntos contados en el caso 1 de la forma $\{1,2,6,7,\_\}$, son 14.

Los subconjuntos contados en el caso 2 de la forma $\{2,3,6,7,\_\}$, son 13.

Los subconjuntos contados en el caso 3 de la forma $\{3,4,6,7,\_\}$, son 13.

Los subconjuntos contados en el caso 4 de la forma $\{4,5,6,7,\_\}$, son 13.

Los subconjuntos contados en el caso 5 de la forma $\{5,6,7,\_,\_\}$, son $\binom{14}{2}-2$.

Total: $\binom{16}{3}-\binom{14}{1}-3\cdot\binom{13}{1}-\binom{14}{2}+2=\binom{15}{3}-37.$

Podríamos continuar de esta forma, procediendo caso a caso, sin embargo es necesario estudiar un comportamiento en cuanto a los resultados que ha venido arrojando cada procedimiento, estos hasta el momento han sido respectivamente:

$$\binom{16}{3},\binom{15}{3},\binom{15}{3},\binom{15}{3}-13,\binom{15}{3}-25 \text{ y } \binom{15}{3}-37.$$

Lo primero que se observa es un comportamiento decreciente a partir del tercer resultado, luego se hace interesante que después de esté los resultados van

,

decreciendo con una magnitud de 12 unidades. Esto además de ser interesante se hace útil puesto que podría sustituir el estudio de los 11 casos faltantes, que para estos momentos tiende a ser mecanizado, por conseguir un resultado de forma más rápida.

Ahora bien, en cada caso estudiado en un primer momento se determinaron todos los subconjuntos que contenían al par de elementos correspondientes, que de forma invariante para todos los casos fue $\binom{16}{3}$, luego se procedió a restar de esta cantidad el número de subconjuntos contados en los casos anteriores. En este sentido los subconjuntos contados en el primer caso son de la forma $\{1,2,\_,\_,\_\}$, y puesto que los otros tres elementos pueden ser cualesquiera de los 16 restantes antes mencionados, significa que al momento de determinar en los casos posteriores la cantidad de subconjuntos contados en el caso 1 siempre vamos a obtener dos resultados: el primero es el obtenido en el segundo caso por tener un elemento en común, y el segundo en el resto de los casos que no hay ningún elemento en común, es decir, estos subconjuntos admiten 1 elemento de los 14 restantes, por tanto de aquí en adelante la cantidad de subconjuntos contados en el primer caso son 14.

Con respecto a la cantidad de subconjuntos contados en los casos que no tienen ningún elemento en común, tenemos que siempre van a ser 13 la cantidad de subconjuntos excluidos, puesto que por la forma consecutiva de estudiar los casos hay 3 elementos en común con respecto a los subconjuntos excluidos del caso anterior; el elemento no común es precisamente el elemento excluido de los 14. Hasta ahora sabemos que para los casos posteriores el resultado está dado por una diferencia, que consiste en restarle a $\binom{16}{3}$ los subconjuntos contados en los casos anteriores; en este sentido los subconjuntos contados en el primer caso siempre van hacer 14 y los subconjuntos contados en los demás casos que no tengan ningún elemento en común van a ser 13. Solo falta determinar de qué modo varia la cantidad

’

de subconjuntos contados que tengan un elemento en común, para ello observemos el siguiente patrón en cuanto a la cantidad de subconjuntos contados con un elemento en común:

En el caso 2 solo se excluyeron $\binom{15}{2}$ subconjuntos contados en el primer caso, en el caso 3 y 4 se excluyeron en particular $\binom{14}{2}$ subconjuntos contados en el caso 2 y 3, en el caso 5 se excluyeron en particular $\binom{14}{2}-1$ subconjuntos contados en caso 4 y en caso 6 se excluyeron en particular $\binom{14}{2}-2$ subconjuntos contados en caso 5.

Todas estas cantidades representan la forma en que ha ido variando caso a caso la cantidad de subconjuntos contados con un elemento en común, lo más resaltante es que a partir del caso 4, la cantidad de subconjuntos empieza a decrecer a razón de una unidad, este hecho ocurre por el incremento casos a determinar la cantidad de subconjuntos ya contados. Ahora es claro que esto ocurre a partir del caso 4, la razón por la cual no ocurre en los casos anteriores queda como actividad para el lector.

En resumen, en cada caso a partir de 4, la cantidad a restar va a ser los 14 subconjuntos contados en el caso 1, 13 subconjuntos por cada caso que no tenga ningún elemento en común y para los casos que tengan un elemento en común va a ser una unidad menos que en el caso anterior. Luego como solo hay un caso adicional de los cuales los subconjuntos no tienen ningún elemento en común, la cantidad a restar se incrementa 13 menos una unidad del caso en el que los subconjuntos tienen un elemento en común, en consecuencia se obtiene que cada caso decrece con respecto al anterior con un magnitud de 12.

,

Luego la suma de todos los resultados obtenidos por cálculos directos y por el análisis antes hecho son:

$$\underbrace{\binom{16}{3}}_{caso\,1}+\underbrace{\binom{15}{3}}_{caso\,2}+\underbrace{\binom{15}{3}}_{caso\,3}+\underbrace{\binom{15}{3}-13}_{caso\,4}+\underbrace{\binom{15}{3}-25}_{caso\,5}+\underbrace{\binom{15}{3}-37}_{caso\,6}+\cdots+\underbrace{\binom{15}{3}-169}_{caso\,17}.$$

Es decir:

$$\binom{16}{3}+16\cdot\binom{15}{3}-(13+25+37+\cdots+169)=6566.$$

Por tanto, el número de manera de escoger 5, de entre los primeros números 18 números naturales, de tal manera que cualesquiera 2 de los números escogidos, difieran por lo menos en 2, está dado por:

$$\binom{18}{5}-6566=8568-6566=2002.\blacksquare$$

,

4.2.8 Problema 8

Pruébese que, entre cualesquiera 16 números naturales que no excedan al 100, existen 4 de ellos (distintos entre sí) a, b, c y d tales que $a+b = c+d$.

Comentario

El desarrollo de esta demostración no fue en un corto tiempo, cabe resaltar que muchas veces fue un acompañante del día a día, tanto en los momentos de dedicación exclusiva a su realización como en aquellos ratos de espera en las paradas de autobuses o en la interminables colas del comedor de la universidad. La idea fundamental para desarrollar la demostración consistió en hacer un pequeño cambio equivalente en el planteamiento del problema, específicamente considerar que era posible encontrar 4 números a, b, c y d tales que a-b=c-d. Una vez hecho esto se utilizó el principio del palomar en los valores absolutos mínimos y máximos de la diferencia de cualesquiera dos números contenidos en los 100 primeros números naturales con respecto a la cantidad de subconjuntos de dos elementos tomados de los subconjuntos de 16 elementos planteados en el problema, luego en conjunto con otros resultados se obtuvo la demostración. Es importante mencionar que un tiempo después de realizar el problema se encontró un resultado asombroso, con el cual la demostración es directa, trata sobre un tipo de conjuntos llamados "conjuntos de Sidon" y es desarrollado por el gran matemático Paul Erdos.

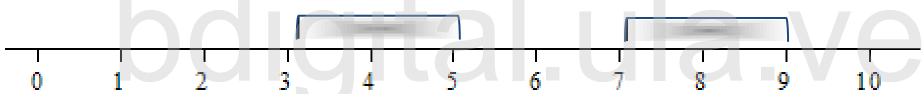
,

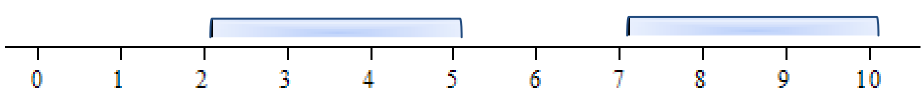
Solución

Antes de empezar la demostración veamos primero algunos pares de números distintos que tengan la misma suma, un ejemplo de ello son aquellos pares de números distintos que al sumarlos den como resultado 10, los cuales los podemos observar en la siguiente lista:

10	
1	9
2	8
3	7
4	6

Graficando dos pares de estos en la recta real obtenemos:





En las gráficas anteriores se sombreo la distancia entre los dos primeros números más próximos al 0 y los dos siguientes, donde es de resaltar que el valor absoluto de la diferencia entre los dos primeros números es el mismo que el de los dos últimos, lo que conduce a conjeturar, si el hecho que dado 4 números distintos y dos de ellos tienen la misma diferencia que los otros dos, entonces dos de ellos tienen la misma suma que los otros dos. Es claro que la respuesta es afirmativa,

,

puesto que dados $a,b,c\ y\ d$ números naturales de tal manera que $a-d=c-b$, entonces sumando $(b+d)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} a-d+(b+d) &= c-b+(b+d) \\ a+\left[-d+(b+d)\right] &= c+\left[-b+(b+d)\right] \\ a+\left[-d+(d+b)\right] &= c+\left[(-b+b)+d\right] \\ a+\left[(-d+d)+b\right] &= c+(0+d) \\ a+(0+b) &= c+d \\ a+b &= c+d. \end{aligned}$$

A este resultado en adelante lo llamaremos lema 1.

Demostración:

Consideremos cualesquieras 16 números naturales que no excedan al 100, sabemos que hay $\binom{16}{2}=120$ subconjuntos distintos de 2 elementos y puesto que ninguno de los elementos de cada subconjunto exceden al 100, el máximo valor absoluto de la diferencia de los elementos es 99 y la mínima es 1, cualquier otro valor comprendido entre 1 y 99 está dado por otro par de elementos de alguno de los 120 subconjuntos, es decir, hay 99 valores absolutos de diferencias posibles. Tal vez podamos pensar que es momento de aplicar el principio de palomar, sin embargo, debemos considerar primero que al aplicarlo podríamos obtener dos subconjuntos que tuvieran un elemento en común, esto es, que tendríamos “3 elementos tal que se cumple la propiedad” y necesitamos 4 elementos. En este sentido, si esto ocurriera tendríamos como máximo 16 pares de subconjuntos, de tal manera que cada par tenga un elemento común, distinto en cada caso.

,

Además, ¿Es posible que hallan 3 subconjuntos distintos con un elemento en común, de tal manera que sus diferencias sean las mismas?, la respuesta es que no es posible, ya que si consideramos 3 subconjuntos distintos con un elemento en común $\{a,b\}, \{a,c\}\ y\ \{c,d\}$ de tal manera que los valores absolutos de la diferencia de los elementos de cada subconjunto sean las mismas. Luego, aplicando la definición de valor absoluto y considerando que los subconjuntos son distintos, obtenemos que:

Para $a, b\ y\ d$ se cumple sólo una de las siguientes identidades: $\begin{array}{l} a-b=d-a \\ a-d=b-a. \end{array}$

Para $a, c\ y\ d$ se cumple sólo una de las siguientes identidades: $\begin{array}{l} a-c=d-a \\ a-d=c-a. \end{array}$

Luego, combinando cada caso obtenemos:

1. Si $a-b=d-a$ y $a-c=d-a$, entonces:
$$b-a=c-a \Rightarrow b=c.$$

2. Si $a-b=d-a$ y $a-d=c-a$, entonces:
$$(a-d)+(d-a)=(c-a)+(a-b) \Rightarrow b=c.$$

3. Si $a-d=b-a$ y $a-c=d-a$, entonces:
$$(a-d)+(d-a)=(b-a)+(a-c) \Rightarrow b=c.$$

4. Si $a-d=b-a$ y $a-d=c-a$, entonces:
$$b-a=c-a \Rightarrow b=c.$$

,

Para cada caso se obtiene que $b = c$, por tanto $\{a, b\} = \{c, a\}$ lo cual es una contradicción.

Es momento de aplicar el principio del palomar, en el cual en un primer momento 99 subconjuntos les corresponden diferencias distintas, luego los otros 21 subconjuntos le corresponderían en principio al menos una de esas diferencias. Es necesario acotar que de los 21 subconjuntos hay como máximo 16 que podrían compartir la misma diferencia con otros 16 subconjuntos (de los 99), de tal manera que tengan un elemento en común, distinto para cada par de subconjuntos. En este sentido, si alguno de estos 16 le corresponde una diferencia en común a otro subconjunto, con ningún elemento en común, el problema estaría resuelto, sin embargo es posible que a cada subconjunto (de los 16) le correspondan diferencias con otros subconjuntos que tengan un elemento en común.

En este caso, a cada uno de los 16 subconjuntos le correspondería una diferencia que compartiría con otro subconjunto (de los 99), con el que tendría un elemento común. A los otros 5 subconjuntos le corresponderían diferencias distintas a la de los 16, puesto que no hay 3 subconjuntos distintos con un elemento en común, de tal manera que los valores absolutos de las diferencias de sus elementos sean las mismas. Si a estos 5 subconjuntos le corresponden diferencias con otros subconjuntos que no tengan ningún elemento en común, entonces el problema estaría resuelto, en el caso contrario tendríamos dos subconjuntos con un elemento en común , este elemento en común está entre los 16 subconjuntos antes

,

mencionados, de esta forma tendríamos otros dos subconjuntos más con el mismo elemento en común. De manera general, tendríamos los subconjuntos $\{a,b\},\{a,c\}\ y\ \{a,d\},\{a,e\}$ donde a es el elemento en común, en donde aplicando la definición de valor absoluto y considerando que los subconjuntos son distintos, obtenemos que:

Para $a,b\ y\ c$ se cumple sólo una de las siguientes identidades: $\begin{matrix} a-b=c-a \\ a-c=b-a. \end{matrix}$

Para $a,d\ y\ e$ se cumple sólo una de las siguientes identidades: $\begin{matrix} a-d=e-a \\ a-e=d-a. \end{matrix}$

Luego, combinando cada caso obtenemos:

1. Si $a-b=c-a$ y $a-d=e-a$, entonces:
   $(a-d)+(c-a)=(e-a)+(a-b),$ luego $c-d=e-b.$

2. Si $a-b=c-a$ y $a-e=d-a$, entonces:
   $(a-e)+(c-a)=(d-a)+(a-b),$ luego $c-e=d-b.$

3. Si $a-c=b-a$ y $a-d=e-a$, entonces:
   $(a-c)+(e-a)=(b-a)+(a-d),$ luego $e-c=b-d.$

4. Si $a-c=b-a$ y $a-e=d-a$, entonces:
   $(a-c)+(d-a)=(b-a)+(a-e),$ luego $d-c=b-e.$

En cualquier caso obtenemos que hay 4 números naturales que no exceden al 100 tal que sus diferencias sean iguales. Luego por el lema 1 queda esto demostrado. $\blacksquare$

,

4.2.9 Problema 9

Sea S un conjunto con 6 elementos. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 2 subconjuntos de *S*, no necesariamente distintos, de forma tal que la unión de dichos subconjuntos sea *S*?

Comentario

Lo primero que se hizo fue leer muchas veces el problema, esto acarreó utilizar el conjunto de partes de S y su cardinalidad, para conocer la cantidad de subconjuntos de S. Cabe mencionar el hecho de que los subconjuntos no necesariamente sean distintos*,* generó muchas dudas a la hora de dar un paso hacia la solución del problema, sin embargo el intercambio de conocimiento y el debate mientras se estaba resolviendo el problema aclaro la duda que se tenía, puesto que se infirió que el único subconjunto que se podía unir con el mismo para que diera S es el mismo S.

La aclaración mencionada llevó a usar el combinatorio $\binom{2^6}{2}$ que indican la cantidad de pares de subconjuntos que se pueden formar con el conjunto de partes de S más no la solución del problema. Luego de esto, el interés fue buscar lo opuesto de lo que pedían (pareció más fácil), es decir, el complemento para luego restárselo a $\binom{2^6}{2}$ y así determinar lo que se quería. Para continuar los planes se valió del uso de los cardinales de los subconjuntos de S para formar conjuntos y así utilizar el combinatorio con repetición $C_{R_{7,2}} = 28$ que indica de cuantas maneras se puede tomar dos subconjuntos de distintos o igual cardinal y de esta forma observar si el resultado es mayor, menor o igual a 6 para hacer un respectivo análisis a partir de un cuadro detallado y el triángulo de Tartaglia. Es necesario mencionar que el triángulo de Tartaglia se usó de una manera tal que no se explicó dentro del

,

problema, sin embargo esta manera se describe detalladamente en la segunda parte del capítulo V.

Temas matemáticos utilizados: teoría de conjunto: tipo de conjuntos, operaciones básicas, conjunto de partes, números combinatorios, combinación con repetición y el triángulo de Tartaglia.

,

Solución

Sea $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, la idea consiste en buscar de cuantas maneras se puede escoger dos subconjuntos de S cómo por ejemplo $\{1,2,3,4\}$ y $\{5,6,3\}$, de forma tal que al unirse suceda que $\{1,2,3,4\}\cup\{5,6,3\}=\{1,2,3,4,5,6\}$.

En lo que respecta a que los subconjuntos no tienen que ser necesariamente distinto, el único subconjunto que cumple con esa condición es el mismo S por tanto no hay que preocuparse por esa parte. Ahora bien, considérese el número de subconjunto que se pueden formar con el conjunto S, esto es, $\#P(A)=2^6=64$. Para conocer con detalle estos subconjuntos observamos el siguiente cuadro:

CUADRO 4

El triángulo de Tartaglia y los subconjuntos de S

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

,

En la parte anterior se expone el triángulo de Tartaglia, en este se puede observar, en la parte sombreada, que la cantidad de subconjuntos de S de acuerdo a sus elementos son: 1 subconjunto con 0 elementos, 6 subconjuntos con 1 elementos, 15 subconjuntos con 2 elementos, 20 subconjuntos con 3 elementos, 15 subconjuntos con 4 elementos, 6 subconjuntos con 5 elementos y 1 subconjunto con 6 elementos.

Por otro lado, puesto que el número de subconjuntos que se pueden formar con el conjunto S es $\#P(S) = 2^6 = 64,$ entonces significa que existen $\binom{64}{2} = 2016$ maneras de escoger dos subconjuntos S, pero ¿cuántos de ellos cumplen con la condición que nos indica el ejercicio?

En este sentido si se examina primero aquellos subconjuntos que no cumplen con la condición, es decir, los subconjuntos que al unirlos no den como resultado el conjunto S y así una vez obtenido esto, se le resta a $\binom{64}{2} = 2016$ para obtener lo que realmente se quiere. Para esto se considera un conjunto $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, conformado por elementos que indican la cardinalidad de los subconjuntos de S, y también a $C_{R_{7,2}} = C_{R_{7+2-1,2}} = C_{R_{8,2}} = 28$ que indica de cuantas manera se puede tomar dos subconjuntos de distintos o igual cardinal. Esto se hace con el fin de sumar los cardinales de cada par de subconjuntos y observar si el resultado da mayor, menor o igual o menor que 6 (véase el siguiente cuadro) para así hacer su respectivo análisis y conseguir la cantidad los subconjuntos que al unirlos no den como resultado el conjunto S. Dicha condición en adelante la denotara con (*).

’

CARDINALES POSIBLES DE LOS PARES DE SUBCONJUNTO TOMADOS	SUMA DE LOS CARDINALES DE LOS SUBCONJUNTOS	OBSERVACIONES	NÚMEROS DE PARES DE SUBCONJUNTOS QUE NO CUMPLEN CON (*)
$\{0,6\}$	$0+6=6$	Cada subconjunto de S está en el mismo.	0
$\{1,6\}$	$1+6=7$		0
$\{2,6\}$	$2+6=8$		0
$\{3,6\}$	$3+6=9$		0
$\{4,6\}$	$4+6=10$		0
$\{5,6\}$	$5+6=11$		0
$\{6,6\}$	$6+6=12$		0
$\{0,0\}$	$0+0=0$	El conjunto vacío no se encuentra doble en $P(S)$.	$\binom{1}{0}\cdot\binom{1}{0}=1$
$\{0,1\}$	$0+1=1$	La suma de los cardinales es menor que el cardinal de S por tanto todos estos pares de subconjuntos al unirse nunca darán al conjunto S.	$\binom{1}{0}\cdot\binom{6}{1}=6$
$\{0,2\}$	$0+2=2$		$\binom{1}{0}\cdot\binom{6}{2}=15$
$\{0,3\}$	$0+3=3$		$\binom{1}{0}\cdot\binom{6}{3}=20$
$\{0,4\}$	$0+4=4$		$\binom{1}{0}\cdot\binom{6}{4}=15$

$\{0,5\}$	$0+5=5$		$\binom{1}{0}\cdot\binom{6}{5}=6$
CARDINALES POSIBLES DE LOS PARES DE SUBCONJUNTO TOMADOS	**SUMA DE LOS CARDINALES DE LOS SUBCONJUNTOS**	**OBSERVACIONES**	**NÚMEROS DE PARES DE SUBCONJUNTOS QUE NO CUMPLEN CON (*)**
$\{1,1\}$	$1+1=2$	La suma de los cardinales es menor que el cardinal de S por tanto todos estos pares de subconjuntos al unirse nunca darán al conjunto *S*.	$\binom{6}{2}=15$
$\{1,2\}$	$1+2=3$		$\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{2}=90$
$\{1,3\}$	$1+3=4$		$\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{3}=120$
$\{1,4\}$	$1+4=5$		$\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{4}=90$
$\{2,2\}$	$2+2=4$		$\binom{15}{2}=105 \text{ en donde } \binom{6}{2}=15$
$\{2,3\}$	$2+3=5$		$\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{3}=300$
$\{1,5\}$	$1+5=6$	Por cada subconjunto de un elemento hay un subconjunto de 5 elementos que al unirlos da el conjunto *S*.	$\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{5}-\binom{6}{1}\cdot\binom{1}{0}=30$

,

$\{2,4\}$	$2+4=6$	Por cada subconjunto de dos elementos hay un subconjunto de 4 elementos que al unirlos da el conjunto *S*.	$\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{4}-\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{0}=210$
$\{2,5\}$	$2+5=7$	Por cada subconjuntos de dos elementos hay 2 subconjuntos de cinco que al unirlo con él da el conjunto *S*.	$\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{5}-\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}=60$
CARDINALES POSIBLES QUE PUEDEN TENER DE UN PAR DE SUBCONJUNTO TOMADOS DE $P(S)$	**SUMA DE LOS CARDINALES DE LOS SUBCONJUNTOS**	**OBSERVACIONES**	**NÚMEROS DE PARES DE SUBCONJUNTOS QUE NO CUMPLEN CON (*)**
$\{3,4\}$	$3+4=7$	Por cada subconjuntos de tres elementos hay 3 subconjuntos de cuatro que al unirlo con él da el conjunto *S*.	$\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{4}-\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}=240$
$\{3,5\}$	$3+5=8$	Por cada subconjuntos de tres elementos hay 3 subconjuntos de cinco que al unirlo con él da el conjunto *S*.	$\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{5}-\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}=60$
$\{4,5\}$	$4+5=9$	Por cada subconjuntos de cuatro elementos hay 4 subconjuntos de cinco que al unirlo con él da el conjunto *S*.	$\binom{6}{4}\cdot\binom{6}{5}-\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{3}=30$
$\{4,4\}$	$4+4=8$	Por cada subconjuntos de cuatro elementos hay 6 y 3 subconjuntos de cuatro que al unirlo con él da el conjunto *S*.	$\binom{15}{2}-\left[\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{2}-\binom{6}{4}\cdot\binom{3}{2}\right]=60$

,

$\{5,5\}$	$5+5=10$	La unión de dos subconjuntos de 5 elementos da *S*.	0
$\{3,3\}$	$3+3=6$	Por cada subconjunto de tres elementos hay un subconjunto de tres elementos que al unirlo da S. (por simetría hay 10 pares)	$\binom{20}{2}-\left[\binom{4}{2}\right]=180$
		TOTAL	**1652**

’

Se realizó algunas observaciones como: *Por cada subconjunto de dos elementos hay 2 subconjuntos de cinco que al unirlo con él da el conjunto S,* es decir, que en realidad hay dos subconjuntos de cinco elementos que tienen cuatro elementos en común y que cuando se unen con el conjunto de dos elementos da como resultado el conjunto S. Para conocer cómo se consiguieron estos datos del cuadro remítase a la segunda parte de capítulo V donde se habla sobre vectores combinatorios en el triángulo de Tartaglia. Esto le permitirá aclarar sus dudas**.**

Existen 1.652 pares de subconjuntos de *S* que no cumplen con la condición de que al unirlo den el conjunto S, por tanto el número de subconjuntos que cumple con (*) es:

$$2016-1652=364.$$

Sin embargo, dentro de los 2016 no entra el par de subconjuntos $\{\#S,\#S\}=\{6,6\}$ y este cumple con (*), lo cual significa que la cantidad de subconjuntos que al unirlos no dan como resultado el conjunto *S* es:

$$2016-1652+1=365.\blacksquare$$

,

4.2.10 Problema 10

Defínase la "suma" de un conjunto formado por números, como la suma de sus elementos. Sea S un conjunto de números naturales ninguno de los cuales es mayor que 15. Supóngase que ningún par de subconjuntos disjuntos de S tienen la misma "suma". ¿Cuál es la mayor suma que un conjunto S con estas propiedades puede tener?

Comentario

Este problema fue difícil para abordarlo por la definición dada en el planteamiento del mismo y por la manera en como estaba planteado, la idea tenía que ver con conseguir de un conjunto U conformado por los 15 primeros números naturales un subconjunto que cumpla con las siguiente condiciones: que ningún par de subconjuntos disjuntos del subconjunto de U tengan la misma suma y averiguar cuál es la mayor suma que un subconjunto U de con estas propiedades puede tener, a este subconjunto se le llamo S_M.

Para su solución en primer lugar fue analizar varios conjuntos pero de menor cardinal y con las misma condiciones que el planteado en el problema, el fin era ver un patrón de comportamiento pero aparentemente no conseguía nada, hasta que después de mucho tiempo se percibió algo muy interesante, tres números consecutivos cualesquiera cumplían con una de las condiciones del problemas; esto conllevo a buscar los tres números consecutivos más alto del conjunto U para así completar las condiciones planteadas y luego ponerlos como elementos de S_M (el conjunto que se quiere buscar para solucionar el problema) y a partir de ellos otros números de U que me permitiesen conocer los elementos restantes del conjunto a buscar. En general se utilizó la teoría de conjuntos.

,

Solución

Cuando se define la suma de un conjunto, se refiere a que si tenemos un conjunto cualquiera como $A=\{a,b,c,d,e\}$ entonces, para hallar la suma lo que se hace es simplemente sumar los elementos del mismo; de esta manera la suma de ese conjunto está dada por: $a+b+c+d+e$. La idea principal del problema es trabajar con un conjunto U conformado por los 15 primeros números naturales y de él encontrar un subconjunto que cumpla con la siguiente condición: ningún par de subconjuntos disjuntos de él tienen la misma suma. Existen muchos con esta condición pero la idea es encontrar aquel que tenga la mayor suma, (a este subconjunto llamémoslo S_M), para hacerlos más inteligible partamos de la siguiente reformulación del ejercicio:

Sea $U=\{1,2,3,...,15\}$ y U_s un conjunto conformado por todos los subconjuntos de U que cumplen con la condición: de que ningún par de subconjuntos disjuntos de él tengan la misma suma. En este sentido, S_M es aquel elemento de U_s cuya suma de sus elementos es mayor a las otras sumas de los otros subconjuntos de U_s Por ejemplo $\{3,5,6,7\}\subset U$ y al mismo tiempo pertenece a U_s porque cumple con la condición de que ningún par de subconjunto disjuntos tienen la misma suma; esto es:

$\{3\}$ y $\{5,6,7\}$ en donde $3\neq 18$ $\{3,5\}$ y $\{6,7\}$ en donde $8\neq 13$

$\{5\}$ y $\{3,6,7\}$ en donde $5\neq 16$ $\{5,6\}$ y $\{3,7\}$ en donde $11\neq 10$

$\{6\}$ y $\{3,5,7\}$ en donde $6\neq 15$ $\{3,6\}$ y $\{5,7\}$ en donde $9\neq 12$

$\{7\}$ y $\{3,5,6\}$ en donde $7\neq 14$

,

La suma de los elementos de este subconjunto $3+5+6+7=21$ y comparándola con la suma de los elementos del conjunto $\{14,15\}\in U_s$ se observa que está es menor que la suma sacada anteriormente. De estos dos ejemplos se puede inferir que S_M debe contener números naturales cercanos al número 15 para así obtener la mayor suma.

Lema:

Todo subconjunto de Z conformado por tres números consecutivos cumplen condición de que ningún par de subconjuntos disjuntos de él tienen la misma suma.

Sea $B\subset Z$ Y $B=\{n,n+1,n+2\}$ en dónde $n\in Z$. Los pares de subconjuntos disjuntos de B son:

$\{n\}$ y $\{n+1\}$ donde $n<n+1$

$\{n\}$ y $\{n+2\}$ donde $n<n+2$

$\{n+1\}$ y $\{n+2\}$ donde $n+1<n+2$

$\{n\}$ y $\{n+1,n+2\}$ donde $n<2n+3$

$\{n+1\}$ y $\{n,n+2\}$ donde $n+1<2n+2$

$\{n+2\}$ y $\{n,n+1\}$ donde $n+1<2n+1$.

Del lema anterior más la inferencia de que S_M debe contener números naturales cercanos al número 15 conduce a deducir que los números 13,14,15 son elementos pertenecientes de S_M. Para conocer el resto de los elementos de S_M se tiene que evaluar los números altos cercanos a trece, para esto observe el siguiente cuadro:

,

Cuadro 8

Evaluación de los números cercanos al trece con los números $13,14,15$

12	$12+15=13+14=27$
11	Si cumple
10	$10+15=11+14=25$
9	$9+15=11+13=24$
8	si cumple
5	$8+5=13$
4	$8+4=12$
3	$3+8=11$
2	$2+11=13$
1	$1+12=13$

Por tanto $S_M=\{8,11,13,14,15\}$ y la suma de los elementos de este conjunto es: $8+11+13+14+15=64.$ ■

,

CAPITULO V

EL TRIANGULO DE TARTAGLIA

5.1. Introducción

Al realizar una lectura detallada de los comentarios de cada problema del capítulo IV, se halla los temas matemáticos utilizados en cada solución. Entre ellos las propiedades del Triángulo de Tartaglia. En este sentido, durante el transcurso de la investigación se observó interés sobre este tema logrando con ello el presente estudio del Triángulo de Tartaglia.

A continuación, se expondrán los contenidos correspondientes al Triángulo de Tartaglia; la cual consta de dos partes, en la primera se encuentran puntos muy concretos sobre la historia, la construcción, la relación que tiene con los números combinatorios y con el binomio de Newton; así como también algunas propiedades de este con sus debidas demostraciones. En cuanto a la segunda parte está compuesta por las interpretaciones propias desarrolladas sobre el Triángulo de Tartaglia a partir de los números combinatorios. Aparte de esto se presentara la idea de "vectores combinatorios" como innovación propia de esta investigación.

Todo esto es con el fin de dar a conocer los frutos que género el método de Moore, esto es, la curiosidad, la indagación, la creatividad y la innovación por parte de los estudiantes.

,

5.2. Historia

El Triángulo de Pascal o de Tartaglia es una tabla numérica en forma de triángulo que data del siglo X en India, se halla en los comentarios del *Chandashastra*, un libro antiguo indio de procedía del sánscrito escrito por Píngala alrededor del año 200 a.C, en este libro se señala que había un personaje de nombre Halayudha que recogía combinaciones de sonidos en forma de triángulo. Aparte de esto, algunas de las propiedades del triángulo fueron discutidas después por los matemáticos persasAl-Karaji (953–1029) y Omar Khayyám (1048–1131); de aquí que en Irán sea conocido como el *triángulo Khayyam-Pascal* o simplemente el *triángulo Khayyam*. Se conocían también muchos teoremas relacionados, incluyendo el teorema del binomio.

En China, este triángulo era conocido desde el siglo XI por el matemático chino Jia Xian (1010–1070). En el siglo XIII, Yang Hui (1238–1298) presenta el *triángulo aritmético*, equivalente al triángulo de Pascal, de aquí que en China se le llame *triángulo de Yang Hui*. Hay una prueba irrefutable que se ha popularizado ampliamente, se trata del viejo método del diagrama de los siete cuadrados multiplicativos del Szu Yuan Yie Chien (el precioso espejo de los cuatro elementos).

Luego, Petrus Apianus (1495–1552) publicó el triángulo en el frontispicio de su libro sobre cálculos comerciales *Rechnung* (1527). Éste es el primer registro del triángulo en Europa. En Italia, se le conoce como el *triángulo de Tartaglia*, en honor al algebrista italiano Niccolò Fontana "Tartaglia" (1500–1577). También fue estudiado por Michael Stifel (1486-1567) y François Viète (1540-1603).

Actualmente esta tabla lleva por nombre del triángulo de Pascal o de Tartaglia en honor al filósofo y matemático Blaise Pascal (1623-1662). Nicolás fontana "Tartaglia", el primero por el *Tratado del triángulo aritmético* que publicó en 1654, en donde reúne varios resultados ya conocidos sobre el triángulo, y los emplea para resolver problemas ligados a la teoría de la probabilidad; y el segundo por ser el primer italiano que lo publicó en Europa.

,

Para evitar dicotomía, de ahora en adelante a esta tabla numérica la llamaremos Triangulo de Tartaglia.

5.3. Construcción del Triángulo de Tartaglia

El triángulo se construye desde la cúspide (el único vértice del triángulo que se conoce) hacia abajo. Luego se prosigue de la siguiente manera:

1. El primer elemento (la cúspide) es el elemento 1 formando así la fila 0.
2. La fila 1 está formada por los elementos 1 y 1.
3. La fila 2,3,..,n se construye de la siguiente manera:

   Cada fila está formada por un elemento más que la fila anterior, el primer y último elemento de la fila siempre será 1 y cada elemento interior será el resultado de sumar los dos elementos que se sitúan por encima de él.

Para un mejor entendimiento lea lo escrito en la parte de arriba y al mismo tiempo observe la figura 3.

Figura 3:

Triángulo de Tartaglia

Cúspide $\longleftarrow$ 1 $fila:0$

1 1 $fila:1$

1 2 1 $fila:2$

1 3 3 1 $fila:3$

1 4 6 4 1 $fila:4$

$\vdots$ $fila:n$

,

5.4. Triángulo de Tartaglia y los números combinatorios $C_{n,k}$

Cada uno de los elementos del Triángulo de Tartaglia se puede escribir como números combinatorios $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ en donde n representara la fila en donde se encuentra y k el lugar que ocupa en ella. Recordemos que el $C_{n,k}$ indica la cantidad de listas de tamaño k que se puede formar con un conjunto de tamaño n en donde $0 \le k \le n$; y el orden de los elementos no importa. Véase figura 4.

Figura 4

El Triángulo de Tartaglia escrito a partir de números combinatorios

$$
\begin{array}{ccccccccc l}
 & & & & 1 & & & & & \text{fila: } 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \text{fila: } 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \text{fila: } 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \text{fila: } 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \text{fila: } 4 \\
 & & & & \vdots & & & & & \text{fila: } n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc l}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & \text{fila: } 0 \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \text{fila: } 1 \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \text{fila: } 2 \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \text{fila: } 3 \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \text{fila: } 4 \\
 & & & & \vdots & & & & & \text{fila: } n
\end{array}
$$

,

5.5. El Binomio de Newton y el Triángulo de Tartaglia

Véase el siguiente cuadro

CUADRO 9

ALGUNAS POTENCIAS DE UN BINOMIO ANALISADAS DETALLAMENTE

POTENCIA DE UN BINOMIO	$(x+y)^2$	$(x+y)^3$	$(x+y)^4$
MULTIPLICACION DE LOS BINOMIO	$(x+y)\cdot(x+y)$	$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$	$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$
TODOS LOS POSIBLES PRODUCTOS	xx, xy, yx, yy	xxx, xxy, xyx, yxx, xyy, yxy, yyx, yyy	$\binom{4}{0}=1, \binom{4}{1}=4, \binom{4}{2}=6, \binom{4}{3}=4, \binom{4}{4}=1$
DESARROLLO DE LA POTENCIA	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$	$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

,

Un binomio es una expresión algebraica que está formada exactamente por dos términos separados por + o −, como $x+y$ o $ab-cd$. El binomio de Newton nos indica que la expresión general $(x+y)^n$, es decir, un binomio cualquiera elevado a la n-ésimo potencia, está dada por:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n$$

o

$$\left(x+y\right)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

Este teorema fue formulado en la edad media y desarrollado (alrededor de 1676) para exponentes fraccionarios por el científico inglés Sir Isaac Newton, lo que le permitió el uso de sus recién descubiertos métodos de cálculo para resolver muchos problemas difíciles.

¿Qué relación guarda con el Triángulo de Tartaglia?

Cada uno de los $n+1$ términos del desarrollo completo del binomio tiene coeficientes, los cuales se pueden escribir como números combinatorios (véase las formulas descritas anteriormente), Estos números mencionados coinciden exactamente con los elementos de la fila del Triángulo de Tartaglia cuyo número de orden es la potencia a la que esta elevada el binomio.

,

5.6. Propiedades del triángulo de Tartaglia

Algunas propiedades del Triángulo de Tartaglia son:

T1. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

T2. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

T3. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$.

T4. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots\pm\binom{n}{n-1}\pm\binom{n}{n}=0$.

T5. $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=2^{n-1}$siendo n impar.

$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}=2^{n-1}$ siendo n par.

T6. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=2^{n-1}$ siendo n par.

. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}=2^{n-1}$ siendo n impar.

T7. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$.

para n impar.

T8. Principio de Hockey

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+t-1}{n}+\binom{n+t}{n}=\binom{n+t+1}{n+1}.$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+t-1}{t-1}+\binom{n+t}{t}=\binom{n+t+1}{t}.$$

,

5.6.1Demostraciones de cada una de las propiedades

T1. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$

Demostración

Por definición tenemos que

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot\left[n-1-(k-1)\right]!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot\left(n-1-k\right)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot\left(n-k\right)!} + \frac{(n-1)!}{n!\cdot\left(n-k-1\right)!}.\end{aligned}$$

Luego multiplicando y dividiendo el primer término por $n\cdot k$ y en el segundo por $n\cdot(n-k)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n\cdot k)\cdot(n-1)!}{(n\cdot k)\cdot(k-1)!\cdot\left(n-k\right)!} + \frac{n\cdot(n-k)\cdot(n-1)!}{n\cdot(n-k)\cdot k!\cdot\left(n-k-1\right)!}\\ &= \frac{k\cdot n\cdot(n-1)!}{n\cdot k\cdot(k-1)!\cdot\left(n-k\right)!} + \frac{(n-k)\cdot n\cdot(n-1)!}{n\cdot k!\cdot(n-k)\cdot\left(n-k-1\right)!}\\ &= \frac{k\cdot n!}{nk!\left(n-k\right)!} + \frac{(n-k)\cdot n!}{nk!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}\cdot\left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right)\\ &= \frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}\cdot\left(\frac{k+n-k}{n}\right)\\ &= \frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}.\end{aligned}$$

T2.

,

T2. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Demostración

Por definición se tiene que

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-n+k)}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot\left[n-(n-k)\right]!}.$$

Esta es justamente por definición lo que queremos obtener, esto es

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot\left[n-(n-k)\right]!}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

T3. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$

Demostración

Por teorema del binomio tenemos que:

$$2^n=\left(1+1\right)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\cdots+\binom{n}{n-1}1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n$$

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}.$$

,

T4. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots\pm\binom{n}{n-1}\pm\binom{n}{n}=0.$

Demostración

La demostración se divide en dos casos:

Primer caso

Para *n*impar la propiedad queda:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots-\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n}=0.$$

PorT2se obtiene que:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n},$$
$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1},$$
$$\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2},$$
$$\vdots$$
$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}.$$

Por tanto:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots-\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n}=0.$$

,

Segundo caso

Para n par la propiedad queda:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+\binom{n}{\frac{n}{2}}+\cdots-\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=0.$$

Luego porT1se obtiene que:

$$-\binom{n}{1}=-\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}$$
$$-\binom{n}{n-1}=-\binom{n-1}{n-2}-\binom{n-1}{n-1}.$$
$$\vdots$$

Por tanto:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+\binom{n}{\frac{n}{2}}+\cdots-\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=$$

$$=\cancel{\binom{n}{0}}-\cancel{\binom{n-1}{0}}-\cancel{\binom{n-1}{1}}+\cdots-\binom{n-1}{\frac{(n-1)-1}{2}}+\binom{n}{\frac{n}{2}}-\binom{n-1}{\frac{(n-1)+1}{2}}\cancel{+\cdots}-\cancel{\binom{n-1}{n-2}}-\cancel{\binom{n-1}{n-1}}+\cancel{\binom{n}{n}}$$

$$=-\binom{n-1}{\frac{(n-1)-1}{2}}+\binom{n}{\frac{n}{2}}-\binom{n-1}{\frac{(n-1)+1}{2}}.$$

Como:

$$-\binom{n-1}{\frac{(n-1)-1}{2}}-\binom{n-1}{\frac{(n-1)+1}{2}}=-\binom{n}{\frac{n}{2}},$$

,

Se logra que:

$$\binom{n}{\frac{n}{2}}-\binom{n-1}{\frac{(n-1)-1}{2}}-\binom{n-1}{\frac{(n-1)+1}{2}}=\binom{n}{\frac{n}{2}}-\binom{n}{\frac{n}{2}}=0.$$

T5. $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=2^{n-1}$ siendo n impar.

$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=2^{n-1}$ siendo n impar.

Demostración

Por T1 se consigue que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1}&=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1},\\
\binom{n}{3}&=\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3},\\
\binom{n}{5}&=\binom{n-1}{4}+\binom{n-1}{5},\\
&\vdots\\
\binom{n}{n-2}&=\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-2},\\
\binom{n}{n}&=\binom{n-1}{n-1}.
\end{aligned}$$

,

Luego por T3**,** se tiene que:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=$$

$$=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}+\binom{n-1}{5}+\cdots+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}.$$

$$=2^{n-1}.$$

Para *n*par se utiliza el mismo método.

T6. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=2^{n-1}$siendo *n* par.

Demostración

Por T1se obtiene que:

$$\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0},$$

$$\binom{n}{2}=\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2},$$

$$\binom{n}{4}=\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4},$$

$$\vdots$$

$$\binom{n-1}{n-2}=\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-1}{n-2},$$

$$\binom{n}{n}=\binom{n-1}{n-1}.$$

,

Por tanto:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}$$
$$=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}+\cdots+\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}$$
$$=2^{n-1}.$$

Se deja al lector que demuestre la propiedad para n impar.

T7. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n+3}{2}}+\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$

para n impar.

Demostración

Para n impar, por T1se consigue que

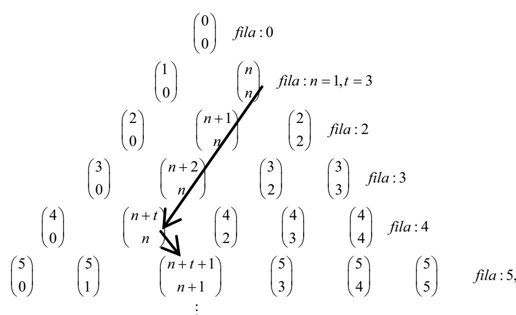
$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n},$$
$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1},$$
$$\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2},$$
$$\vdots$$
$$\binom{n}{\frac{n-3}{2}}=\binom{n}{\frac{n+3}{2}},$$
$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}.$$

,

Luego, por suma telescópica se obtiene

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n+3}{2}}+\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \text{para } n \text{ impar.}$$

T8. Principio de Hockey



$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+t-1}{n}+\binom{n+t}{n}=\binom{n+t+1}{n+1}.$$

Demostración

Para $t=0$, por definición tenemos que

$$\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1.$$

Consideremos que es cierto para $t=k,$ esto es,

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots\binom{n+k+1}{n}+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}.$$

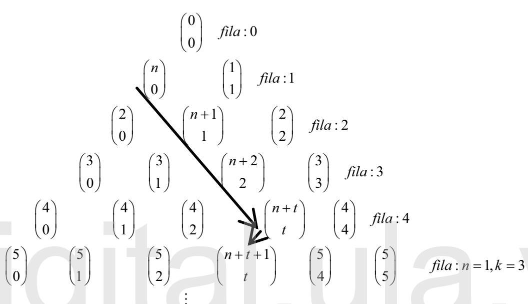
,

Veamos si es cierto para $t = k+1$, de esta forma se debe cumplir que

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+(k+1)+1}{n}=\binom{n+k+2}{n}.$$

Usando hipótesis inductiva queda lo siguiente:

$$\binom{n+k+1}{n+1}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+k+2}{n}.$$



$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+t}{t}=\binom{n+t+1}{t}.$$

Demostración

Para $t = 0$, por definición se cumple que

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1.$$

Consideremos que es cierto para $t = k$, esto es,

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}.$$

,

Luego para $t = k+1$, se cumple que

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}+\binom{n+k}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=$$

$$=\binom{n+(k+1)+1}{k+1}$$

$$=\binom{n+k+2}{k+1}.$$

Usando hipótesis inductiva queda lo siguiente:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+t}{t}=$$

$$=\binom{n+k+1}{k}+\binom{n+k+1}{k+1}=\binom{n+k+2}{k+1}.$$

5.7. Interpretación de sus filas

En la sección 5.3 de este capítulo se menciona que cada elemento del triángulo de Tartaglia se puede escribir como un número combinatorio $C_{n,k}=\binom{n}{k}$, donde n representa la fila donde se encuentra el elemento y k su lugar que ocupa en ella. Aparte, se utiliza la definición de números combinatorios pero desde una perspectiva de conjuntos, esto es lo siguiente, el $C_{n,k}$ indicara de ahora en adelante la cantidad de subconjuntos de cardinal k que se puede formar con un conjunto que contiene n elementos; recordando nuevamente que $0 \le k \le n$.

Con lo descrito anteriormente se interpretan las filas del triángulo de la siguiente manera:

,

1. El número de orden de cada fila coinciden con el cardinal del conjunto que se quiere analizar. Cada fila (empezando con la fila 0) da información sobre las cantidades de subconjuntos (de distintos tamaños) que se pueden hacer con un conjunto que tienen 0, 1, 2, 3,…, n elementos respectivamente, por ejemplo, la fila 5 da información sobre las cantidades de subconjuntos que se pueden hacer con un conjunto que tiene 5 elementos.
2. Consideremos al conjunto de cero elementos denotado por $\varnothing$. Los demás conjuntos mencionados en el párrafo anterior, es decir, aquellos conjuntos que tienen 1, 2, 3,…, n elementos se forman cuando al conjunto $\varnothing$ se le va agregando uno a uno elementos hasta a que contenga n de ellos.
3. Con los dos párrafos anteriores se infiere lo siguiente:
4. Si se selecciona una fila cualquiera, llamémosla fila n, esta da información sobre las cantidades subconjuntos que se forma si se le añade un elemento más a el conjunto de cardinal $n-1$ y la fila $n-1$ (fila anterior a la fila n), da noticia sobre las cantidades subconjuntos que se forma con un conjunto de cardinal $n-1$.
5. Si se trabaja con la fila $n+1$(fila siguiente a la fila n), esta da noción sobre las cantidades de subconjuntos que se forma si se le añade un elemento más al conjunto de cardinal ny la fila n contiene información sobre los subconjuntos que se forman pero con un conjunto de cardinal n.

Nota: guíense solamente por lo que dice la primera viñeta si solo se quiere conocer las cantidades de subconjuntos (de distintos tamaños) que se pueden hacer con un conjunto que contiene n elementos.

,

5.8. Interpretación de sus propiedades

Propiedad T1

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} \Longleftrightarrow \binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

Esta propiedad está ligada a la manera en cómo se construyó el triángulo e indica que cada elemento interno del triángulo se produce por la suma de los elementos que se encuentra en la parte superior de este. Se le conoce como la propiedad de Stifel en honor al matemático Michael Stifel.

Desde un punto de vista de conjuntos esta propiedad nos señala que si se tiene un conjunto de cardinal $n$conformado por los elementos $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$, entonces la cantidad de subconjuntos de cardinal k que se pueden formar con un conjunto de cardinal n va hacer igual a la cantidad de subconjuntos de cardinal $k-1$ que se puede formar con un conjunto de cardinal $n-1$, esto es,$\binom{n-1}{k-1}$ más la cantidad de subconjuntos de cardinal k que se pueden formar con un conjunto de cardinal $n-1$, es decir, $\binom{n-1}{k}$.

La propiedad T1 pone en manifiesto que el $\binom{n-1}{k-1}$(el que está en la parte superior izquierda del elemento $\binom{n}{k}$) es la cantidad de subconjuntos que contiene

,

al elemento a_n, es decir ,los que contienen al elemento nuevo que se agregó al conjunto de cardinal $n-1$ para formar así un conjunto de cardinal n y $\binom{n-1}{k}$(el que está en la parte superior derecha de $\binom{n}{k}$) señala la cantidad de subconjuntos que no contiene al elemento a_n.

Lo anterior se puede expresar de aquí en adelante de la siguiente manera:

Del $\binom{n}{k}$ hay $\binom{n-1}{k-1}$ subconjuntos que tienen un elemento en común y que del $\binom{n}{k}$ hay $\binom{n-1}{k}$subconjuntos que no tienen en común a este elemento.

Nota: todos los elementos de un conjunto de tamaño *n*, esto es, $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$, tienen las mismas posibilidades de estar o no estar en $\binom{n-1}{k-1}$ y $\binom{\mathrm{n}-1}{\mathrm{k}}$ respectivamente.

Propiedad T2

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Con esta propiedad se puede entender el porqué de la simetría del triángulo.

Consideremos una bolsa que contienen *n* objetos y luego se tomen de ella *k* objetos, es de notar que dentro de la bolsa quedan $n-k$ objetos, de esto se puede inferir que, por cada elección de k elementos que se haga de un conjunto de cardinal *n* siempre quedara $n-k$ elementos y por tanto la cantidad de subconjuntos de cardinal *k* que se puede formar con un conjunto de cardinal *n*, es decir, $\binom{n}{k}$ va hacer

,

igual a la cantidad de subconjuntos de cardinal $n-k$ que se puede formar con un conjunto de cardinal n, esto es $\binom{n}{n-k}$.

Propiedad T3

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

Esta propiedad desde un punto de vista del triángulo nos señala que, la suma de todos elementos de una fila n va hacer igual a 2^n y desde la perspectiva de la teoría de conjuntos nos indica que, si se tiene un conjunto que contiene n elementos, entonces el cardinal del conjunto de parte de este conjunto mencionado va hacer igual a 2^n. Recuerde que el conjunto de partes de un conjunto, llamémoslo A, por ejemplo, es el conjunto conformados por todos subconjuntos que se pueden obtener con el conjunto A.

Propiedad T4

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots\pm\binom{n}{n-1}\pm\binom{n}{n}=0.$$

Por propiedad T2 la expresión descrita en la parte de arriba es igual a cero. Esto en cierto sentido demuestra la simetría que tiene cada fila del triángulo y por ende de toda la tabla numérica en sí.

,

Propiedad T5

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=2^{n-1}\ \text{ siendo } n \text{ impar.}$$
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}=2^{n-1}\ \text{ siendo } n \text{ par.}$$

A partir de la propiedad T2 y T3 se deducen dichas igualdades, ellas señala que, la suma de los números combinatorios que se encuentra en la posición impar de la fila *n* (contándolos desde $\binom{n}{1}$) es igual 2^{n-1} y desde la visión de la teoría de conjuntos nos proporciona la siguiente información: la cantidad de subconjuntos de cardinal impar que se puede formar con un conjunto de tamaño *n* es igual a la cantidad total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinal $n-1$.

Propiedad T6

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=2^{n-1}\ \text{ siendo } n \text{ par.}$$
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}=2^{n-1}\text{siendo } n \text{ impar.}$$

Al igual que la propiedad e.1 y e.2 estas se deducen a partir de la propiedad T2 y T3, estas señalan que la suma de los números combinatorios que se encuentra en la posición par de la fila *n* (contándolos desde $\binom{n}{0}$) es igual 2^{n-1} y desde el punto de vista de la teoría de conjuntos ellas nos proporcionan la siguiente idea: la cantidad de subconjuntos de cardinal par que se puede formar con un conjunto de tamaño *n* esa la cantidad total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinal $n-1$.

,

Propiedad T7

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n+3}{2}}+\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \text{ para } n \text{ impar.}$$

Esta propiedad también se demuestra por la propiedad T2 y da conocer de manera clara la simetría del triángulo pero con respecto a las filas impares, con esta propiedad se demostró el problema número dos del capítulo IV, a partir de aquí se deduce que dicha expresión contiene un número impar de números impares.

Principio de Hockey

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+t-1}{n}+\binom{n+t}{n}=\binom{n+t+1}{n+1}.$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+t-1}{t-1}+\binom{n+t}{t}=\binom{n+t+1}{t}.$$

El Principio de Hockey indica que, la sumatoria de los elementos de una diagonal del triángulo, (desde el primero de ella hasta uno en específico) va hacer igual al número combinatorio que está en la parte inferior izquierda o derecha (dependiendo de la diagonal que se esté usando) del último número que se sumó. Este principio tiene un poco que ver con la sección 5.12.2 y 5.12.3 de esta sección; se le recomienda al lector que lo lea muy bien para que vea su relación.

,

Propiedad T7

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-3}{2}}+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n+3}{2}}+\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \text{ para } n \text{ impar.}$$

Esta propiedad también se demuestra por la propiedad T2 y da conocer de manera clara la simetría del triángulo pero con respecto a las filas impares, con esta propiedad se demostró el problema número dos del capítulo IV, a partir de aquí se deduce que dicha expresión contiene un número impar de números impares.

Principio de Hockey

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+t-1}{n}+\binom{n+t}{n}=\binom{n+t+1}{n+1}.$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+t-1}{t-1}+\binom{n+t}{t}=\binom{n+t+1}{t}.$$

El Principio de Hockey indica que, la sumatoria de los elementos de una diagonal del triángulo, (desde el primero de ella hasta uno en específico) va hacer igual al número combinatorio que está en la parte inferior izquierda o derecha (dependiendo de la diagonal que se esté usando) del último número que se sumó. Este principio tiene un poco que ver con la sección 5.12.2 y 5.12.3 de esta sección; se le recomienda al lector que lo lea muy bien para que vea su relación

,

Las Diagonales con pendiente positiva

Son aquellas que si se ven como rectas tendrán pendientes positivas (véase las rectas de color azul de la figura 5). Estas simbolizan de la siguiente manera D_{p_n} Desde el punto vista de conjunto las diagonales con pendientes positivas se escriben de la siguiente forma: $D_{p_n} = \left\{ \binom{n}{n}, \binom{n+1}{n}, \binom{n+2}{n}, \ldots, \binom{n+k-1}{n}, \binom{n+k}{n} \right\}$.

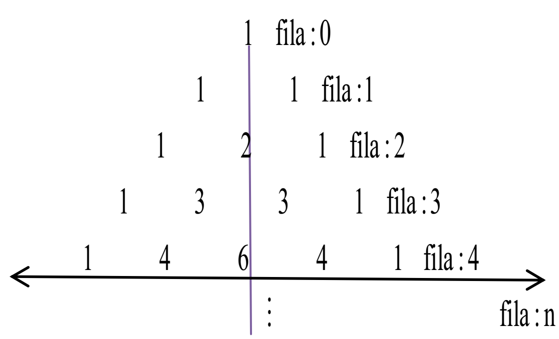
Por simetría en el triángulo se obtiene lo siguiente: $\mathrm{D}_{\mathrm{p}_\mathrm{n}} = \mathrm{D}_{\mathrm{n}_\mathrm{n}}$.

5.10. "La perpendicular del triángulo"

La perpendicular del triángulo es un conjunto de infinitos números naturales o combinatorios (como guste verlo) en forma de "recta perpendicular" ella tiene un origen y se extiende hacia el infinito. (Véase la figura 6).

Figura 6

El Triángulo de Tartaglia y su perpendicular



,

Esta perpendicular se denota con el símbolo P_T y desde un punto de vista de conjuntos se puede representar de la siguiente forma:

$$P_T = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-2}{2}}, \binom{n}{\frac{n}{2}} \right\} \text{Para } n \text{ par.}$$

Interpretación de la perpendicular del triángulo

¡Se recuerdan de la bolsa que contienen n objetos y que luego nos indicaban que tomáramos k objetos para luego decirnos, que observáramos dentro de la bolsa y notaríamos que quedaron $n-k$ objetos!, me imagino que sí; Ahora bien imagínese que n es par, es decir, que en la bolsa una cantidad par de objetos y luego tomen la mitad de ellos, estos es $\frac{n}{2}$,¿Cuántos quedaron en la bolsa?.La respuesta es $\frac{n}{2}$. De esto se puede inferir que, por cada elección de $\frac{n}{2}$ elementos que se haga de un conjunto de cardinal n siempre quedara también $\frac{n}{2}$ elementos y por tanto la cantidad de subconjuntos de cardinal $\frac{n}{2}$ que se puede formar con un conjunto de cardinal n (en donde n es par) es decir, $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ va hacer igual a la cantidad de subconjuntos de

,

cardinal $\frac{n}{2}$ que se puede formar con un conjunto de tamaño n, esto es $\binom{n}{\frac{n}{2}}$, es decir, $\binom{n}{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$.

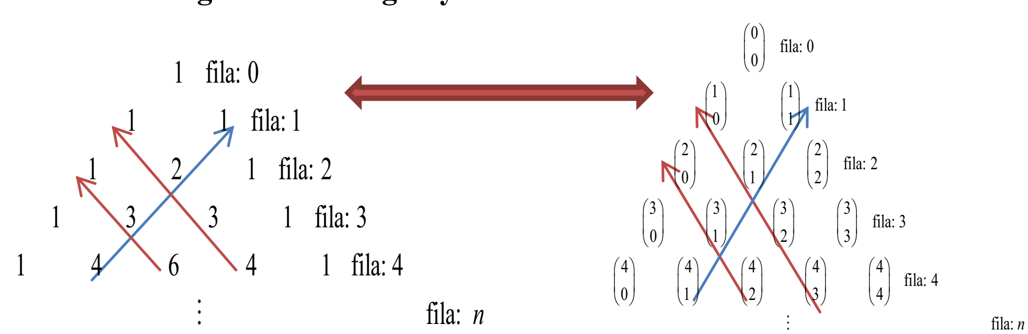
Se preguntaran que tendrá que ver lo leído con la perpendicular del triángulo; la respuesta es la siguiente: P_T es el conjunto que contiene a todos aquellos números combinatorios del Triángulo de Tartaglia que cumplen con la situación descrita en el párrafo anterior, ¿Cual situación? Que el simétrico de $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ es $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ él mismo.

5.11. "Vectores combinatorios" en el Triángulo de Tartaglia

Los "vectores combinatorios" en el Triángulo de Tartaglia son subconjuntos de las diagonales del triángulo, estos tienen forma de vector (segmento dirigido) tal como se indica en la figura 6. Existen dos tipos de vectores los vectores noroeste y los vectores noreste.

Figura 6

El Triángulo de Tartaglia y varios de sus "vectores combinatorios"



,

Tipos de vectores

Vectores noroeste

Son subconjuntos de las diagonales con pendiente negativa, véase los vectores de color rojo de la figura 6, estos pueden tener origen en un combinatorio cualquiera, llamémosle, $\binom{n}{k}$ y posibles extremos $\binom{n-1}{k-1},\binom{n-2}{k-2},\binom{n-3}{k-3},\ldots,\binom{n-k+1}{k-k+1},\binom{n-k}{k-k}$ para $n \geq 1$.

Estos vectores se denotan así $\vec{V}_{NO} = \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{?}{?}}$ y se pueden reconocer cuando el número inferior del número combinatorio extremo es distinto al inferior del número combinatorio del origen.

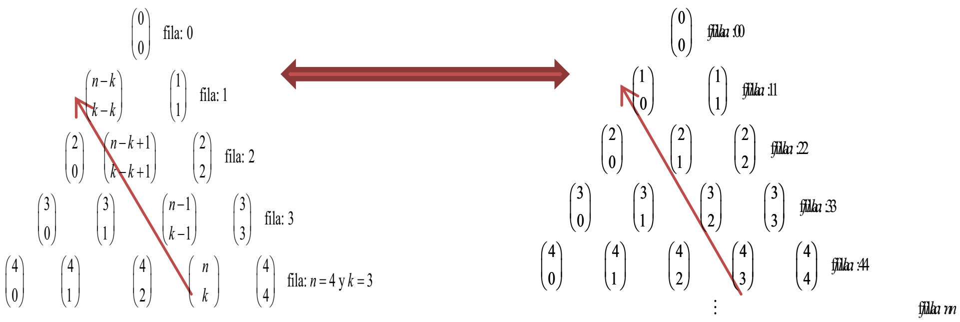
También se pueden trabajar con los vectores noroeste $\vec{V}_{\binom{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}},\vec{V}_{\binom{n-2}{k-2}\binom{n-3}{k-3}},\vec{V}_{\binom{n-3}{k-3}\binom{n-4}{k-4}},\ldots,\vec{V}_{\binom{n-k+1}{k-k+1}\binom{n-k}{k-k}}$ siempre y cuando se trabaje con el $\binom{n}{k}$.

El vector que se representa en la figura 7 es $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}} = \vec{V}_{\binom{4}{3}\binom{1}{0}}$

Figura 7

,

El vector $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}} = \vec{V}_{\binom{4}{3}\binom{1}{0}}$ en el Triángulo de Tartaglia



Vectores noreste

Son subconjuntos de las diagonales con pendientes positivas, véase los vectores de color azul de la figura 6, estos tienen origen $\binom{n}{k}$ y posibles extremos $\binom{n-1}{k},\binom{n-2}{k},\binom{n-3}{k},\ldots,\binom{k-1}{k},\binom{k}{k}$ para $n \geq 1$.

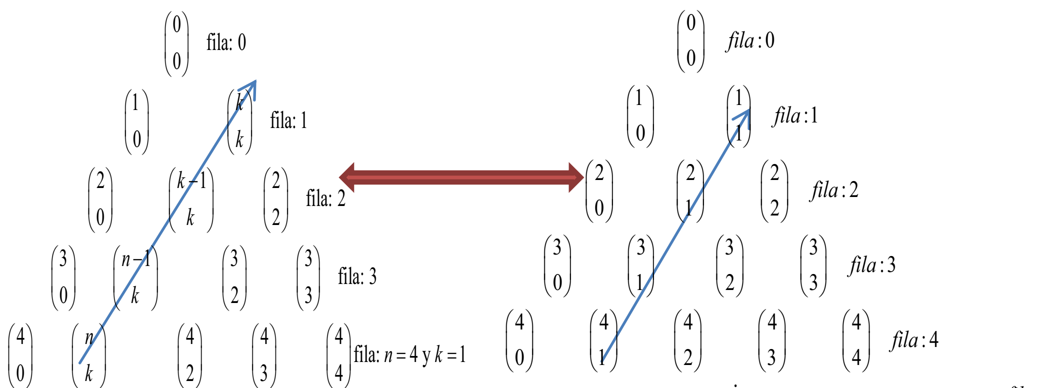
Estos vectores se denotan así $\vec{V}_{NE} = \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{?}{?}}$ y se pueden reconocer cuando el número inferior del número combinatorio extremo es igual al inferior del número combinatorio del origen.

Se pueden trabajar con los vectores noroeste $\vec{V}_{\binom{n-1}{k}\binom{n-2}{k}}, \vec{V}_{\binom{n-2}{k}\binom{n-3}{k}}, \vec{V}_{\binom{n-3}{k}\binom{n-4}{k}}, \ldots, \vec{V}_{\binom{k+1}{k}\binom{k}{k}}$ siempre y cuando se trabaje con el $\binom{n}{k}$.

El vector que se representa en la figura 8 es $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{k}{k}} = \vec{V}_{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}$.

Figura 8

El vector $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{k}{k}} = \vec{V}_{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}$ en el Triángulo de Tartaglia



5.12.

Interpretación de "los vectores Combinatorios"

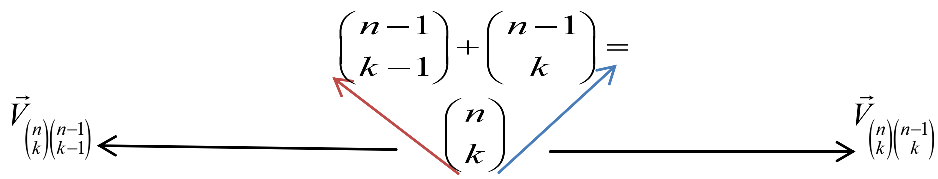
La contenencia o no contenencia de elementos en determinados subconjuntos de un conjunto de cardinal n se puede conocer a través de la idea de los vectores combinatorios en el triángulo de Tartaglia.

Interpretación de los vectores con respecto a $\binom{n}{k}$

Los vectores más fáciles de explicar son el vector noreste $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}$ y el vector noreste $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}}$ porque sus interpretaciones nacen exactamente de la interpretación que se le dio a la propiedad T1en la sección 5.8.1, las interpretaciones de dichos vectores son las siguientes:

,

El vector $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}$ señala que, del $\binom{n}{k}$ hay $\binom{n-1}{k-1}$ subconjuntos que tienen un elemento en común y el vector $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}}$ señala que del $\binom{n}{k}$ hay $\binom{n-1}{k}$ subconjuntos que no tienen en común al elemento mencionado.



Los "vectores combinatorios" noroeste y noreste tienen su debida interpretación a partir de la propiedad T1, de hecho una pequeña explicación se hizo en el párrafo anterior.

Interpretación de los vectores noroeste

Como se dijo antes, los extremos posibles que puede tomar cualquiervector noroeste $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{?}{?}}$ son $\binom{n-1}{k-1},\binom{n-2}{k-2},\binom{n-3}{k-3},\dots,\binom{n-k+1}{k-k+1},\binom{n-k}{k-k}$.

Los vectores $\vec{V}_{\binom{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}},\vec{V}_{\binom{n-2}{k-2}\binom{n-3}{k-3}},\vec{V}_{\binom{n-3}{k-3}\binom{n-4}{k-4}},\dots,\vec{V}_{\binom{n-k+1}{k-k+1}\binom{n-k}{k-k}}$ se interpreta de la misma manera en cómo se interpretó la propiedad T1 pero con respecto a la contenencia de elementos,| puesto que en cada vector señalado el extremo de uno es el origen del vector que le sigue, por ejemplo, $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}},\vec{V}_{\binom{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}}$; implica que se puede formar un nuevo vector (por representación gráfica de vectores) que sería

,

$\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-2}{k-2}}$, éste, se interpretaría de la misma manera que la propiedad "a" pero con respecto a la contenencia de elementos, con la diferencia de que en vez de señalar la cantidad de subconjuntos que tienen un elemento en común ahora va indicar la cantidad de subconjuntos que tienen dos elementos en común.

Por consiguiente los vectores noroeste indican la contenencia de elementos comunes en ciertos subconjuntos, es decir, que: $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}, \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-2}{k-2}}, \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-3}{k-3}}, \dots, \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k-k}}$ indican que del $\binom{n}{k}$ hay $\binom{n-1}{k-1},\binom{n-2}{k-2},\binom{n-3}{k-3},...,\binom{n-k+1}{k-k+1},\binom{n-k}{k-k}$ subconjuntos que tienen $1,2,3,...,n$ elementos en común respectivamente. De la misma manera se pueden interpretar los vectores noroeste $\vec{V}_{\binom{n-1}{k-1}\binom{?}{?}}, \vec{V}_{\binom{n-2}{k-2}\binom{?}{?}}, \vec{V}_{\binom{n-3}{k-3}\binom{?}{?}}, \dots, \vec{V}_{\binom{n-k+2}{k-k+2}\binom{?}{?}}$.

Ejemplo:

Sean $n = 5 \; y \; k = 3$. Los vectores (ver figura 9) $\vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{5-1}{3-1}}, \vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{5-3+1}{3-3+1}}, \vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{5-3}{3-3}}$ o $\vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{4}{2}}, \vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{3}{1}}, \vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{2}{0}}$ Indican respectivamente lo siguiente:

Del $\binom{5}{3} = 10$ hay $\binom{4}{2} = 6$ subconjuntos que tienen un elemento en común.

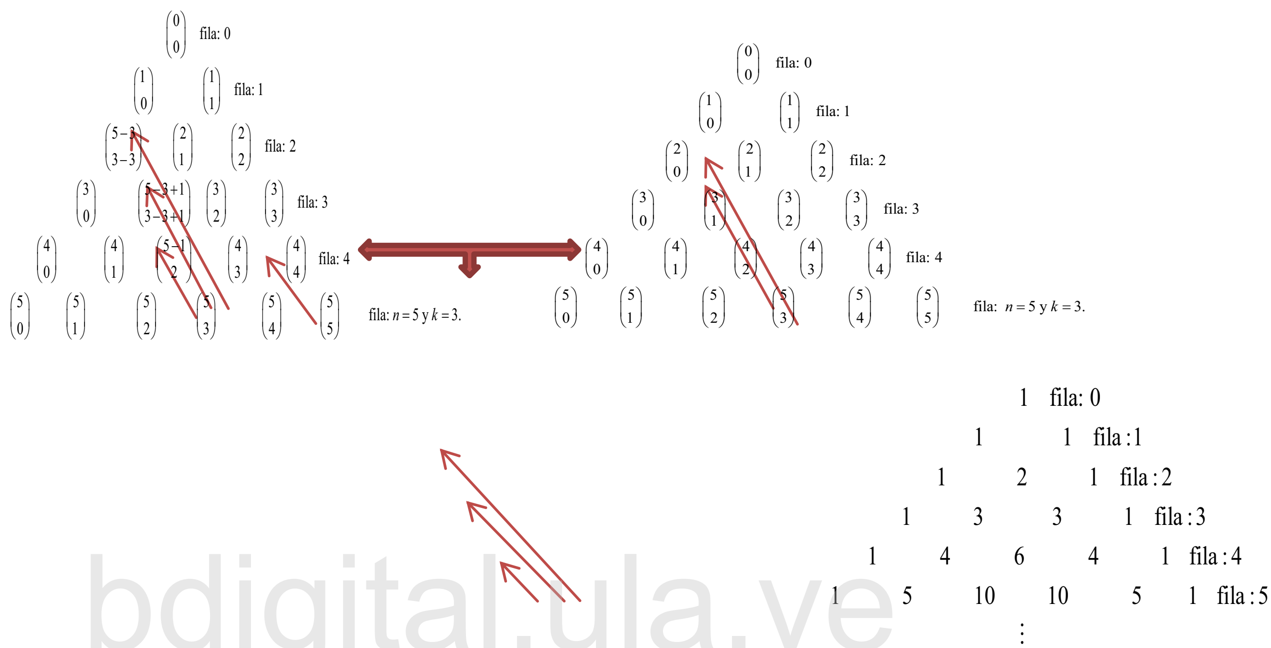
Del $\binom{5}{3} = 10$ hay $\binom{3}{1} = 3$ subconjuntos que tienen dos elemento en común.

Del $\binom{5}{3} = 10$ hay $\binom{2}{0} = 1$ subconjuntos que tienen tres elemento en común.

,

Figura 9

Los vectores $\vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{5-1}{3-1}}, \vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{5-3+1}{3-3+1}}, \vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{5-3}{3-3}}$ en el triángulo de Tartaglia



Es de señalar que esta interpretación se usó para estudiar el problema número 9 del capítulo IV.

Interpretación de los vectores noreste

De la misma manera en cómo se interpreta los vectores noroeste se puede concebir a los vectores noreste $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{?}{?}}$ pero con extremos posibles $\binom{n-1}{k}, \binom{n-2}{k}, \binom{n-3}{k}, ..., \binom{k-1}{k}, \binom{k}{k}$ en donde la diferencia es que estos indican la no contenencia de elementos en común, esto es que los vectores $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}}, \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-2}{k}}, \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-3}{k}}, ..., \vec{V}_{\binom{k-1}{k}\binom{k}{k}}$ señalan que del $\binom{n}{k}$ hay $\binom{n-1}{k}, \binom{n-2}{k}, \binom{n-3}{k}, ..., \binom{k-1}{k}, \binom{k}{k}$ subconjuntos que no tiene en común $1, 2, 3, ..., n$ elementos respectivamente (incluyendo aquellos que tengan al menos un

,

de ellos). De la misma manera se pueden interpretar los vectores noroeste $\vec{V}_{\binom{n-1}{k}\binom{?}{?}}, \vec{V}_{\binom{n-2}{k}\binom{?}{?}}, \vec{V}_{\binom{n-3}{k}\binom{?}{?}}, \ldots$

Ejemplo:

Los vectores (ver figura 10) $\vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{5-1}{2}}, \vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{2+1}{2}}, \vec{V}_{\binom{5}{3}\binom{2}{2}}$ o $\vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}, \vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}, \vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{2}{2}}$.

Indican respectivamente lo siguiente:

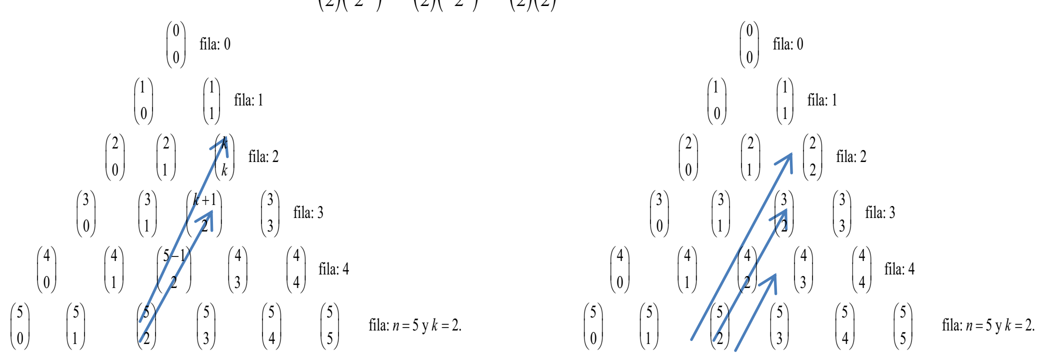
Del $\binom{5}{2} = 10$ hay $\binom{4}{2} = 6$ subconjuntos que no tienen un elemento dado en común.

Del $\binom{5}{2} = 10$ hay $\binom{3}{2} = 3$ subconjuntos que no tienen dos elementos dados en común.

Del $\binom{5}{2} = 10$ hay $\binom{2}{2} = 1$ subconjuntos que no tienen tres elementos dados en común.

Figura 10

Los vectores $\vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{5-1}{2}}, \vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{2+1}{2}}, \vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{2}{2}}$ en el triángulo de Tartaglia



,

5.12.1.3 Observaciones importantes:

En los vectores noroeste y noreste el número que acompaña al valor de n en los números combinatorios extremo de dicho vectores indican la cantidad de elementos comunes o no comunes respectivamente de ciertos subconjuntos del conjunto de n elemento. Ejemplo:

El $V_{NO} = \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}$ indica la contenencia de 1 elemento en común en ciertos subconjuntos.

El $V_{NE} = \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-2}{k}}$ indica la no contenencia de 2 elementos en común en ciertos subconjuntos.

Interpretación de los vectores con respecto a los combinatorios:

$$\binom{n+1}{k+1} \text{ y } \binom{n+1}{k}.$$

Al igual que los análisis hechos en los casos anteriores estas también serán analizada a partir de la propiedad T1**,** la variedad con respecto a los otros análisis es que aquí los vectores noroeste y noreste se van a conectar con el fin de que nos den información útil acerca de la contenencia y no contenencias simultanea de ciertos elementos en determinados subconjuntos del conjunto de cardinal n.

Recordemos nuevamente la propiedad T1**:** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Esta propiedad se puede ver también como:

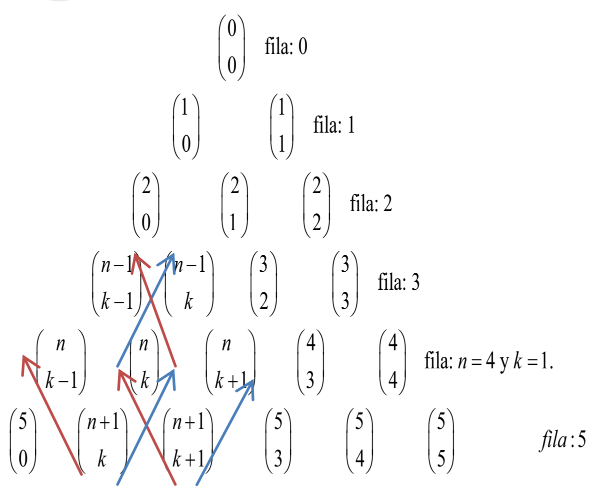
,

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} \text{ y } \binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}.$$

Esto es con el fin de que aparezcan los números combinatorios $\binom{n+1}{k}$ y $\binom{n+1}{k+1}$. (ver la figura 9).

Figura 9

El Triángulo de Tartaglia y la propiedad T1 escrita de otras formas



Interpretación de los vectores con respecto al combinatorio: $\binom{n+1}{k+1}$.

,

Consideremos a $\vec{V}_{NO}=\vec{V}_{\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k}}$ y $V_{NE}=\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}}$, (ver figura 9) el primero indica que del $\binom{n+1}{k+1}$hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos que tienen un elementos en común y el segundo señala la cantidad de subconjuntos de $\binom{n}{k}$ que no contienen un elemento común (distinto al común mencionado). Los dos vectores mencionados se pueden conectar entre sí porque el extremo de uno es el origen del otro y como el primero indica la contenencia de un elemento en común y el segundo la no contenencia de un elemento común (distinto al mencionado en la línea anterior) se pueden inferir lo siguiente:

Del $\binom{n+1}{k+1}$ hay $\binom{n-1}{k}$subconjuntos que aun teniendo un elemento en común no tiene en común a uno distinto a este. Lo anterior se puede expresar asi $\vec{V}_{\binom{n+1}{k+1}\binom{n-1}{n-k}}$.

De lo antes escrito más la interpretación de los vectores noroeste y noreste se puede hacer la siguiente generalización.

Generalización:

El vector noroeste $\vec{V}_{\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k}}$ *y los vectores noreste* $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}},\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-2}{k}},\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-3}{k}},\ldots,\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{k}{k}}$ *están conectados por la razón de que el extremo del vector* $\vec{V}_{NO}$ *coincide con el origen de cada vector noreste; estos en conjunto da información sobre la cantidad de subconjuntos que aun teniendo un elemento en común no tienen en común a los* $1,2,3,\ldots,m$ *en donde* $m=n-k$ *elementos restantes del conjunto de cardinal n. Estos*

,

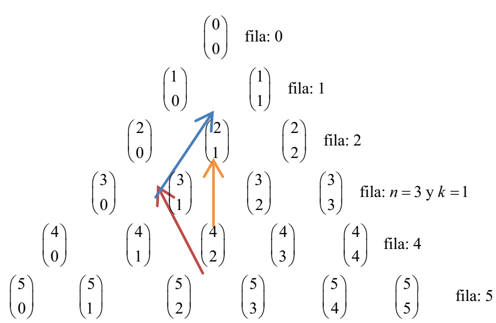
vectores se denotan así: $\vec{V}_{\binom{n+1}{k+1}\binom{?}{?}}$ *en donde* $\binom{?}{?}$ *pueden ser* $\binom{n-1}{k},\binom{n-2}{k},\binom{n-3}{k},\ldots,\binom{k-1}{k},\binom{k}{k}$.

Ejemplo:

Sea $n=3$ y $k=1$ el vector noroeste $\vec{V}_{\binom{3+1}{1+1}\binom{3}{1}}=\vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}$ y el vector noreste $\vec{V}_{\binom{3}{1}\binom{3-1}{1}}=\vec{V}_{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}$ (ver figura 11) están conectados porque el extremo del primero es el origen del segundo, escribiéndose de la siguiente manera: $\vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}$ e indicando al mismo tiempo que del $\binom{3+1}{1+1}=\binom{4}{2}=6$ hay $\binom{3-1}{1}=\binom{2}{1}=2$ subconjuntos que aun teniendo un elemento en común no tienen en común a uno distinto a este.

Figura 11

El vector $\vec{V}_{\binom{3+1}{1+1}\binom{3}{1}}=\vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}$ y el $\vec{V}_{\binom{3}{1}\binom{3-1}{1}}=\vec{V}_{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}$, es decir, $\vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}$ en el Triángulo de Tartaglia



,

Interpretación de los vectores con respecto al combinatorio: $\binom{n+1}{k}$.

Igual que en el caso anterior consideremos $\vec{V}_{NE} = \vec{V}_{\binom{n+1}{k}\binom{n}{k}}$ y $V_{NO} = \vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}}$, (ver figura 9) el primero indica que del $\binom{n+1}{k}$ hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos que no tienen un elemento en común y el segundo señala la cantidad de subconjuntos de $\binom{n}{k}$ que contienen un elemento en común (distinto al elemento común mencionado). Los dos vectores mencionados están conectados entre sí porque el extremo de uno es el origen del otro y como el primero indica la no contenencia de un elemento en común y el segundo la contenencia de un elemento común (distinto al mencionado en la línea anterior) se puede inferir lo siguiente:

Del $\binom{n+1}{k}$ hay $\binom{n-1}{n-k}$ subconjuntos que aun no teniendo un elemento en común tienen en común un elemento distinto a este. Lo anterior se puede expresar así $\vec{V}_{\binom{n+1}{k}\binom{n-1}{n-k}}$.

De lo antes escritos más la interpretación de los vectores noroeste y noreste se puede hacer la siguiente generalización.

Generalización

,

El vector noreste $\vec{V}_{\binom{n+1}{k}\binom{n}{k}}$ *y los vectores noroeste* $\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}},\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-2}{k-2}},\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-3}{k-3}},\ldots,\vec{V}_{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k-k}}$ *están conectados por la razón de que el extremo del vector* $\vec{V}_{NE}$ *coincide con el origen de cada vector noroeste; estos en conjunto da información sobre la cantidad de subconjuntos que aun no teniendo un elemento en común tienen en común al* $1,2,3,\ldots,k$ *Elementos restantes del conjunto de cardinal n.* *Estos vectores se denotan así:* $\vec{V}_{\binom{n+1}{k}\binom{?}{?}}$ *en donde* $\binom{?}{?}$ *puede ser* $\binom{n-1}{k-1},\binom{n-2}{k-2},\binom{n-3}{k-3},\ldots,\binom{n-k+1}{k-k+1},\binom{n-k}{k-k}.$

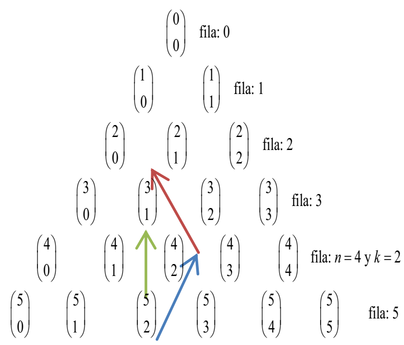
Ejemplo:

Sea $n=4\ y\ k=2$ el vector noreste $\vec{V}_{\binom{4+1}{2}\binom{4}{2}}=\vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}$ y el vector noreste $\vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{4-1}{2-1}}=\vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}$ (ver figura 12) están conectados porque el extremo del primero es el origen del segundo, escribiéndose así de la siguiente manera: $\vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}$ e indicando al mismo tiempo que, del $\binom{4+1}{2}=\binom{5}{2}=10$ hay $\binom{4-1}{2-1}=\binom{3}{1}=3$ subconjuntos que aun no teniendo un elemento en común tienen en común a uno distinto a este.

,

Figura 12

El vector $\vec{V}_{\binom{4+1}{2}\binom{4}{2}} = \vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}$ y el $\vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{4-1}{2-1}} = \vec{V}_{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}$, es decir, $\vec{V}_{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}$ en el Triángulo de Tartaglia



Estos dos análisis tienen similitud con el principio de Hockeypero por la forma en cómo se analiza en el triángulo (no es que se suman los términos) salvo que en vez de empezar de arriba abajo se empieza de abajo hacia arriba aunque en el fondo están muy ligados.

Consecuencias de la interpretación

Estas interpretaciones son base para poder hacer otras interpretaciones parecidas a estas con la diferencia que en vez de buscar lo que se explicó, se podría usar para buscar cantidades de subconjuntos que aun no teniendo o teniendo 2,3,4,…,*n*-*k* elementos en común tienen o no los elementos restante del conjuntos *n* para aclarar esto saquemos las consecuencias de estas interpretaciones.

Consecuencia 1

,

Los vectores $\vec{V}_{NO}:\vec{V}_{\binom{n+1}{k+1}\binom{n-1}{k-1}},\vec{V}_{\binom{n+1}{k+1}\binom{n-2}{k-2}},\vec{V}_{\binom{n+1}{k+1}\binom{n-3}{k-3}},\ldots,\vec{V}_{\binom{n-k+1}{k-k+1}\binom{n-k}{k-k}}$ *y los* $\vec{V}_{NE}=\vec{V}_{\binom{n-1}{k-1}\binom{?}{?}},\vec{V}_{\binom{n-2}{k-2}\binom{?}{?}},\vec{V}_{\binom{n-3}{k-3}\binom{?}{?}},\ldots,\vec{V}_{\binom{n-k+1}{k-k+1}\binom{k}{k}}$ *están conectados por la razón de que hay vectores* $\vec{V}_{NO}$ *cuyos extremos coinciden con el origen de algunos vectores* $\vec{V}_{NE}$ *estos en conjunto da información sobre la cantidad de subconjuntos que aun teniendo* $2,3,4,\ldots,k$ *elementos en común no tienen en común a los* $2,3,4,\ldots,n-k$ *elementos restantes del conjunto de cardinal n.*

Con base a esta interpretación se podría analizar el problema número dos del capítulo IV.

Consecuencia 2

Los $\vec{V}_{NE}$ *y* $\vec{V}_{NO}$ *están conectados por la razón de que hay vectores* $\vec{V}_{NE}$ *cuyos extremos coinciden con el origen de algunos vectores* $\vec{V}_{NO}$ *estos en conjuntos dan información sobre la cantidad de subconjuntos que aun no teniendo* $2,3,4,\ldots,n-k$ *elementos en común tienen* $2,3,4,\ldots,m$ *elementos en común (los restantes del conjunto de cardinal n). Recuerde también que* $0<m\leq k$.

El Principio de Hockey la suma de los t primeros números naturales.

Hay dos diagonales que contienen a los t primeros números naturales; estas son:

,

$$D_{p_1}=\left\{\binom{1}{1},\binom{1+1}{1},\binom{1+2}{1},\ldots,\binom{t+1-1}{1},\binom{t+1}{1}\right\}.$$

$D_{n_1}=\left\{\binom{1}{0},\binom{1+1}{1},\binom{1+2}{2},\ldots,\binom{k+1-1}{k},\binom{k+1}{k}\right\}$ y si se le aplica a estas diagonales el principio de Hockey se podrá encontrar la suma de los t primeros números naturales. Cabe de destacar que al aplicar el Principio de Hockey el último número de la sumatoria es $k+1$ sin embargo no es un obstáculo para conseguir lo que se quiere. A continuación se presentara la demostración de lo antes expuesto como lemas.

Lema 1

Para n=1 y $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+t-1}{n}+\binom{n+t}{n}=\binom{n+t+1}{n+1}$ se obtiene que $1+2+3+\cdots+(t-1)+t=\binom{t+1}{2}$.

Demostración

Cuando $n=1$ la expresión del lema es

$\binom{1}{1}+\binom{1+1}{1}+\binom{1+2}{1}+\cdots+\binom{1+t-1}{1}+\binom{1+t}{1}=\binom{1+t+1}{1+1}$, es decir D_{p_1}

$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{t}{1}+\binom{t+1}{1}=\binom{t+2}{2}$.

Como $\binom{n}{1}=n$ se consigue que: $1+2+3+\cdots+(t-1)+t+\binom{t+1}{1}=\binom{t+2}{2}$.

Aparte:

$$1+2+3+\cdots+(t-1)+t=\binom{t+2}{2}-\binom{t+1}{1}.$$

Como:

,

$$\binom{t+2}{2}-\binom{t+1}{1}=\binom{t+1}{2}$$ Por propiedad T1 queda que:

$$1+2+3+\cdots+(t-1)+t=\binom{t+1}{2}$$, al mismo tiempo:

$$\binom{t+1}{2}=\frac{(t+1)!}{2!(t+1-2)!}=\frac{(t+1)(t)(t-1)!}{2!(t-1)!}=\frac{t(t+1)}{2}.$$

Se alcanza que:

$$1+2+3+\cdots+(t-1)+t=\frac{t(t+1)}{2}.$$

Lema 2

Para $n=1$ y $\binom{1}{0}+\binom{1+1}{1}+\binom{1+2}{2}+\cdots+\binom{k+1-1}{k}+\binom{k+1}{k}$ se obtiene que $1+2+3+\cdots+(t-1)+t=\binom{t+1}{2}$.

Nota: se le dejar al lector que lo analice a partir de la propiedad" b" puesto que los términos de esta sumatoria son simétricos a la sumatoria de los términos de la sumatoria del lema 1.

,

CAPITULO VI

La sucesión de Fibonacci

,

6.1. Introducción

Durante la alta Edad Media la productividad matemática disminuyó considerablemente, sin embargo un matemático brillante destaco, Leonardo de Pisa (1.175-1.250, aprox.), también llamado Fibonacci (abreviatura de filius Bonacci, es decir, hijo de Bonacci). Los detalles de su vida son muy fragmentados, no obstante es conocido que le fue enseñado el uso del ábaco a muy temprana edad. Además es de resaltar que su padre fue un mercader-diplomático, gracias a ello, tuvo la oportunidad de viajar extensivamente en el área mediterránea teniendo contacto con comerciantes portadores de tradiciones matemáticas de muy diversas culturas, buscando así ansiosamente el conocimiento matemático de cada país. En el curso de estos continuos viajes, aplicó su talento y capacidad de síntesis para amalgamar muchos de estos conocimientos matemáticos.

Fibonacci encontró los números hindú-arábigos muy superiores a cualquier otro sistema conocido de numeración, invirtió un gran esfuerzo por fomentar su uso en Europa Occidental. Así en 1.202publica un tratado de aritmética y álgebra, llamado Liber Abacci (libro del ábaco o de contar), esta obra contenía casi todos los conocimientos algebraicos y aritméticos de aquel tiempo y desempeñó un papel notable en el desarrollo de la Matemática de Europa Occidental, es el primer lugar donde se encuentran los números hindú-arábigos ampliamente. Cabe resaltar que desde que los árabes se opusieron al cristianismo, estos dígitos *infieles* se les prohibieron; esto podría considerarse la razón principal de su ausencia en esa época en Europa Occidental.

En Liber Abacci, se describían reglas elementales para sumar, restar, multiplicar y dividir semejantes a la que nosotros utilizamos hoy en día, y en las que se pueden apreciar las grandes ventajas del sistema de notación posicional. Hay una contribución muy destacable en esta obra, se trata de los problemas que planteaba como ejercicio para los lectores, cuyo carácter atractivo y moderno contribuyó a que fueran tomados por muchos autores para su posterior estudio. Uno de esos problemas es el que da origen a la tan conocida sucesión, centro de estudio del presente capítulo, y que humildemente intenta resaltar la inagotable belleza de la Matemática presente en este caso en la sucesión de Fibonacci.

6.2. La sucesión de Fibonacci. ¡Un problema de conejos!

Como sucede muchas veces en la historia de la Matemática, el principio de todo es un humilde problema en apariencia bastante trivial, que en este caso dice así:

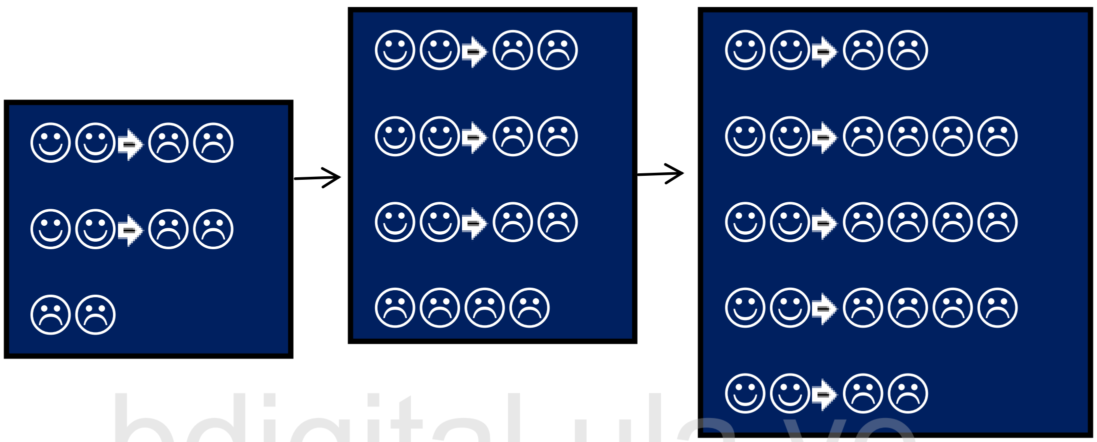
> Un par de conejos genera cada mes a un nuevo par de conejos de sexos opuestos. Al inicio del segundo mes cada nuevo par va a producir un par cada mes. Encuentre el número de pares de conejos generados por el primer par al término del año.

Visto el problema de otra forma equivalente, podríamos considerar una situación en la que un par de conejos recién nacidos es liberado en una isla, una vez transcurridos dos meses este par va a producir o procrear un nuevo par de conejos de sexos opuestos cada mes, las demás parejas procreadas se comportaran del mismo modo. Esto supone que cada pareja solo se reproduce entre sí. Por otro lado si consideramos que no hay mortalidad, cabe preguntarse ¿Cuál es el número de parejas nacidas al *n*-ésimo mes?

Para responder la incógnita, llamaremos f_n al número de parejas nacidas al *n*-ésimo mes, y denotemos por ☺☺ a las parejas en condiciones de parir cada mes y ☹☹ a las parejas inmaduras (parejas recién nacidas o de un mes de nacidas). El proceso mediante dibujos es el siguiente:

$f_1 = 1$ $f_2 = 1$ $f_3 = 2$

$f_4 = 3$



$f_5 = 5$ $f_6 = 8$

$f_7 = 13$

En cualquier caso una vez transcurrido el primer y segundo mes, el número de parejas nacidas es 1, es decir, $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$. Por otro lado considerando que haya transcurrido 3 o más meses, es decir, para $n \geq 3$, el número de parejas nacidas f_n será igual al número de parejas nacidas el mes pasado f_{n-1} más las parejas procreadas ese mes y puesto que cada pareja está en condiciones de procrear una vez transcurridos dos meses, las parejas procreadas ese mes son la misma cantidad que las parejas nacidas hace dos meses f_{n-2}. Luego se obtiene que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para todo $n \geq 3$.

,

De esta forma podemos determinar el número de parejas nacidas el n-ésimo mes, estos resultados, de los cuales los obtenidos hasta el momento son $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$ constituyen los términos de la sucesión de Fibonacci. Es de observar que la sucesión se ha obtenido a través del problema propuesto, y que cada término representa un resultado particular de dicho problema. La fórmula antes expuesta representa la fórmula de recurrencia de la sucesión y de ahora en adelante representa la propiedad 1 (F1), de acuerdo con esta fórmula la sucesión está conformada por dos términos iniciales $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$ y cualquier otro termino es el resultado de sumar los dos términos anteriores a esté. Muchas propiedades son las que contiene esta bella y fructífera sucesión, las cuales algunas de estas serán estudiadas a continuación.

6.3. Propiedades de la sucesión de Fibonacci

F1. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \forall \;\; n \geq 3.$

Demostración

Considerando el problema de Liber Abacci, tenemos que f_n es el número de parejas nacidas al n-ésimo mes, en cualquier caso una vez transcurrido el primer y segundo mes, el número de parejas nacidas es 1, es decir, $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$. Además si se considera que haya transcurrido 3 o más meses, es decir, para $n \geq 3$ el número de parejas nacidas f_n será igual al número de parejas nacidas al mes pasado f_{n-1} más las parejas procreadas ese mes y puesto que cada pareja está en condiciones de procrear una vez transcurridos dos meses, las parejas procreadas

,

ese mes es la misma cantidad que las parejas nacidas al mes f_{n-2}. Por tanto: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \forall \; n \geq 3.$ ■

F2. $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \; \forall \; n \geq 2.$
$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \; \forall \; n \geq 1.$

Demostración

Por F1, tenemos que

$$f_{n+1} = f_{(n+1)-1} + f_{(n+1)-2} \;\; \forall \; n+1 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \;\; \forall \; n \geq 2$$
$$f_{n+2} = f_{(n+2)-1} + f_{(n+2)-2} \;\; \forall \; n+2 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \;\; \forall \; n \geq 1.$$ ■

F3. $f_{m+n} = f_n \cdot f_{m+1} + f_m \cdot f_{n-1}, \; \forall \; n \geq 2$ y $m \geq 1$. *Identidad de Honsberger*.

Demostración

Sí $m = 1$, por F1 se cumple que

$$f_{1+n} = f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = f_n \cdot f_2 + f_1 \cdot f_{n-1}.$$

De allí que la identidad se cumpla para $m = 1$. Supongamos ahora que la propiedad sea cierta para algún $m = k$, esto es

$$f_{k+n} = f_n \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_{n-1}, \text{para algún } k \in \; .$$

Veamos que también es cierta para $n = k+1$, es decir, que su cumpla la siguiente identidad:

,

$$f_{(k+1)+n} = f_n \cdot f_{k+2} + f_{k+1} \cdot f_{n-1}.$$

Luego, como hemos supuesto que la propiedad es válida para algún $m = k$, obtenemos que $f_{(k+1)+n} = f_{k+(n+1)} = f_{n+1} \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_n$.

Aplicando F2, se tiene

$$\begin{aligned}
f_{(k+1)+n} &= (f_n + f_{n-1}) \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_n \\
f_{(k+1)+n} &= f_n \cdot f_{k+1} + f_{n-1} \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_n \\
f_{(k+1)+n} &= f_n \cdot (f_{k+1} + f_k) + f_{n-1} \cdot f_{k+1} \\
f_{(k+1)+n} &= f_n \cdot f_{k+2} + f_{n-1} \cdot f_{k+1} \\
f_{(k+1)+n} &= f_n \cdot f_{k+2} + f_{k+1} \cdot f_{n-1}.
\end{aligned}$$

Esto es, que la identidad es cierta para $n = k+1$, luego por el principio de inducción matemática queda esto demostrado. $\blacksquare$

F4. $f_{2\cdot n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2, \ \forall \ n \geq 1.$

Demostración

Tenemos que para $n = 1$ se cumple la identidad, puesto que

$$f_3 = f_{2\cdot(1)+1} = f_{1+1}^2 + f_1^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2.$$

Supongamos ahora que la propiedad sea cierta para algún $n = k$, esto es

$$f_{2\cdot k+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2, \text{para algún}\, k \in \quad .$$

Queremos probar que esta identidad es cierta para $n = k+1$, es decir, que se cumpla que $f_{2\cdot(k+1)+1} = f_{k+1}^2 + f_{k+2}^2$.

,

Luego, por F2tenemos

$$
\begin{aligned}
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{[2\cdot(k+1)+1]-1} + f_{[2\cdot(k+1)+1]-2} \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{2\cdot(k+1)} + f_{2\cdot(k+1)-1} \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{2\cdot k+2} + f_{2\cdot k+1} \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{2\cdot k+1} + f_{2\cdot k} + f_{2\cdot k+1}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $f_{2\cdot k+1}$ (la hipótesis inductiva), obtenemos

$$f_{2\cdot(k+1)+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2 + f_{2\cdot k} + f_k^2 + f_{k+1}^2.$$

Si $k \geq 2$ y aplicando la identidad de Honsberger en $f_{2\cdot k}$, obtenemos

$$f_{2\cdot(k+1)+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2 + (f_k \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_{k-1}) + f_k^2 + f_{k+1}^2.$$

Nuevamente aplicando F2se tiene que

$$
\begin{aligned}
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{k+1}^2 + f_k \cdot f_{k+1} + f_k \cdot (f_k + f_{k-1}) + f_k^2 + f_{k+1}^2 \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{k+1}^2 + f_k \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_{k+1} + f_k^2 + f_{k+1}^2 \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{k+1}^2 + 2 \cdot f_k \cdot f_{k+1} + f_k^2 + f_{k+1}^2 \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= (f_{k+1} + f_k)^2 + f_{k+1}^2 \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{k+2}^2 + f_{k+1}^2 \\
f_{2\cdot(k+1)+1} &= f_{k+1}^2 + f_{k+2}^2.
\end{aligned}
$$

De esta forma sí $k \geq 2$, la identidad es cierta para $k+1$. En el caso que $k = 1$, no podemos aplicar la identidad de Honsberger, sin embargo es fácil verificar que también se cumple esta propiedad, puesto que

$$
\begin{aligned}
f_{2\cdot(1+1)+1} &= f_{1+1}^2 + f_{1+2}^2 \\
f_5 &= f_2^2 + f_3^2 \\
f_5 &= 1^2 + 2^2 = 5.
\end{aligned}
$$

,

Luego, puesto que la propiedad es válida para $m=1$ y si es cierto para k, entonces también lo es para $k+1$, por el principio de inducción matemática queda esto demostrado. $\blacksquare$

F5. $f_{n+1}^2 - f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+2}, \quad \forall \ n \geq 2.$

Demostración

Debido a que los números de Fibonacci son números reales, se cumple que

$$f_{n+1}^2 - f_n^2 = (f_{n+1} + f_n) \cdot (f_{n+1} - f_n).$$

Luego por F2, obtenemos

$$f_{n+1}^2 - f_n^2 = f_{n+2} \cdot f_{n-1} = f_{n-1} \cdot f_{n+2}. \blacksquare$$

A manera de recordatorio, se dice que dos números enteros $a \, y \, b$ son primos entre sí o coprimos, si en el conjunto formado por los divisores comunes de estos solo está el 1, dicho de otra forma, que el máximo común divisor de $a \, y \, b$ es igual a 1 ($mcd(a,b)=1$). Por otro lado, dados dos números enteros no nulos $a \; y \; b$ con $a>0$, podemos siempre hallar su máximo común divisor a través del algoritmo de Euclides, el cual plantea el siguiente procedimiento:

Aplicar el algoritmo de la división sobre $a \, y \, b$ y luego hacerlo sucesivamente sobre los dividendos y restos. De esta forma se generan las siguientes ecuaciones:

,

$$\left.\begin{array}{lll} b = q_1 \cdot a + r_1 & \text{con} & 0 < r_1 < a \\ a = q_2 \cdot r_1 + r_2 & \text{con} & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 & \text{con} & 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n & \text{con} & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n. & & \end{array}\right. \Rightarrow mcd(a,b) = r_n .$$

F6. Dos números de Fibonacci consecutivos cualesquiera son siempre primos entre sí.

Demostración

En particular, si queremos hallar el máximo común divisor de dos números de Fibonacci, para $n \geq 3$ por F1 se cumple que

$$\begin{array}{lll} f_n = 1 \cdot f_{n-1} + f_{n-2} & \text{con} & 0 < f_{n-2} < f_{n-1} \\ f_{n-1} = 1 \cdot f_{n-2} + f_{n-3} & \text{con} & 0 < f_{n-2} < f_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_4 = 1 \cdot f_3 + f_2 & \text{con} & 0 < f_2 < f_3 \\ f_3 = 1 \cdot f_2 + 1. & & \end{array}$$

Esto es, que el $mcd(f_n, f_{n-1}) = f_2 = 1 \quad para \quad n \geq 3$. En el caso de $f_2 \;\; y \;\; f_1$ es claro que su máximo común divisor es igual a 1. De esta forma se ha demostrado que cualesquiera dos números de Fibonacci consecutivos son primos entre sí. ∎

,

F7. La suma de diez números consecutivos de Fibonacci es igual a 11 veces, el 7° elemento de ese grupo. (No hay que comenzar necesariamente por f_1).

Demostración

Si hacemos la suma de los primeros diez números de Fibonacci, obtenemos que $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143=11\cdot 13$. Esto nos da una pista, puesto que se puede observar que hay grupos de números, cuya suma es múltiplo de 13. Estos son:

$$\underbrace{13}_{7^\circ \text{ número}} = 13$$

$$\underbrace{5+8}_{5^\circ \text{ y } 6^\circ \text{ número}} = 13$$

$$\underbrace{2+3+21}_{3^\circ,\, 4^\circ \text{ y } 8^\circ \text{ número}} = 2\cdot 13$$

$$\underbrace{1+1+34+55}_{1^\circ,\, 2^\circ,\, 9^\circ \text{ y } 10^\circ \text{ número}} = 7\cdot 13.$$

Teniendo en cuenta como se generan los múltiplos del 7° número de Fibonacci, obtenemos que dados $f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, f_{k+3}, f_{k+4}, f_{k+5}, f_{k+6}, f_{k+7}, f_{k+8}$ y f_{k+9} se cumple por F1 que

$$\underbrace{f_{k+6}}_{7^\circ \text{ número}} = f_{k+6}.$$

$$\underbrace{f_{k+4}+f_{k+5}}_{5^\circ \; y \; 6^\circ \text{ número}} = f_{k+6}.$$

$$\underbrace{f_{k+2}+f_{k+3}+f_{k+7}}_{3^\circ,\, 4^\circ \; y \; 8^\circ \text{ número}} = f_{k+4}+f_{k+5}+f_{k+6} = f_{k+6}+f_{k+6} = 2\cdot f_{k+6}.$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{f_k+f_{k+1}+f_{k+8}+f_{k+9}}_{1^\circ,\, 2^\circ,\, 9^\circ \; y \; 10^\circ \text{ número}} &= f_{k+2}+f_{k+6}+f_{k+7}+f_{k+7}+f_{k+8} \\
&= f_{k+2}+f_{k+6}+f_{k+5}+f_{k+6}+f_{k+5}+f_{k+6}+f_{k+6}+f_{k+7} \\
&= 4\cdot f_{k+6}+f_{k+2}+f_{k+3}+f_{k+4}+f_{k+5}+f_{k+5}+f_{k+6} \\
&= 5\cdot f_{k+6}+f_{k+4}+f_{k+4}+f_{k+5}+f_{k+5}+f_{k+6} \\
&= 5\cdot f_{k+6}+f_{k+6}+f_{k+6} \\
&= 7\cdot f_{k+6}.
\end{aligned}$$

,

Luego, se obtiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{9} f_{k+i} &= f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + f_{k+3} + f_{k+4} + f_{k+5} + f_{k+6} + f_{k+7} + f_{k+8} + f_{k+9}\\ &= (f_{k+6}) + (f_{k+4} + f_{k+5}) + (f_{k+2} + f_{k+3} + f_{k+7}) + (f_k + f_{k+1} + f_{k+8} + f_{k+9})\\ &= f_{k+6} + f_{k+6} + 2\cdot f_{k+6} + 7\cdot f_{k+6}\\ &= 11\cdot f_{k+6}.\end{aligned}$$

Por tanto, dados 10 números de Fibonacci consecutivos cualesquiera, siempre su suma será 11 veces el séptimo número. █

F8. $\sum_{i=1}^{n-2} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-2} = f_n - 1$

Demostración

Partiendo deF1: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ y despejando f_{n-2}, esto es $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$, podemos escribir cada término de la sumatoria de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2,\\ f_2 &= f_4 - f_3,\\ f_3 &= f_5 - f_4,\\ f_4 &= f_6 - f_5,\\ &\vdots\\ f_{n-2} &= f_n - f_{n-1}.\end{aligned}$$

Si sumamos los términos que están a la derecha de la igualdad y lo igualamos a la suma de los términos que están después del mismo, tenemos

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-2} = f_3 - f_2 + f_4 - f_3 + f_5 - f_4 + \cdots + f_n - f_{n-1}.$$

,

Luego:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-2} = f_n - f_2.$$

Siendo $f_2 = 1$ queda que

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-2} = f_n - 1. \blacksquare$$

F9. $\sum_{i=1}^{n} f_{2\cdot i-1} = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2\cdot n-1} = f_{2\cdot n}$

Demostración

Empecemos a observar un patrón de comportamiento a través de algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}
&f_1 + f_{2\cdot 2-1} = 1 + 2 = f_4 = f_{2\cdot 2} \\
&f_1 + f_3 + f_{2\cdot 3-1} = 1 + 2 + 5 = f_6 = f_{2\cdot 3} \\
&f_1 + f_3 + f_5 + f_{2\cdot 4-1} = 1 + 2 + 5 + 13 = f_8 = f_{2\cdot 4}.
\end{aligned}$$

Si analizamos la segunda y la tercera fila, tenemos que

$$\begin{aligned}
&f_{2\cdot 3} = f_1 + f_3 + f_5 = f_4 + f_5 = f_{2\cdot 3-2} + f_{2\cdot 3-1} \\
&f_{2\cdot 4} = f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = f_6 + f_7 = f_{2\cdot 4-2} + f_{2\cdot 4-1}.
\end{aligned}$$

De lo antes expuesto, la sumatoria de una fila se puede ver como la sumatoria de la fila anterior más el último término; de esto podemos obtener el siguiente lema:

Lema 1

$f_{2\cdot n} = f_{2\cdot n-2} + f_{2\cdot n-1}, \ \forall \ n \geq 2.$

,

Esto es cierto, puesto que si hacemos $2 \cdot n = k$ queda por F1 que

$$f_k = f_{k-2} + f_{k-1}.$$

El lema anterior se realizó con la finalidad de relacionar el último término de la sumatoria con el resultado de la sumatoria, para así hallar una idea de cómo desarrollar la demostración.

En este sentido, cada término de la sumatoria es de la forma $f_{2\cdot n-1}$, por lo que cada uno de ellos se puede escribir usando el lema, de esta forma se obtiene

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_2, \\
f_3 &= f_4 - f_2, \\
f_5 &= f_6 - f_4, \\
f_7 &= f_8 - f_6, \\
&\vdots \\
f_{2\cdot n-1} &= f_{2\cdot n} - f_{2\cdot n-2}.
\end{aligned}$$

Sumando los términos de la derecha de la igualdad e igualándolo con la suma de los términos que están después del mismo, vemos que:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots f_{2\cdot n-1} = f_2 + f_4 - f_2 + f_6 - f_4 + f_8 - f_6 + \cdots + f_{2\cdot n} - f_{2\cdot n-2}.$$

Luego

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2\cdot n-1} = f_{2\cdot n}. \blacksquare$$

,

F10. $\sum_{i=1}^{n} f_{2\cdot i} = f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2\cdot n} = f_{2\cdot n+1} - 1$

Demostración

Partiendo de la misma manera a como lo hicimos en el problema anterior, vemos que

$$\begin{aligned} &f_2 + f_4 = 1 + 3 = f_5 - 1 \\ &f_2 + f_4 + f_{2\cdot 3} = 1 + 3 + 8 = f_7 - 1 \\ &f_2 + f_4 + f_6 + f_{2\cdot 4} = 1 + 3 + 8 + 21 = f_9 - 1. \end{aligned}$$

Como cada fila (de arriba) se puede escribir en términos de la anterior, por ejemplo

$$f_2 + f_4 + f_{2\cdot 3} = f_7 - 1.$$

Se puede ver como

$$\begin{aligned} &f_7 - 1 = f_5 - 1 + f_6 \\ &f_7 = f_6 + f_5. \end{aligned}$$

De esta forma, podemos obtener el siguiente lema

Lema 2

$$f_{2\cdot n-1} + f_{2\cdot n} = f_{2\cdot n+1}, \quad \forall \; n \geq 1.$$

Esto es cierto, puesto que si hacemos $2 \cdot n = k$, por F2obtenemos que

$$f_{k+1} = f_{k-1} + f_k.$$

,

En virtud del Lema 2, cada término de la sumatoria de la forma $f_{2\cdot n}$, se puede escribir como

$$f_{2\cdot n} = f_{2\cdot n+1} - f_{2\cdot n-1}.$$

Esto es

$$\begin{aligned} f_2 &= f_3 - f_1, \\ f_4 &= f_5 - f_3, \\ f_6 &= f_7 - f_5, \\ &\vdots \\ f_{2\cdot n} &= f_{2\cdot n+1} - f_{2\cdot n-1}. \end{aligned}$$

Sumando los términos de la derecha de la igualdad e igualándolo con la suma de los términos que están después del mismo, obtenemos

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2\cdot n} = f_3 - f_1 + f_5 - f_3 + f_7 - f_5 + \cdots + f_{2\cdot n+1} - f_{2\cdot n-1}.$$

Luego, se obtiene que

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2\cdot n} = -f_1 + f_{2\cdot n+1} = f_{2\cdot n+1} - 1. \blacksquare$$

F11. $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

Demostración

Teniendo en cuenta la manera en como hemos procedido anteriormente, hagamos algo breve:

,

$$f_1 = f_1 \cdot f_2$$
$$f_1^2 + f_2^2 = 1^2 + 1^2 = f_2 \cdot f_3$$
$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = f_3 \cdot f_4.$$

Reescribiendo la última sumatoria, a partir de la anterior tenemos que $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f_3 \cdot f_4$. Se puede ver como $f_2 \cdot f_3 + f_3^2 = f_3 \cdot f_4$. En general, podríamos considerar el siguiente lema:

Lema 3

$$f_{n-1} \cdot f_n + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \quad \forall \quad n \geq 2.$$

Operando se tiene que

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n+1} - f_{n-1} \\ f_n \cdot f_n &= f_n \left(f_{n+1} - f_{n-1} \right) \\ f_n^2 &= f_n \cdot f_{n+1} - f_n \cdot f_{n-1}. \end{aligned}$$

Luego, despejando $f_n \cdot f_{n+1}$, queda que

$$f_{n-1} \cdot f_n + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \quad \forall \quad n \geq 2.$$

Rescribiendo cada término de la sumatoria a través del Lema 3, tenemos que

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1 \cdot f_2, \\ f_2^2 &= f_2 \cdot f_3 - f_1 \cdot f_2, \\ f_3^2 &= f_3 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3, \\ f_4^2 &= f_4 \cdot f_5 - f_3 \cdot f_4, \\ &\vdots \\ f_n^2 &= f_n . f_{n+1} - f_n \cdot f_{n-1}. \end{aligned}$$

,

Sumando los términos de la derecha de la igualdad e igualándolo con la suma de los términos que están a la izquierda, queda que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 - f_1 \cdot f_2 + f_3 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3 + f_4 \cdot f_5 - f_3 \cdot f_4 + \cdots + f_n . f_{n+1} - f_n \cdot f_{n-1}.$$

Finalmente obtenemos que

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}. \blacksquare$$

F12. $f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 + \cdots + f_{2\cdot n-1} \cdot f_{2\cdot n} = f_{2\cdot n}^2$

Demostración

Veamos que

$$f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 = f_4^2 \text{................................}(1)$$
$$f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 + f_4 \cdot f_5 + f_5 \cdot f_6 = f_6^2 \text{......}(2).$$

Relacionando 1 y 2, obtenemos

$$f_4^2 + f_4 \cdot f_5 + f_5 \cdot f_6 = f_6{}^2.$$

De esta forma, obtenemos el siguiente lema

Lema 4

$f_{2\cdot n-2} \cdot f_{2\cdot n-1} + f_{2\cdot n-1} \cdot f_{2\cdot n} = f_{2\cdot n}{}^2 - f_{2\cdot n-2}^2, \quad \forall \ \ n \geq 2.$

Haciendo $k = 2 \cdot n$ tenemos que $f_{k-2} \cdot f_{k-1} + f_{k-1} \cdot f_k = f_k{}^2 - f_{k-2}^2$.

Luego

,

$$
\begin{aligned}
f_{k-2}\cdot f_{k-1}+f_{k-1}\cdot f_k &= f_{k-1}\cdot(f_{k-2}+f_k)\\
&= f_{k-1}\cdot(f_{k-2}+f_k)\cdot\left(\frac{f_{k-2}-f_k}{f_{k-2}-f_k}\right)\\
&= f_{k-1}\cdot(f_{k-2}+f_k)\cdot\left(\frac{f_{k-2}-f_k}{-f_{k-1}}\right)\\
&= \frac{f_{k-1}\cdot(f_{k-2}+f_k)\cdot(f_{k-2}-f_k)}{-f_{k-1}}\\
&= -({f_{k-2}}^2-{f_k}^2)\\
&= {f_k}^2-{f_{k-2}}^2.
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio queda que

$$f_{2n-2}\cdot f_{2n-1}+f_{2n-1}\cdot f_{2n}={f_{2n}}^2-f_{2n-2}^2.$$

Despejando de la ecuación anterior $f_{2\cdot n-1}\cdot f_{2\cdot n}$ y escribiendo algunos términos de la sumatoria en función de esto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
f_1\cdot f_2 &= {f_2}^2,\\
f_2\cdot f_3 &= f_4^2-f_2^2-f_3\cdot f_4,\\
f_5\cdot f_6 &= f_6^2-f_4^2-f_4.f_5,\\
f_7\cdot f_8 &= f_8^2-f_6^2-f_6\cdot f_7,\\
&\vdots\\
f_{2\cdot n-1}\cdot f_{2\cdot n} &= {f_{2\cdot n}}^2-f_{2\cdot n-2}^2-f_{2\cdot n-2}\cdot f_{2\cdot n-1}.
\end{aligned}
$$

Sumando los términos de la derecha de la igualdad e igualándolo con la suma de los términos que están a la izquierda, queda que

$$f_1\cdot f_2+f_2\cdot f_3+f_4\cdot f_5+f_7\cdot f_8+\cdots+f_{2n-1}\cdot f_{2n}=$$

$$={f_2}^2+f_4^2-f_2^2-f_3\cdot f_4+f_6^2-f_4^2-f_4.f_5+f_8^2-f_6^2-f_6\cdot f_7+\cdots+{f_{2n}}^2-f_{2n-2}^2-f_{2n-2}\cdot f_{2n-1}.$$

,

Luego

$$f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_4 \cdot f_5 + f_7 \cdot f_8 + \cdots + f_{2\cdot n-1} \cdot f_{2\cdot n} = -f_3 \cdot f_4 - f_4 \cdot f_5 + \cdots + {f_{2\cdot n}}^2$$

Pasando los términos de la derecha, de la forma $f_{n-1} \cdot f_n$ a la izquierda nos queda que

$$f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 + f_4 \cdot f_5 + f_4 \cdot f_5 + f_7 \cdot f_8 + \cdots + f_{2\cdot n-1} \cdot f_{2\cdot n} = {f_{2\cdot n}}^2. \blacksquare$$

F13. $f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 + f_4 \cdot f_5 + \cdots + f_{2\cdot n} \cdot f_{2\cdot n+1} = f_{2\cdot n} \cdot f_{2\cdot n+2}$

Demostración

Tenemos que por F12se cumple que

$$f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 + \cdots + f_{2\cdot n-1} \cdot f_{2\cdot n} = f_{2\cdot n}^2.$$

Luego, sumando el último término de la sucesión en cuestión tenemos que

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 + \cdots + f_{2\cdot n-1} \cdot f_{2\cdot n} + f_{2\cdot n} \cdot f_{2\cdot n+1} &= f_{2\cdot n}^2 + f_{2\cdot n} \cdot f_{2\cdot n+1} \\ &= f_{2\cdot n} \cdot (f_{2\cdot n} + f_{2\cdot n+1}) \\ &= f_{2\cdot n} \cdot f_{2\cdot n+2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

,

F14 $f_{k\cdot n}$ *es un múltiplo de* f_n, *para todo* $k \geq 1$.

Demostración

Tenemos que para k=1, se cumple puesto que

$$f_{1\cdot n} = f_n.$$

Supongamos que se cumple la propiedad para *k,* es decir, que se cumple

$$f_{k\cdot n} = c \cdot f_n, \text{ para algún } c \in \quad .$$

Luego para $k+1$, obtenemos:

$$f_{(k+1)\cdot n} = f_{k\cdot n+n}.$$

Aplicando la identidad de Honsberger, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_{(k+1)\cdot n} &= f_{k\cdot n+n} \\ &= f_n \cdot f_{k\cdot n+1} + f_{n-1} \cdot f_{k\cdot n} \\ &= f_n \cdot f_{k\cdot n+1} + f_{n-1} \cdot (c \cdot f_n) \\ &= f_n \cdot (f_{k\cdot n+1} + f_{n-1} \cdot c). \end{aligned}$$

De esta forma por el principio de inducción queda esto demostrado. $\blacksquare$

F15. $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$. *Identidad de Cassini.*

Demostración

Veamos que si $n = 2$ se cumple la identidad puesto que

,

$$\begin{aligned} f_{2-1}\cdot f_{2+1}-f_2^2 &= f_{2-1}\cdot f_{2+1}-f_2^2 \\ &= f_1\cdot f_3-f_2^2 \\ &= 1\cdot 2-(1)^2 \\ &= (-1)^2. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que la propiedad sea cierta para algún $n=k$, esto es

$$f_{k-1}\cdot f_{k+1}-f_k^2=(-1)^k.$$

Luego para $n=k+1$, tenemos que por F2 se cumple que

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} &= (-1)^k\cdot(-1) \\ &= (f_{k-1}\cdot f_{k+1}-f_k^2)\cdot(-1) \\ &= f_k^2-f_{k-1}\cdot f_{k+1} \\ &= f_k^2-(f_{k+1}-f_k)\cdot f_{k+1} \\ &= f_k^2-f_{k+1}{}^2+f_k\cdot f_{k+1} \\ &= f_k^2+f_k\cdot f_{k+1}-f_{k+1}{}^2 \\ &= f_k\cdot(f_k+f_{k+1})-f_{k+1}{}^2 \\ &= f_k\cdot f_{k+2}-f_{k+1}{}^2. \end{aligned}$$

Esto es que la identidad es cierta para $k+1$, de esta forma por el principio de inducción matemática queda esto demostrado. ∎

F16. $f_m\cdot f_{n+1}-f_n\cdot f_{m+1}=(-1)^n\cdot f_{m-n}$. *Identidad de Ocagne.*

Demostración

Veamos que para $n=1$ se cumple que

,

$$\begin{aligned} f_m \cdot f_{1+1} - f_1 \cdot f_{m+1} &= f_m \cdot f_2 - f_1 \cdot f_{m+1} \\ &= f_m - f_{m+1} \\ &= f_m - (f_m + f_{m-1}) \\ &= f_m - f_m - f_{m-1} \\ &= (-1)^1 \cdot f_{m-1}. \end{aligned}$$

Supongamos que esta identidad sea cierta para $n=k$, esto es

$$f_m \cdot f_{k+1} - f_k \cdot f_{m+1} = (-1)^k \cdot f_{m-k}.$$

Luego

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \cdot f_{m-(k+1)} &= -(-1)^k \cdot f_{m-k-1} \\ &= -(-1)^k \cdot f_{(m-1)-k} \\ &= -(f_{m-1} \cdot f_{k+1} - f_k \cdot f_m) \\ &= f_k \cdot f_m - f_{m-1} \cdot f_{k+1} + f_m \cdot f_{k+1} - f_m \cdot f_{k+1} \\ &= f_k \cdot f_m + f_m \cdot f_{k+1} - f_{m-1} \cdot f_{k+1} - f_m \cdot f_{k+1} \\ &= f_m \cdot (f_k + f_{k+1}) - f_{k+1} \cdot (f_{m-1} + f_m) \\ &= f_m \cdot f_{k+2} - f_{k+1} \cdot f_{m+1}. \end{aligned}$$

Esto es que la identidad es cierta para $n=k+1$. ■

F17. $f_n^2 - f_{n+r} \cdot f_{n-r} = (-1)^{n-r} \cdot f_r^2$. *Identidad de Catalan.*

Demostración

En este caso es conveniente hacer el siguiente cambio: $x=n-r \quad y \quad a=r$, de esta forma se obtiene

$$f_{x+a}^2 - f_{x+2\cdot a} \cdot f_x = (-1)^x \cdot f_a^2.$$

Luego aplicando la *Identidad de Honsberger*, obtenemos que

,

$$f_{x+a}^2 - f_{x+2\cdot a}\cdot f_x = (f_x\cdot f_{a+1} + f_a\cdot f_{x-1})^2 - (f_x\cdot f_{2\cdot a+1} + f_{2\cdot a}\cdot f_{x-1})\cdot f_x.$$

Desarrollando la expresión de modo que aparezca el factor f_a^2, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f_{x+a}^2 - f_{x+2\cdot a}\cdot f_x &= f_x^{\,2}\cdot f_{a+1}^{\;2} + 2\cdot f_x\cdot f_{a+1}\cdot f_a\cdot f_{x-1} + f_a^{\,2}\cdot f_{x-1}^{\;2} \\
&\qquad - \left[f_x\cdot(f_a^2 + f_{a+1}^2) + f_{x-1}\cdot(f_a\cdot f_{a+1} + f_a\cdot f_{a-1})\right]\cdot f_x \\
&= f_x^{\,2}\cdot f_{a+1}^{\;2} + 2\cdot f_x\cdot f_{a+1}\cdot f_a\cdot f_{x-1} + f_a^{\,2}\cdot f_{x-1}^{\;2} \\
&\qquad - \left[f_x\cdot f_a^2 + f_x\cdot f_{a+1}^2 + f_{x-1}\cdot f_a\cdot f_{a+1} + f_{x-1}\cdot f_a\cdot f_{a-1})\right]\cdot f_x \\
&= f_x^{\,2}\cdot f_{a+1}^{\;2} + 2\cdot f_x\cdot f_{a+1}\cdot f_a\cdot f_{x-1} + f_a^{\,2}\cdot f_{x-1}^{\;2} - f_x^{\,2}\cdot f_a^2 \\
&\qquad - f_x^{\,2}\cdot f_{a+1}^2 - f_x\cdot f_{x-1}\cdot f_a\cdot f_{a+1} - f_x\cdot f_{x-1}\cdot f_a\cdot f_{a-1} \\
&= f_x\cdot f_{a+1}\cdot f_a\cdot f_{x-1} + f_a^{\,2}\cdot f_{x-1}^{\;2} - f_x^{\,2}\cdot f_a^2 - f_x\cdot f_{x-1}\cdot f_a\cdot f_{a-1} \\
&= f_x\cdot f_{x-1}\cdot f_a\cdot(f_{a+1} + f_{a-1}) + f_a^2\cdot(f_{x-1}^{\;2} - f_x^{\,2}) \\
&= f_x\cdot f_{x-1}\cdot f_a\cdot f_a + f_a^2\cdot(f_{x-1}^{\;2} - f_x^{\,2}) \\
&= f_x\cdot f_{x-1}\cdot f_a^2 + f_a^2\cdot(f_{x-1}^{\;2} - f_x^{\,2}) \\
&= f_a^2\cdot(f_x\cdot f_{x-1} + f_{x-1}^{\;2} - f_x^{\,2}) \\
&= f_a^2\cdot\left[f_{x-1}\cdot(f_x + f_{x-1}) - f_x^{\,2}\right] \\
&= f_a^2\cdot(f_{x-1}\cdot f_{x+1} - f_x^{\,2}).
\end{aligned}$$

Luego aplicando la Identidad de Cassini en

$$f_{x-1}\cdot f_{x+1} - f_x^{\,2}.$$

Obtenemos que

$$f_{x+a}^2 - f_{x+2a}\cdot f_x = f_a^2\cdot(-1)^x.$$

Devolviendo el cambio, se obtiene finalmente

$$f_n^2 - f_{n+r}\cdot f_{n-r} = (-1)^{n-r}\cdot f_r^2.\blacksquare$$

,

6.4. La sucesión de Fibonacci y el Triángulo de Tartaglia

Existe una relación del triángulo de Tartaglia con la sucesión de Fibonacci, la cual resulta asombrosa debido a que en apariencia no existe ningún vínculo entre estos temas. Recordemos que en principio podría tratarse la sucesión de Fibonacci solo como un problema de conejos y al triángulo de tartaglia como una tabla de números naturales, sin embargo estos temas contienen infinidad de propiedades que impresionan a cada momento. Veamos la siguiente figura:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \binom{0}{0} = 1 \\
f_2 &= \binom{1}{0} = 1 \\
f_3 &= \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2 \\
f_4 &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3 \\
f_5 &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 \\
f_6 &= \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 \\
f_7 &= \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 13 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Viendo el comportamiento de la figura anterior se puede conjeturar la siguiente formula general para al n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci:

,

$$f_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-k}{k} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}-1} + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} & \forall\, n \text{ impar} \\ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-1-k}{k} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}-2} + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1} & \forall\, n \text{ par} \end{cases}$$

La expresión anterior representa la fórmula general para hallar al *n*-ésimo término, podríamos considerar una forma más resumida de esta, veamos que si aplicamos la función piso (recordando que esta toma cualquier número real y lo convierte en el número entero inmediato menor a este, por ejemplo al 3.445 lo convierte en 3) en $\frac{n-1}{2}$ para n par, tenemos que es de la forma $n = 2 \cdot k$ para algún $k \in$.

Luego tenemos que: $\frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot k}{2} - \frac{1}{2} = k - \frac{1}{2}.$

Es claro que se cumple que

$$k-1 < k - \frac{1}{2} < k+1 \text{ con } (k-1) \in \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2} - 1 < \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2} + 1.$$

Esto es que $\frac{n}{2} - 1$ es el menor entero de $\frac{n-1}{2}$. Por tanto podemos considerar la formula general de la siguiente forma:

$$f_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-1-\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}.$$

CAPITULO VII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

El llevar a cabo la presente investigación en la cual se trazaron una serie de objetivos nos llevó a reflexionar y poner por escrito las siguientes conclusiones:

El planteamiento de un problema puede compararse con un acto de pregunta y reflexión en donde el lector construye mediante la inducción o la deducción los procedimientos de pensamientos que utilizara para la solución del mismo; esto propicia la formación de una crítica consiente por parte del estudiante que lo lleva a conocer sus capacidades, limitaciones para que así utilice con precisión los procesos que le permita adquirir nuevos conocimientos , administrar su aprendizaje y verificar su progreso.

La solución de problemas implica tener dominio interior para obtener un control mental; es decir; tener la preparación interna con el fin de conquistar toda disposición interior para el éxito de los procesos mentales que faciliten y propicien el desarrollo de diferentes tipos de estructura cognitiva.

El aprendizaje que adquiere el estudiante a partir de actividades que involucre desequilibrio cognitivo, por construcción, descubrimiento, interacción social lo lleva tener un comportamiento de disposición para realizar cualquier tarea que involucre la activación de su motivación.

,

La supervisión que lleva a cabo el docente guía durante el proceso de la solución de un problema matemático permite al mismo a captar las potencialidades, capacidades, habilidades y destreza del alumno; la cual es de suma importancia porque llevar a partir de su rol como profesional a guiar al alumno para que profundice (con la motivación del estudiante) muchos temas matemáticos.

El conocer la manera en como un estudiante aprende lleva al docente a manejar una serie de estrategias de cómo ayudar al estudiante a explotar sus potencialidades sin afectarlo cognitivamente y emocionalmente.

La oportunidad de leer, escribir y discutir ideas desde la perspectiva matemática es una experiencia difícil de olvidar debido al tiempo de dedicación y correcciones por las cuales hay que pasar; sin embargo es gratificante que después de realizar un gran esfuerzo uno pueda ver los frutos cosechados.

La incorporación al plan de estudio de la carrera de Educación mención Física y Matemática del NURR del método de Moore (resolución de problemas) puede ser un buen comienzo para adentrar a los estudiante de la carrera y de este modo incentivar, facilitar y sacar el mayor provecho de materias tales como Álgebra I, Álgebra Abstracta y Análisis Matemático.

,

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias, F. (2006): *El Proceso de Investigación*. (3ª ed.). Caracas-Venezuela: Episteme.

Bencomo, M. (2010): *Construcción de Teselados Escherianos empleando Geogebra 3.2*. Trabajo de grado para la obtención del Título de Licenciado en Educación Mención Física y Matemática. ULA-NURR.

Chalice, D. (1995): *How to teach a class by the Modified Moore Method*. American Mathematical Monthly 102, 317-321.

Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

De Guzmán, M. (2004): *Enseñanza de la Matemática*.

Gascón, J. (1998): *Evolución de las didácticas de las matemáticas como disciplina científica*. Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol 18, 7-33.

Halmos, P. (1975): *The Problem of Learning to Teach*. American Mathematical Monthly 82, 466-476.

Halmos, P. (1980): *The Heart of Mathematics*. American Mathematical Monthly 87, 519-524.

Hernández, A. y Mamo J. (2010): *El Lenguaje de Programación Logo, una Alternativa Tecnológica para Construir Geometría*. Trabajo de grado para la obtención del Título de Licenciado en Educación mención Física y Matemática. ULA-NURR.

Hernández, F. y Sánchez J. (2010): *GEOGEBRA Una Propuesta para su Autoaprendizaje y utilización como Herramienta Tecnológica por parte de*

,

Estudiantes de Educación mención Física y Matemáticas del Núcleo Universitario "Rafael Rangel". Trabajo de grado para la obtención del Título de Licenciado en Educación Mención Física y Matemática. ULA-NURR.

Hernández, R., Fernández y Baptista, P. (2003): *Metodología de la Investigación*. (3ª ed). Bogotá-Colombia: McGraw-Hill.

Kleiner, I. (1986): *Famous Problems in Mathematics: an Outline of a Course*. For the Learning of Mathematics 6, 31-38.

Masachs, A., Camprubí, G. y Naudi, M. (2005): *El Aprendizaje Significativo en la Resolución de Problemas Matemáticos*. Facultad de Agroindustrias UNNE. Argentina.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007): *Diseño Curricular del Sistema Educativo Bolivariano*. Caracas, Venezuela.

Papert, S. (1985): *Desafío a la Mente*. Computadoras y Educación. (4ª ed.). Buenos Aires-Argentina: Galápago.

Peñaloza, M. (2011): *Selección de Sugerencias y Preguntas que Modifican la Manera de Abordar Problemas en Matemáticas*. Trabajo de grado para la obtención del

Polya, G. (1963): *On Learning, Teaching, and Learning Teaching*. American Mathematical Monthly 70, 605-619.

Polya, G. (1989): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

Sánchez, R. *La Esquina Olímpica*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Del volumen VIII al XVIII.

Sandia, L. (s/f): *La mediación de las nociones lógico-matemáticas en la edad preescolar*. Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara". Universidad

,

Pedagógica Experimental Libertador. Maracay. [Versión Electrónica]. Extraído el 07 de Octubre de 2012 de: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S079897922002000100002&script=sci_arttext.

Tamayo, M. (2001): *El Proceso de la Investigación Científica*. (4ª ed.). Ciudad de México-México: Limusa.

Torres, M. (2006): *Aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas*. Aldanis.net La revista de educación, número 10.

ULA (2004): Proyecto Académico de la Licenciatura en Matemáticas (Volumen I).

Uspenski, V. (1978): Triángulo de Pascal. Rusia-Moscú: Editorial MIR.

Vorobiov, N. (1974): Los Números de Fibonacci. Rusia-Moscú: Editorial MIR.